This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

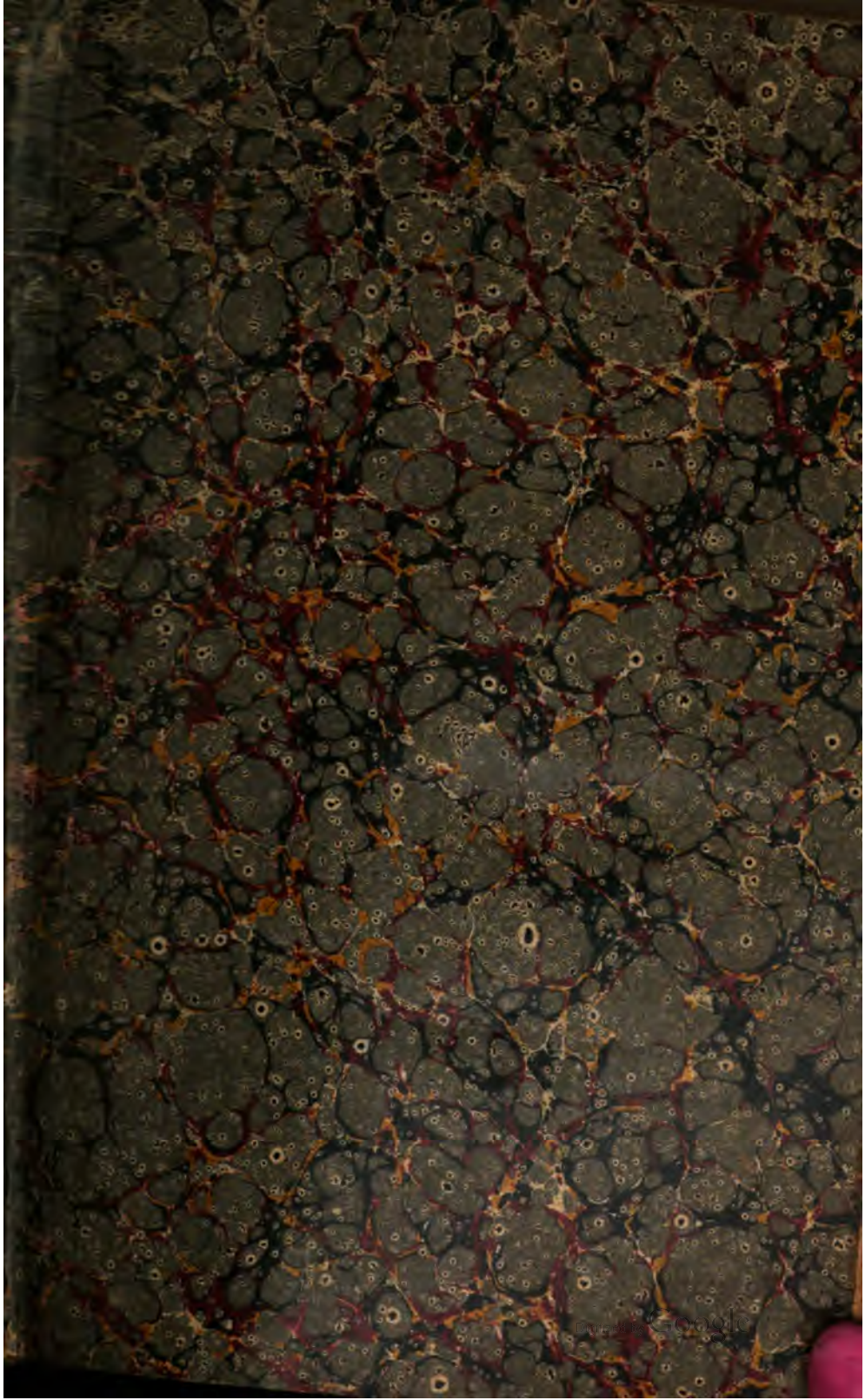
GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MANUEL

DU CONDUCTEUR

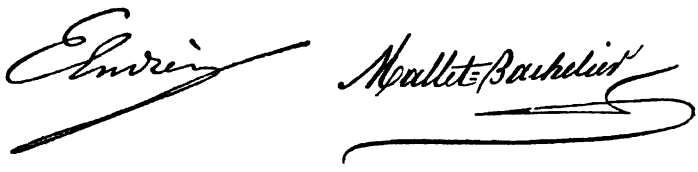
DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Digitized by Google

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet ouvrage a été fait à Paris, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, les griffes de l'Auteur et du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



PARIS.— IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

Digitized by Google

MANUEL

DU CONDUCTEUR

DES PONTS ET CHAUSSÉES,

RÉDIGÉ

D'APRÈS LE NOUVEAU PROGRAMME OFFICIEL,

PAR E. ENDRÈS,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Ponts et Chaussées
et de la Compagnie des Chemins de fer du Midi.

OUVRAGE INDISPENSABLE

**Aux Conducteurs et Agents secondaires des Ponts et Chaussées
et des Compagnies de Chemins de fer,
aux Agents voyers et à tous les Candidats à ces emplois.**

Avec Figures dans le texte et Planches gravées.

DEUXIÈME ÉDITION

CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE, ET CONTENANT TOUTES LES MATIÈRES DU PROGRAMME.

TOME PREMIER.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1857

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

Digitized by Google

Eng 458.57

HARVARD LIBRARY
OCT 14 1912
CAMBRIDGE, MASS.

Prof F. L. Olmsted
Brookline

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

L'accueil bienveillant fait à cet ouvrage, dont la première édition, malgré la double concurrence qu'elle a dû subir, s'est épuisée en quelques mois, nous imposait l'obligation de ne rien négliger pour le rendre digne de ce succès; on peut constater que nous avons envisagé ce devoir dans toute son étendue, en ajoutant à notre travail les articles du Programme qui n'y avaient point d'abord trouvé place.

Le *Manuel du Conducteur des Ponts et Chaussées* sera donc désormais le seul livre nécessaire pour la préparation des candidats aux examens annuels, ainsi que pour l'instruction de ceux qui désirent entrer dans le service vicinal; il aura le précieux avantage de renfermer dans un cadre unique, et dégagées de théories inutiles, toutes les connaissances sur lesquelles portent les interrogations orales et les épreuves écrites. Les Conducteurs en exercice, et principalement ceux qui sont entrés en fonction avant la promulgation encore toute récente du nouveau Programme, y trouveront également un résumé complet des connaissances indispensables à leur pratique journalière.

Nous avons scrupuleusement suivi, dans nos développements, les indications et l'ordre du Programme officiel que nous reproduisons textuellement en tête de notre ouvrage; c'est ainsi que nous nous sommes astreint à présenter les

Digitized by Google

vérités de la Statique sans le secours des formules trigonométriques, dont l'exposé ne vient que plus tard. Une seule exception de quelque importance nous a toutefois paru devoir être faite, et nous avons à la justifier. A l'exemple de la plupart des Traités classiques de Géométrie élémentaire, à l'exemple même du dernier Programme de l'enseignement des Lycées, le Programme des examens des Conducteurs fait reposer les théories des droites perpendiculaires et des parallèles sur la démonstration préalable des cas d'égalité des triangles; nous avons cru pouvoir utilement substituer à cette disposition celle qui consiste à étudier d'abord les propriétés d'*une* droite isolée; puis successivement celles d'un système de *deux* droites, obliques, perpendiculaires ou parallèles; de *trois* droites, ou des triangles; de *quatre* droites, ou des quadrilatères; enfin, d'*un nombre quelconque* de droites, ou des polygones. Poursuivant ce principe jusque dans les détails, nous avons exposé d'abord toutes les propriétés fondamentales inhérentes à un triangle unique, et c'est seulement après cette étude que nous avons mis en présence deux triangles pour examiner leurs divers cas d'égalité et de similitude; la même marche a d'ailleurs été suivie pour les quadrilatères et les polygones. Cette classification est incontestablement plus méthodique, plus géométrique dans toute l'acception de ce mot; elle pénétrera plus facilement, nous l'espérons, dans l'intelligence des commençants, et y poussera des racines plus profondes; elle nous a d'ailleurs permis d'introduire dans certaines démonstrations plus d'élégance et de simplicité, qualités qui ne sauraient recevoir leur entier développement que dans l'ordre complétement et vraiment rationnel; et cet ordre est un, en Géométrie comme dans toute autre branche des connaissances humaines.

Parmi les améliorations que réalise cette seconde édition, on remarquera : 1° la division de l'ouvrage en deux volumes

Digitized by Google

respectivement consacrés à la *partie théorique* et à la *partie pratique* des matières; 2° l'heureuse modification des planches, laquelle a permis d'en réduire le nombre tout en augmentant celui des instruments représentés; 3° la suppression des quelques pages relatives aux chemins de fer et à la navigation, qui ne rentrent pas directement dans la *pratique générale des travaux*, et dont l'exposé, nécessairement très-sommaire, pouvait faire supposer, par premier aperçu, que les autres matières essentielles avaient été de même incomplétement traitées.

Enfin, on nous pardonnera de céder au désir de parler ici des nombreux témoignages que nous avons reçus de nos camarades et de quelques chefs de service en faveur de notre modeste publication; nous ne nous étions pas trompé en pensant que les Examinateurs y trouveraient une précieuse facilité pour remplir la tâche qui leur est annuellement imposée. Plusieurs Préfets, sur la recommandation et la proposition de leurs chefs de vicinalité, ont bien voulu prescrire qu'un exemplaire de notre *Manuel* fût mis entre les mains de chacun de leurs Agents-Voyers; en outre, par une mesure dont nous ne saurions nous montrer trop reconnaissant, M. le maréchal Ministre de la Guerre a daigné nous informer qu'il en faisait prendre quatorze exemplaires pour les bibliothèques des Écoles régimentaires du Génie. Nous ne pouvions répondre dignement à ces encouragements qu'en complétant et améliorant notre ouvrage; c'est ce but qu'ont cherché nos efforts et que nous croyons avoir atteint: nous nous estimerons surtout heureux, si nous ne sommes pas contredit par les personnes auxquelles ce travail est spécialement destiné.

Digitized by Google

Digitized by Google

PROGRAMME D'EXAMEN

POUR L'ADMISSION A L'EMPLOI DE CONDUCTEUR AUXILIAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Les examens pour l'emploi de Conducteur auxiliaire des Ponts et Chaussées ont lieu tous les ans, au commencement du mois d'octobre. Ils sont passés, au chef-lieu de chaque département, devant une Commission composée d'un Ingénieur en chef et de deux Ingénieurs ordinaires, désignés par le Ministre.

Nul n'est admis à y prendre part, s'il n'est âgé de plus de vingt et un ans et de moins de trente ans. Toutefois, les militaires porteurs d'un congé régulier et les piqueurs qui, à l'âge de trente ans, compteraient plus de deux ans de service, pourront concourir jusqu'à trente-cinq ans.

Les demandes d'admission aux examens doivent parvenir à l'Administration du 1^er^ août au 1^er^ septembre.

Elles doivent être accompagnées :

1°. D'un acte de naissance ou de toute autre pièce constatant régulièrement l'âge du candidat;

2°. D'une note faisant connaître ses antécédents et les études auxquelles il s'est livré. A cette note doivent être joints les diplômes, certificats, etc., qui auraient pu lui être délivrés. — Les demandes des piqueurs ou autres agents doivent être transmises et appuyées par les chefs de service.

L'Administration arrête la liste des candidats qui pourront se présenter au concours dans chaque département.

Le tableau ci-après détermine les connaissances exigées des candidats.

Digitized by Google

et la valeur relative assignée à chacune des parties de l'examen, à raison de son étendue ou de son importance au point de vue du service des Conducteurs.

CONNAISSANCES EXIGÉES.

	Valeurs relatives.
1°. *Écriture courante*, nette et très-lisible.....	2
2°. *Principes de la langue française*. — (Indépendamment d'une dictée destinée à constater qu'ils connaissent suffisamment l'orthographe, les candidats auront à rédiger un rapport sur une affaire de service).....	3
3°. *Arithmétique*. — Numération décimale. — Addition, soustraction, multiplication, division; preuve de ces opérations. Nombres décimaux. — Fractions. Extraction des racines carrées et cubiques. Système légal des poids et mesures. Résolution de problèmes; questions d'intérêt, d'escompte, de société. Proportions et progressions.....	5
4°. *Logarithmes*. — Théorie des Logarithmes et usage des Tables.	2
5°. *Algèbre*. — Addition et soustraction des polynomes. — Multiplication et division des monomes et des polynomes. — Équations du premier degré à une ou plusieurs inconnues. — Équations du second degré à une inconnue.....	1
6°. *Géométrie*. — Préliminaires. — Égalité des triangles. — Droites perpendiculaires, obliques, parallèles. — Parallélogrammes, polygones. — Lignes proportionnelles, triangles semblables. Mesure des angles. — Contact et intersection des cercles. — Tangentes et sécantes du cercle. — Polygones inscrits, circonscrits au cercle. — Aire des polygones et du cercle. Propositions relatives à la ligne droite et au plan. — Plans perpendiculaires et parallèles. — Angles dièdres et trièdres. Tétraèdres; pyramides. — Parallélépipèdes; prismes. — Polyèdres égaux et semblables. — Aire et volume du cône droit, du cylindre droit et de la sphère.....	5
A reporter.....	18

Digitized by Google

	Valeurs relatives
Report.....	18
7°. *Statique*. — Composition et décomposition des forces parallèles, concourantes ou dirigées d'une manière quelconque dans l'espace. — Détermination des centres de gravité. Équilibre des machines simples et composées : le levier, la poulie, le plan incliné, le treuil, les moufles et la vis, en faisant abstraction du frottement. — Rapport entre les espaces parcourus par les points d'application de la puissance et de la résistance, lorsque la machine est mise en mouvement; égalité entre le travail moteur et le travail résistant.....	1
8°. *Trigonométrie rectiligne*. — Lignes trigonométriques. — Relations entre les lignes trigonométriques d'un arc. — Principales formules trigonométriques. Usage des Tables de sinus. Relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle ou d'un triangle quelconque. — Résolution des triangles.....	2
9°. *Géométrie descriptive*. — Méthode des projections. Questions relatives à la ligne droite et au plan.....	2
10°. *Dessin graphique et lavis*.....	4
11°. *Lever des plans*. — Mesure des distances. — Chaîne d'arpenteur; stadia. — Réduction à l'horizontale des distances mesurées sur les pentes. Mesure des angles. — Équerre d'arpenteur, alidade, graphomètre, boussole. — Usage et vérification des instruments. Lever à l'équerre, à la planchette, à la boussole et au graphomètre. Rapport et dessin des plans. — Indication des échelles adoptées dans le service des Ponts et Chaussées. — Copie et réduction des plans. Tracé d'un axe sur le terrain; piquetage, alignements, courbes. — Plan parcellaire.....	5
12°. *Nivellement*. — Niveau d'eau. — Niveau à bulle d'air; niveaux d'Égault et de Lenoir. — Mire à coulisse, mire parlante. — Usage et vérification des instruments.	
A reporter.....	32

Digitized by Google

	Valeurs relatives.
Report.....	32
Opération du nivellement; carnet. — Calcul des cotes de hauteur rapportées à un plan général de comparaison.	
Modes de représentation du terrain adoptés dans le service des Ponts et Chaussées. — Dessin du profil en long, des profils en travers. — Plans cotés.	
Tracé des profils sur le terrain. — Indication des points de hauteur pour les déblais et les remblais.	
Niveau de pente de Chézy; son emploi pour tracer sur le terrain une ligne d'une pente déterminée.....	5
13°. *Cubature des terrasses et mouvement des terres.* — Évaluation du cube des terrassements: 1° par la méthode dite exacte; 2° par les méthodes expéditives. — Usage des Tables dressées par ordre de l'Administration.	
Règles générales pour la répartition des déblais. — Divers modes de transport. — Formules qui fixent la limite des distances entre lesquelles il convient de préférer tel ou tel mode de transport.	
Détermination de la distance moyenne des transports. — Tableau du mouvement et de la répartition des déblais et des remblais.....	4
14°. *Pratique des travaux.* — Notions sur les qualités et les défauts des matériaux, sur leur emploi dans les maçonneries et charpentes, sur les travaux d'entretien des routes, et sur la pratique des travaux en général.....	5
TOTAL.....	46

Les candidats possédant des connaissances plus étendues que celles du Programme peuvent demander qu'elles soient constatées par les examinateurs.

L'examen de chaque candidat fait l'objet d'un procès-verbal détaillé, indiquant les questions posées sur les diverses parties du Programme, et la manière plus ou moins satisfaisante dont elles ont été résolues.

La pièce d'écriture, la dictée, la rédaction et les dessins, sont joints au procès-verbal.

Afin d'arriver à une appréciation exacte et comparative du mérite des

Digitized by Google

candidats, il est attribué à chacune de leurs réponses ou des parties de leur travail, une valeur numérique exprimée par des chiffres qui varient de 0 à 20, et qui ont respectivement les significations ci-après :

0.	Néant.	12, 13, 14.	Assez bien.
1, 2.	Très-mal.	15, 16, 17.	Bien.
3, 4, 5.	Mal.	18, 19.	Très-bien.
6, 7, 8.	Médiocrement.	20.	Parfaitement.
9, 10, 11.	Passablement.		

Une moyenne est établie d'après ces chiffres pour chaque partie du Programme; chacune de ces moyennes est multipliée par les nombres ou coefficients exprimant leur valeur relative, et la somme des produits donne le nombre total des points ou degrés obtenus pour l'ensemble des épreuves.

Nul ne pourra être déclaré admissible s'il n'a obtenu au moins la moitié du maximum pour chacun des articles 1, 2, 3, 6, 10, 11 et 12, et pour les autres articles réunis; et les deux tiers de ce maximum pour l'ensemble de son examen.

Les procès-verbaux d'examen sont transmis à l'Administration avec un rapport général sur l'ensemble des examens, dans lequel les candidats sont classés suivant l'ordre de mérite que leur assigne le résultat du concours dans chaque département.

L'admissibilité des candidats à l'emploi de Conducteur auxiliaire est déclarée par le Ministre, sur le vu des procès-verbaux d'examen. Cette déclaration d'admissibilité ne confère, d'ailleurs, aux candidats aucun droit à une nomination immédiate; elle les met seulement en position de concourir, à l'exclusion de tous autres candidats, pour les emplois de Conducteur vacants ou à créer, soit dans les départements où ils ont été examinés, soit dans tout autre département.

Arrêté par le Ministre des Travaux publics.

Paris, 26 juillet 1851.

P. MAGNE.

Digitized by Google

DIVISION DE L'OUVRAGE.

TOME Ier. — PARTIE THÉORIQUE.

Arithmétique et Logarithmes.
Algebre.
Geometrie.
Statique.
Trigonométrie rectiligne.
Géométrie descriptive.

TOME II. — PARTIE PRATIQUE.

Dessin graphique et Lavis.
Lever des plans.
Nivellement.
Cubature des terrasses et Mouvement des terres.
Pratique des travaux.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

DU PREMIER VOLUME.

PARTIE THÉORIQUE.

Pages.

AVERTISSEMENT..... v

PROGRAMME D'EXAMEN pour l'admission à l'emploi de Conducteur auxiliaire des Ponts et Chaussées..... ix

DIVISION DE L'OUVRAGE..... xiv

ARITHMÉTIQUE.

Numéros.

1. Préliminaires. — *Nombres entiers*..... 1
2. Numération décimale..... 1
6. Addition..... 4
9. Soustraction..... 6
12. Multiplication..... 7
17. Division..... 12
21. *Fractions*. — Propriétés fondamentales..... 16
28. Addition..... 20
29. Soustraction..... 21
31. Multiplication..... 22
37. Division..... 24
42. *Nombres décimaux*..... 27
45. Addition..... 29
46. Soustraction..... 29
47. Multiplication..... 30
49. Division..... 30

Digitized by Google

Numéros. Pages.

36. *Carrés* et *cubes*..... 36
62. Racine carrée d'un nombre entier..... 38
66. Racine cubique d'un nombre entier..... 42
69. Carré et racine carrée d'une fraction..... 45
71. Cube et racine cubique d'une fraction..... 46
73. *Système légal des poids et mesures*..... 47
74. Longueurs..... 48
75. Surfaces..... 48
76. Volumes..... 49
77. Poids..... 50
78. Monnaies..... 50
79. *Résolution des problèmes*..... 51
82. Questions d'intérêt..... 55
83. Intérêt simple..... 55
84. Intérêt composé..... 57
85. Questions d'escompte..... 58
86. Questions de société..... 59
89. *Différences, rapports, équidifférences* et *proportions*..... 61
96. *Progressions*..... 68
104. *Logarithmes*..... 72
115. Usage des Tables..... 79

ALGÈBRE.

1. Préliminaires..... 89
3. Notations et définitions..... 91
4. Addition..... 93
5. Soustraction..... 94
6. Multiplication..... 95
14. Division..... 98
22. *Équations*..... 102
24. Équations du premier degré à une seule inconnue..... 103
26. Équations du premier degré à plusieurs inconnues..... 105
31. Problèmes du premier degré..... 110
36. Équations du second degré à une inconnue..... 117
40. Problèmes du second degré..... 120

Digitized by Google

GÉOMÉTRIE.

Numéros.		Pages.
1.	Préliminaires	125
9.	*Géométrie plane.* — Notions sur la *ligne droite* et les *angles*	127
12.	Droites perpendiculaires	128
19.	Droites parallèles	132
28.	*Triangles*	135
37.	Triangles égaux	139
42.	*Polygones*	141
52.	Polygones égaux	146
56.	*Lignes proportionnelles*	148
62.	Polygones semblables	151
76.	*Circonférence du cercle*	156
88.	Contact et intersection des cercles	161
91.	Mesure des angles	163
99.	Propriétés métriques des cordes, sécantes et tangentes	167
102.	Polygones inscrits et circonscrits au cercle	169
110.	Aires des polygones	173
125.	Aire du cercle	179
130.	*Problèmes de géométrie plane*	183
131.	Tracé des perpendiculaires et des parallèles	183
135.	Construction des angles et des triangles	184
141.	Division proportionnelle des droites et construction des polygones semblables	187
146.	Bissection de l'angle; tangente au cercle; arc capable d'un angle donné	189
150.	Inscription des polygones réguliers	191
154.	Problèmes sur les aires des polygones et du cercle	193
160.	*Géométrie dans l'espace.* — De la ligne droite et du *plan*	196
164.	Droites et plans perpendiculaires	197
167.	Droites et plans parallèles	199
175.	*Angles dièdres*	202
185.	*Angles trièdres*	204
187.	*Tétraèdres*	206
191.	Tétraèdres égaux	207
198.	*Polyèdres*	208
208.	Polyèdres égaux	213
209.	Polyèdres semblables	215
221.	*Sphère*	219

Digitized by Google

Numéros. Pages.

232. Contact et intersection des sphères..... 223
234. *Aires des polyèdres* et des trois *corps ronds*..... 224
245. Volumes des polyèdres et des trois corps ronds..... 229

STATIQUE.

1. Préliminaires..... 241
5. Composition et décomposition des forces concourantes..... 243
16. Composition et décomposition des forces parallèles..... 249
27. Composition des forces dirigées d'une manière quelconque..... 255
30. *Centres de gravité*..... 257
33. Centre de gravité des lignes..... 259
35. Centre de gravité des surfaces..... 260
40. Centre de gravité des solides..... 264
47. Notions sur le *travail des forces*..... 268
51. Généralités sur les *machines*..... 272
54. Le levier. — La balance, la romaine, le peson..... 275
62. La poulie..... 281
67. Le plan incliné..... 283
74. Le treuil..... 288
77. Les mouffles..... 290
80. La vis..... 292

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

1. Préliminaires. — *Lignes trigonométriques*..... 297
7. Relations entre les lignes trigonométriques d'un arc..... 302
10. Relations entre les lignes trigonométriques de deux arcs, et celles de l'arc égal à leur somme ou à leur différence..... 305
14. Relations entre les lignes d'un arc et celles de l'arc double, triple, etc..... 309
16. Relations entre les lignes d'un arc et celles de l'arc sous-double, sous-triple, etc..... 310
22. Autres relations importantes tirées des précédentes..... 314
26. *Tables trigonométriques*; leur usage..... 317

Digitized by Google

Numéros. Pages.

29. *Résolution des triangles*. 320
30. Relations entre les côtés et les angles d'un triangle..... 321
34. Résolution des triangles rectangles... 323
38. Résolution des triangles quelconques... 324

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

1. Préliminaires. — *Méthode des projections*..... 333
14. *Problèmes*. — Intersection des droites et des plans..... 340
22. Droites et plans déterminés par diverses conditions..... 347
29. Droites et plans perpendiculaires..... 350
36. Angles formés par des droites et des plans. 353
41. Exercices.. 357

FIN DE LA TABLE DU PREMIER VOLUME.

Digitized by Google

Digitized by Google

MANUEL

DU

CONDUCTEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ARITHMÉTIQUE.

PRÉLIMINAIRES.

1. On appelle *nombre* la réunion de plusieurs objets de même espèce, et l'objet dont la répétition a donné naissance au nombre prend le nom d'*unité*. C'est ainsi que, dans les expressions *vingt francs, cinquante pommes, trois cents livres*, les unités respectives sont le *franc*, la *pomme*, le *livre*.

Les nombres ci-dessus énoncés, dans lesquels on désigne l'espèce de l'unité, sont des nombres *concrets;* ils seraient, au contraire, dits *abstraits*, si l'on considérait seulement des groupes d'unités non déterminées, comme *vingt, cinquante, trois cents*.

L'*Arithmétique* est la science des nombres; elle apprend à les former, à les exprimer et à les écrire, à les composer entre eux et à les décomposer; enfin, elle établit leurs principales propriétés.

Dans l'étude que nous allons faire de cette science, nous considérerons d'abord exclusivement les nombres *entiers*, c'est-à-dire ceux qui ne renferment que des unités entières; nous examinerons ensuite ceux dont l'expression contient des parties de l'unité, et qui sont nommés *nombres fractionnaires* ou *fractions*.

NUMÉRATION DÉCIMALE.

2. La série naturelle des nombres entiers se forme en ajoutant l'unité à elle-même, puis l'unité au nouveau nombre obtenu, et ainsi de suite, indéfiniment; les premiers nombres ainsi formés, y compris l'unité elle-même, ont reçu les noms suivants :

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix.

Mais cette suite des nombres étant nécessairement illimitée, il était impossible de songer à donner à chacun d'eux un nom particulier; nous allons voir comment, au moyen de quelques conventions fort simples, on est parvenu à les exprimer tous avec très-peu de mots.

L'exposition de ce système constitue la *numération*, et le nombre *dix*,

Digitized by Google

choisi pour y jouer un rôle fondamental, l'a fait appeler *numération décimale.*

3. *Expression des nombres, ou numération parlée.* — Les neuf premiers nombres, désignés par des noms particuliers ci-dessus posés, forment des groupes d'*unités du premier ordre* ou d'*unités simples;* le nombre *dix*, qui vient ensuite, a été considéré comme une *unité du second ordre* ou une *dizaine.* On a alors compté par dizaines, comme on l'avait fait par unités simples, et l'on a formé la série de dizaines qui suit :

dix, deux dix, trois dix, quatre dix, cinq dix, six dix, sept dix, huit dix, neuf dix,

noms que l'on a pu, sans trop augmenter la quantité des mots nouveaux, remplacer respectivement par les suivants :

dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix,

et à la suite de chacun desquels on a placé les neuf unités du premier ordre, comme ci-après :

trente-un, trente-deux, trente-trois,....., trente-huit, trente-neuf.

Cette nouvelle partie de la nomenclature n'a subi d'ailleurs que de très-légères et dernières exceptions, par la substitution usuelle des mots

onze, douze, treize, quatorze, quinze et *seize,*

aux mots

dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq et *dix-six.*

Arrivés ainsi jusqu'au nombre quatre-vingt-dix-neuf, lequel correspond à neuf dizaines et neuf unités, on a obtenu, par l'adjonction d'une unité de plus, le groupe de dix dizaines, auquel a été donné le nom de *centaine* ou *cent*, et l'on a encore considéré la centaine comme une unité d'un troisième ordre suivant lequel on a continué à compter comme on l'avait fait par dizaines et par unités simples.

On a obtenu de cette manière les nombres

cent, deux cents, trois cents, quatre cents,....., neuf cents,

à la suite desquels on a placé, pour établir la continuité de la série d'unité en unité, les quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres, jusqu'à ce qu'on eût atteint *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.*

Une unité de plus donnait dix centaines, que l'on a désignées sous le nom spécial de *mille.* Au lieu de continuer à donner à chaque groupe de dix en dix fois plus fort un nom nouveau, on a simplifié plus encore en regardant le nombre mille comme une unité d'une nouvelle classe et en comptant par unités, dizaines et centaines de mille, comme on l'avait

Digitized by Google

fait pour les unités simples; ainsi l'on a dit :

un mille, deux mille, trois mille, ..., neuf mille;
dix mille, vingt mille, trente mille, ..., quatre-vingt-dix mille;
cent mille, deux cent mille, trois cent mille, ..., neuf cent mille,

et l'interposition des nombres précédemment nommés, depuis un jusques et y compris neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, a complété la nomenclature jusqu'au nombre

neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf unités.

Le nombre qui suit ce dernier est la réunion de mille fois mille unités; on l'a appelé *million*, et ce nom sert de type à une troisième classe qui comprend, comme celle des mille, des dizaines de millions et des centaines de millions; la classe suivante s'appelle *billion* (en finances *milliard*), et ainsi de suite, en donnant les noms de *trillion, quatrillion, quintillion, etc.*, à des groupes d'unités de mille en mille fois plus forts.

Ainsi se trouve formée la série des nombres croissants d'unité en unité jusqu'à des termes que n'atteignent jamais les besoins ordinaires; l'ensemble de ce système présente, en résumé, de grandes classes d'unités de mille en mille fois plus fortes, dont chacune se subdivise elle-même en trois ordres de dix en dix fois plus forts, et telles, que le premier ordre de chaque classe représente également des unités dix fois plus fortes que celles du troisième ordre de la classe précédente.

Vingt-cinq mots ont suffi pour nommer, sans confusion possible, tous les nombres entiers jusqu'au billion inclusivement; il n'en eût fallu que quatorze, sans les dérogations exceptionnelles que l'usage a consacrées envers les mots *onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, vingt, trente, quarante, cinquante* et *soixante*.

4. *Écriture abréviative des nombres, ou numération écrite.* — Le mode adopté pour l'écriture abréviative des nombres est la conséquence naturelle de leur formation par ordres de dix en dix fois plus forts les uns que les autres, à partir des unités simples; il en résulte, en effet, qu'un nombre quelconque ne peut jamais contenir plus de neuf unités de chaque ordre, et qu'il suffit, par suite, de représenter par des signes spéciaux les neuf premiers nombres. Ces signes ou *chiffres* sont les suivants :

un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,

auxquels on a adjoint le caractère o, appelé *zéro*, pour tenir la place des ordres d'unités qui manquent dans un nombre.

D'après cela, *pour écrire un nombre énoncé, on écrira successivement les trois chiffres qui représentent les ordres de chaque classe, en rempla-*

Digitized by Google

çant par des zéros les ordres qui manquent. C'est ainsi que le nombre trente-sept mille quatre cent huit unités s'écrira

037 408,

ou simplement

37 408,

puisque le zéro placé en tête d'un nombre peut être supprimé sans inconvénient, comme n'influant en rien sur l'ordre de chacun des autres chiffres, à partir de celui des unités simples ou du chiffre extrême de droite.

Inversement, *on lira un nombre écrit en le divisant, à partir de la droite, en classes ou tranches de trois chiffres, la tranche extrême à gauche pouvant n'avoir que deux ou même un seul chiffre, et l'on énoncera successivement chacune des tranches, à partir de la gauche, comme si elle était seule, en la désignant par le nom qui lui appartient.*

Ainsi le nombre 36 653 040 267 s'énoncera 36 billions 653 millions 40 mille 267 unités.

5. Il résulte de ce qui précède : 1° que chaque chiffre dans un nombre a deux valeurs : l'une, la *valeur absolue*, qui dépend de sa forme et se rapporte à la collection d'unités qu'il représente; l'autre, la *valeur relative*, laquelle tient au rang qu'occupe le chiffre; 2° que, si l'apposition d'un ou plusieurs zéros à la gauche d'un nombre ne modifie en rien la valeur de ce nombre, il n'en est pas de même si ces zéros sont mis à la droite du nombre, dont toutes les unités deviennent, par ce seul fait, dix, cent, mille... fois plus fortes en remontant d'un ou plusieurs rangs vers la gauche; 3° que le zéro ne signifie rien par lui-même, abstraction faite de son utilité pour tenir la place des unités manquantes et conserver le rang des autres chiffres qui sont, par opposition, appelés *chiffres significatifs.*

OPÉRATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES ENTIERS.

ADDITION.

6. L'*addition* est une opération dont le but est de réunir deux ou plusieurs nombres donnés en un seul appelé *somme* ou *total.*

Premier cas. — Si l'on doit ajouter un nombre d'un seul chiffre à un autre nombre quelconque, on y parviendra sûrement et facilement en ajoutant une à une toutes les unités du plus petit nombre à celles du plus grand. Par exemple, pour ajouter 5 à 47, on dira : 47 et 1 font 48, et 1 font 49, et 1 font 50, et 1 font 51, et 1 font 52; la somme cherchée est donc 52, et l'on supplée d'ailleurs d'ordinaire à la lenteur de ce procédé par un exercice de la mémoire qui permet de dire sur-le-champ et sans hésitation : 47 et 5 font 52.

Deuxième cas. — Pour additionner entre eux des nombres quelconques,

Digitized by Google

comme 2498, 579 et 60581, il faudra faire séparément l'addition de toutes les parties de même espèce de ces nombres, c'est-à-dire ajouter les unités avec les unités, les dizaines avec les dizaines, les centaines avec les centaines, et ainsi de suite. Ces additions partielles se font, le plus commodément possible, en écrivant les nombres les uns sous les autres, de manière que leurs divers ordres se correspondent, et plaçant la somme au-dessous, comme il suit :

$$\begin{array}{r} 2498 \\ 579 \\ 60581 \\ \hline 63658 \end{array}$$

D'après ce qui vient d'être dit, le total des trois nombres considérés se composerait de 6 dizaines de mille, 2 mille, 14 centaines, 24 dizaines et 18 unités, nombre qui peut et doit se réduire par la composition de 10 des 18 unités en 1 dizaine, de 20 des 25 dizaines en 2 centaines, et de 10 des 16 centaines en 1 mille; on obtient ainsi, pour la somme définitive, le nombre 63658.

Cette méthode se simplifie du reste encore, dans la pratique, par le report immédiat des dizaines d'unités de chaque colonne à la colonne suivante; dans le cas présent, on dirait donc : 1 et 9 font 10, et 8 font 18; je pose 8 unités et retiens 1 dizaine; cette dizaine retenue et 8 font 9, et 7 font 16, et 9 font 25; je pose 5 dizaines et retiens 2 dizaines de dizaines, ou 2 centaines; 2 et 5 font 7, et 5 font 12, et 4 font 16; je pose 6 centaines et retiens 1 dizaine de centaines ou 1 mille; 1 et 2 mille font 3 mille; enfin, 6 dizaines de mille.

En général, *pour additionner plusieurs nombres, on les écrit les uns sous les autres, de telle sorte que les unités de même ordre se correspondent; puis, en commençant par la droite, on fait la somme des chiffres de chaque colonne verticale; on écrit au-dessous de chaque colonne les unités de la somme partielle qui lui correspond, et l'on reporte les dizaines à la colonne suivante, pour les additionner avec les chiffres de cette colonne.*

7. *Preuve de l'addition.* — La preuve d'une opération n'est autre chose qu'une seconde opération qui sert à vérifier l'exactitude du résultat de la première.

Pour faire la preuve d'une addition, on la recommence dans un autre ordre, par exemple de haut en bas, si on l'a d'abord effectuée de bas en haut, ou en transcrivant les nombres à additionner dans un ordre quelconque différent du premier.

8. On indique l'addition par le signe + que l'on énonce *plus*, et, la somme des nombres à additionner étant égale au résultat de l'opération, on indique cette égalité par le signe =, qui s'énonce *égale*.

Digitized by Google

L'opération précédente peut donc se représenter par l'égalité

$$2498 + 579 + 60581 = 63658.$$

SOUSTRACTION.

9. La *soustraction* est une opération qui a pour objet de trouver la différence de deux nombres, ou, ce qui est la même chose, de trouver ce qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand.

Le résultat de la soustraction se nomme *reste*, *excès* ou *différence*.

On arrivera nécessairement au résultat en retranchant successivement toutes les parties du plus petit nombre des parties analogues du plus grand, c'est-à-dire les unités de chaque ordre du premier de celles qui leur correspondent dans le second; l'opération se trouve ainsi réduite à une série de soustractions partielles dans lesquelles le nombre à soustraire est au plus égal à 9, et qui s'effectuent soit de mémoire, soit par des retranchements successifs unité par unité.

Premier cas. — Si les deux nombres donnés sont tels, que chaque chiffre du nombre à soustraire soit inférieur au chiffre correspondant du nombre duquel il faut soustraire, l'application du procédé indiqué ne souffre aucune difficulté, et l'on trouve immédiatement le résultat de la soustraction ci-dessous qui rentre dans ce cas.

65738
4107
Reste... 61631

Deuxième cas. — Mais il n'en est pas toujours ainsi, et le contraire se présente, par exemple, dans l'opération suivante :

65738
4197
Reste... 61541

On n'a pu évidemment retrancher les 9 dixaines du plus petit nombre des 3 dizaines du nombre supérieur. Un artifice fort simple a alors conduit à considérer que les 73 dizaines du premier nombre peuvent à volonté se décomposer en 6 centaines et 13 dizaines. Adoptant pour un moment ce dernier mode, on a pu dire : 9 dizaines ôtées de 13 donnent 4 dizaines; puis 1 centaine ôtée, non plus de 7, mais seulement de 6 centaines, donne 5 centaines.

La difficulté se trouve donc éludée et, au moyen de cette indication, la soustraction peut s'effectuer par la règle indiquée. Toutefois, dans la pratique, on a trouvé plus commode de ne pas diminuer le chiffre supérieur précédent, mais d'augmenter d'une unité le chiffre inférieur correspondant, ce qui ne saurait évidemment troubler la différence partielle sur laquelle a porté la modification. Dans l'exemple considéré, on dirait par conséquent : 7 de 8 reste 1; 9 de 13 reste 4; 2 de 7 reste 5, etc.

En général, *pour trouver la différence de deux nombres, on écrit le*

Digitized by Google

plus petit sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent; puis, en commençant par la droite, on soustrait chacun des chiffres du nombre inférieur du chiffre correspondant dans le nombre supérieur. Lorsqu'une opération partielle ne peut se faire, on augmente le chiffre supérieur de 10, *et le chiffre inférieur suivant de* 1.

10. *Preuve de la soustraction. — Pour faire la preuve d'une soustraction*, l'énoncé de cette opération indique lui-même qu'*il faut ajouter le reste au plus petit nombre et trouver pour somme le plus grand.*

Cette preuve est facile à faire sur les soustractions qui nous ont servi d'exemples; nous ne nous y arrêterons pas.

11. On indique une soustraction par le signe —, qui s'énonce *moins*, et l'égalité suivante formule complétement les éléments et le résultat de l'une de ces opérations :

$$65738 - 4197 = 61541.$$

MULTIPLICATION.

12. La *multiplication* a pour objet de répéter un nombre donné et appelé *multiplicande*, autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre aussi donné et appelé *multiplicateur*. Le résultat de cette opération se nomme *produit;* le multiplicande et le multiplicateur sont dits les *facteurs* du produit.

Avant d'aller plus loin, nous devons constater qu'il résulte de cette définition, que la multiplication n'est qu'une addition abrégée, dans laquelle on ferait, à la manière indiquée, la somme d'autant de nombres égaux au multiplicande qu'il y aurait d'unités dans le multiplicateur.

Premier cas. — Si les deux facteurs d'une multiplication n'ont tous les deux qu'un seul chiffre, le produit doit être fourni par la mémoire ou, à défaut, par la table suivante attribuée à Pythagore :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Digitized by Google

Pour trouver, dans ce tableau, dont la première ligne renferme les multiplicandes et la première colonne les multiplicateurs, le produit de deux nombres d'un seul chiffre, il faut prendre dans la colonne du multiplicande le nombre qui correspond à la ligne du multiplicateur; on verra sans difficulté par cette méthode que le produit de 7 par 6, devant être dans la septième colonne et sur la sixième ligne, est 42.

Deuxième cas. — Quand il s'agit de multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, il suffit de multiplier séparément et successivement par le multiplicateur les chiffres des divers ordres du multiplicande, et de faire la somme des produits partiels obtenus.

Si, par exemple, nous voulons multiplier 647 par 7, nous aurons à faire le produit de 7 unités par 7, celui de 4 dizaines par 7, et celui de 6 centaines également par 7; ces trois produits partiels donnent respectivement 49 unités, 28 dizaines et 42 centaines dont la somme résulte de l'addition suivante :

$$\begin{array}{r} 49 \\ 280 \\ 4200 \\ \hline 4529 \end{array}$$

Mais, dans la pratique du calcul, on opère une simplification importante en faisant l'addition des produits partiels à mesure que l'on obtient chacun d'eux, sauf à retenir avec soin pour la colonne suivante du produit les dizaines de chaque ordre dont on pose seulement les unités. Ainsi l'on dit : 7 fois 7 font 49; je pose 9 et retiens 4 dizaines; 7 fois 4 dizaines font 28 dizaines qui, avec les 4 retenues, font 32 dizaines; j'en pose 2 et j'en retiens 30 ou 3 centaines; 7 fois 6 centaines font 42 centaines qui, avec les 3 retenues, font 45, et le produit complet se trouve immédiatement exprimé par 4529.

Troisième cas. — Soit maintenant à multiplier l'un par l'autre deux nombres de plusieurs chiffres, tels que 5492 par 328.

Le multiplicateur étant égal à 8, plus 20, plus 300, nous aurons répété le multiplicateur 328 fois, si nous le répétons d'abord 8 fois, puis 20 fois, puis enfin 300 fois.

Or, nous venons d'apprendre à répéter le multiplicande 8 fois, ou a le multiplier par 8 :

$$\begin{array}{r} 5492 \\ 8 \\ \hline 43936 \end{array}$$

Pour répéter le multiplicande 20 fois, on remarquera que 20 étant égal à 10 fois 2, il reviendra évidemment au même de répéter 5492 d'abord

Digitized by Google

2 fois, puis de prendre ensuite 10 fois le résultat obtenu :

$$\begin{array}{r} 5492 \\ 2 \\ \hline 10984 \end{array}$$

2 fois le multiplicande donne donc 10984; pour répéter ce produit 10 fois, ou pour le multiplier par 10, il suffit (5) de placer un zéro à sa droite; ce qui donne, pour le produit de 5492 par 20, le nombre 109840.

Il reste à répéter le multiplicande 300 fois ou 100 fois 3 fois; ceci se fera encore en le répétant d'abord 3 fois,

$$\begin{array}{r} 5492 \\ 3 \\ \hline 16476 \end{array}$$

et en multipliant par 100 le résultat obtenu, c'est-à-dire en plaçant 2 zéros à sa droite. Ce troisième produit partiel sera 1647600. Ajoutons-le aux deux premiers,

	5492	multiplicande.
	328	multiplicateur.
1er produit partiel.	43936	
2e.....	109840	
3e.....	1647600	
Le produit total sera.....	1801376	

Dans la pratique, on dispose la multiplication comme celle ci-dessus, et l'on se dispense d'écrire les zéros qui terminent le second et le troisième produit partiel, en ayant soin de placer le premier chiffre de droite de chacun de ces produits au rang que lui assigneraient les zéros; ce rang est d'ailleurs, pour chacun d'eux, le même que celui du chiffre correspondant du multiplicateur.

En général, *pour multiplier deux nombres de plusieurs chiffres l'un par l'autre, on multiplie successivement le multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur en commençant par la droite, et l'on place le premier chiffre de chaque produit partiel au-dessous du chiffre qui a servi de multiplicateur; on fait ensuite la somme des produits partiels, et cette somme est le produit cherché.*

Remarque I. — Si le multiplicateur contient un ou plusieurs zéros interposés entre les chiffres significatifs, cette circonstance n'a d'autre effet que d'obliger à reculer d'un plus grand nombre de rangs les produits partiels, pour placer leur premier chiffre à droite sous le chiffre correspondant du multiplicateur.

Remarque II. — Si l'un des deux facteurs, ou tous deux à la fois, sont

Digitized by Google

terminés par des zéros, on opère sur les chiffres significatifs, comme si les zéros qui terminent n'existaient pas, et l'on écrit à la suite du produit autant de zéros qu'il s'en trouve à la fois dans les deux facteurs.

Si, par exemple, on veut multiplier 45o3700 par 607000, on multipliera simplement 45037 par 607, comme il suit :

$$\begin{array}{r} 45037 \\ 607 \\ \hline 315259 \\ 270222 \\ \hline 27337459 \end{array}$$

et le produit des deux facteurs primitifs sera 27337459000000.

La raison de cette règle repose sur ce que, en supprimant 2 zéros à la droite du multiplicande, on a rendu ce facteur et par suite le produit 100 fois plus petit qu'il doit être; de même, la suppression de 3 zéros à la droite du multiplicateur a rendu ce facteur et par suite le produit 1000 fois trop petit. Il faut donc restituer à ce produit sa véritable valeur, en le rendant 100 fois 1000 fois, ou 100000 fois plus grand, ce qui se fera en plaçant 5 zéros à sa droite.

13. On indique la multiplication par le signe $\times$ que l'on énonce *multiplié par* dans les relations analogues à celle-ci :

$$45037 \times 607 = 27337459.$$

14. *Preuve de la multiplication.* — On vérifie l'exactitude d'une multiplication en la recommençant dans un ordre inverse des facteurs, et l'on doit retrouver le même produit; c'est ainsi que les deux opérations suivantes :

$$\begin{array}{r} 6714 \\ 395 \\ \hline 33570 \\ 60426 \\ 20142 \\ \hline 2652030 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 395 \\ 6714 \\ \hline 1580 \\ 395 \\ 2765 \\ 2370 \\ \hline 2652030 \end{array}$$

peuvent être regardées comme la preuve l'une de l'autre.

15. Il importe toutefois d'établir maintenant, à l'appui de la règle qui précède, ce principe que, *dans une multiplication de deux nombres l'un par l'autre, on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit.*

Soit, en effet, à faire le produit de 7 par 4. Ce produit s'obtiendra, d'après ce que nous savons, en répétant 7 quatre fois, et pourra se représenter en écrivant sept unités sur une ligne horizontale que l'on répétera

Digitized by Google

quatre fois :

1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1

La somme 28 de ces unités est évidemment le produit cherché, et peut se calculer indifféremment, en répétant 4 fois les 7 unités de la première ligne horizontale, ou en répétant 7 fois les 4 unités de la première colonne verticale. Dans le premier cas, on a 7×4 ; dans le second, on trouve 4×7, et comme cette somme est indépendante de l'ordre suivi pour la calculer, on en conclut que $7 \times 4 = 4 \times 7$.

16. Cette propriété a lieu du reste pour un nombre quelconque de facteurs, ainsi qu'on va le voir.

Établissons-la d'abord pour trois facteurs, et prouvons que les six produits

$$7 \times 4 \times 5$$
$$7 \times 5 \times 4$$
$$4 \times 7 \times 5$$
$$5 \times 7 \times 4$$
$$4 \times 5 \times 7$$
$$5 \times 4 \times 7$$

qui présentent toutes les manières possibles de changer l'ordre des trois facteurs, 7, 4 et 5, sont équivalents entre eux.

Or il est aisé de voir que chacun de ces six produits découle de l'un de ceux qui les précèdent par la simple permutation de deux facteurs consécutifs, opération qui peut, d'après le numéro précédent, se faire sans altération du produit de ces deux facteurs, et par conséquent aussi sans altération du produit total. Ainsi, puisque $4 \times 5 = 5 \times 4$, le second produit est équivalent au premier ; puisque $7 \times 4 = 4 \times 7$, le troisième équivaut de même au premier ; puisque $7 \times 5 = 5 \times 7$, le quatrième équivaut au second, et, par suite, au premier, et ainsi de suite. Tous ces produits sont donc équivalents au premier, et par conséquent sont équivalents entre eux.

En général, par des permutations successives de deux facteurs consécutifs, on parviendra toujours facilement à disposer des facteurs en nombre quelconque dans un ordre déterminé, sans que le produit ait changé de valeur.

Proposons-nous, comme exemple, de prouver que

$$7 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 = 5 \times 8 \times 4 \times 7 \times 6,$$

c'est-à-dire que l'on peut passer du second produit au premier sans changement de valeur.

Digitized by Google

Ce passage se fera de la manière la plus simple, comme nous l'avons dit, par des interversions de facteurs consécutifs, tendant à faire successivement passer chaque facteur du second produit à la place qu'il occupe dans le premier. C'est ainsi que les produits suivants procèdent les uns des autres :

$$5 \times 8 \times 4 \times 7 \times 6$$
$$5 \times 8 \times 7 \times 4 \times 6$$
$$5 \times 7 \times 8 \times 4 \times 6$$
$$7 \times 5 \times 4 \times 8 \times 6$$
$$7 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8$$

et par conséquent le dernier est équivalent au premier, comme nous l'avons annoncé.

Il est à remarquer que dans le passage du troisième au quatrième produit, nous avons pu faire à la fois deux changements de place tendant au résultat cherché, puisque 5×7 nous a donné 7×5, et que 8×4 a fourni 4×8. La même circonstance s'est offerte pour passer du quatrième produit au cinquième, et a contribué à l'abréviation du calcul.

De ces développements il résulte que *le produit d'un nombre quelconque de facteurs ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.*

De ce principe on conclut immédiatement que :

1°. *Pour multiplier un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de multiplier successivement par chacun de ces facteurs.*

En effet, si l'on a à multiplier 8 par 35, ou par 5×7, le produit sera toujours formé par la multiplication des facteurs 8, 5 et 7, et ne changera pas de valeur, soit que l'on multiplie d'abord 5 par 7, et le produit par 8, soit que l'on multiplie 8 par 5 et le produit par 7, ou encore 8 par 7 et le produit par 5.

2°. *Pour multiplier un produit par un certain nombre, il suffit de multiplier seulement l'un des facteurs par ce nombre.*

Soit, par exemple, le produit de 7 par 5 et par 3; pour multiplier ce produit par 4, il suffira de multiplier l'un de ses trois facteurs par 4. En effet, que l'on fasse le produit de 7 par 5 et par 3, puis par 4, ou que l'on multiplie 7 par le produit de 5 par 4, et enfin par 3, on aura toujours en définitive le produit des quatre facteurs 7, 5, 3 et 4, lequel reste le même dans quelque ordre que s'effectuent les multiplications.

3°. *Si l'on multiplie plusieurs facteurs d'un produit par certains nombres, le produit des nouveaux facteurs est égal au produit primitif multiplié par le produit des nombres par lesquels on a multiplié les facteurs.*

Cette troisième conséquence découle directement de la seconde.

DIVISION.

17. La *division* a pour but de chercher combien de fois un nombre

Digitized by Google

donné, qui s'appelle *dividende*, contient un autre nombre également donné, que l'on nomme *diviseur*. Le résultat de l'opération s'appelle *quotient*.

Généralement, le dividende ne contient pas un nombre exact de fois le diviseur, et l'opération met en évidence le nombre qu'il faudrait retrancher du premier pour que cette condition fût remplie; ce nombre est appelé le *reste* de la division; il exprime, en effet, ce qui reste après que du dividende on a ôté un nombre de fois le diviseur indiqué par le quotient.

Lorsque la division se fait sans reste, elle peut encore être définie comme ayant pour objet de partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur, et il résulte de l'une comme de l'autre de ces définitions que, dans ce cas, le dividende n'est autre chose qu'un produit de deux facteurs, dont l'un est le diviseur donné, et l'autre le quotient cherché.

Enfin, il est clair : 1° que le reste d'une division, ne pouvant plus contenir le diviseur, est lui-même plus petit que ce diviseur; 2° que, dans toute division qui présente un reste, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, augmenté du reste; ou encore, le dividende, diminué du reste, est égal au produit du diviseur par le quotient.

Premier cas. — Si le dividende est moindre que dix fois le diviseur, le quotient sera moindre que 10 et n'aura qu'un seul chiffre.

Soit, par exemple, à diviser 6829 par 742, ou à chercher combien de fois 742 est contenu dans 6829.

Dividende....	6829	742	Diviseur.
	6678	9	Quotient.
Reste.....	151		

Le diviseur 742 étant plus grand que 7 centaines, il sera contenu dans le dividende au plus autant de fois que 7 centaines; cherchons donc combien de fois 7 centaines sont contenues dans 6829, ou plutôt dans les 68 centaines de ce nombre, ce qui nous conduit à diviser d'abord 68 par 7. Le quotient est 9, et, pour avoir le reste de la division, faisons le produit de 742 par 9; ce produit est 6678, que nous retranchons du dividende, et 151 est le reste cherché.

Dans la pratique, au lieu de soustraire du dividende le produit tout formé du diviseur par le quotient, on retranche successivement des parties correspondantes du dividende les produits des différentes parties du diviseur par le chiffre du quotient, à mesure qu'on les obtient. Ainsi l'on dit : 9 fois 2 unités font 18 unités; comme ce produit ne peut être soustrait des 9 unités du dividende, j'augmente les dernières d'autant de dizaines qu'il en faut pour rendre cette soustraction possible, soit de 1 dizaine ou 10 unités, qui, ajoutées à 9, donnent 19; 18 de 19 donnent alors pour reste 1. Passons aux dizaines du diviseur; 9 fois 4 dizaines donnent

Digitized by Google

36 dizaines, auxquelles, pour ne pas changer le reste, j'ajoute celle que j'ai tout à l'heure ajoutée aux unités du dividende; j'ai donc 37 dizaines que je retranche encore, non pas de 2 dizaines, mais de 42 dizaines, et le reste partiel est 5 dizaines. Enfin, 9 fois 7 centaines font 63 centaines, qui, avec les 4 ajoutées aux dizaines du dividende, font 67, et 67 de 68 donnent 1.

Il peut arriver que le diviseur soit contenu dans le dividende moins de fois que ne l'indiquerait le quotient de 68 par 7; par exemple, si le diviseur était 783 :

6829	783
565	8

La raison de cette distinction consiste en ce que, le second chiffre du diviseur étant plus grand que 5, ce diviseur est plus approché de 8 centaines que de 7 centaines; il importe, pour ne pas multiplier inutilement les essais, de faire attention à cette circonstance dans les calculs, et un peu d'habitude fait bientôt cesser toute hésitation à cet égard : on en est du reste facilement averti, car, le chiffre du quotient étant trop fort, le produit du diviseur par ce chiffre ne peut se retrancher du dividende.

Deuxième cas. — Le dividende étant plus grand que 10 fois le diviseur, le quotient doit être plus grand que 10; il a donc plusieurs chiffres.

On arrive fort simplement à la marche qu'il convient de suivre, en considérant la division comme ayant pour but de chercher à partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur.

Soit, comme exemple, à diviser 678914 par 259 :

678914	259
1609	2621
551	
334	
75	

Pour partager 678914 en 259 portions égales, nous essayerons de partager ainsi successivement ses différents ordres d'unités. Les nombres des centaines de mille et des dizaines de mille du dividende étant inférieurs à 259, nous sommes conduits à considérer d'abord les 678 mille, et à les partager en 259 parties égales, ou à les diviser par 259; comme le quotient de cette division partielle est nécessairement moindre que 10, nous sommes ramenés au cas précédent, et nous trouvons que le chiffre des plus hautes unités du quotient, lequel exprime des mille, est 2.

Le reste 160 de cette première division partielle représente des mille qui n'ont pu être divisés en 259 parties égales, puisque ce reste est nécessairement plus petit que le diviseur; nous le convertirons en 1600 centaines, et en y ajoutant les 9 centaines du dividende, nous formons 1609 centaines dont le quotient par 259 sera 6, et s'obtiendra de la même

Digitized by Google

manière que plus haut. Nous arriverons à un second reste 55, exprimant des centaines, et que nous convertirons en dizaines, pour le diviser avec celles du dividende par 259, et ainsi de suite.

Le dernier reste, ou le reste de la division proposée, est 75, et le quotient est 2621; les nombres 678, 1609, 551, 334, qui, divisés par le diviseur, ont fourni les divers chiffres du quotient, sont appelés *dividendes partiels*.

En général, *pour diviser deux nombres l'un par l'autre, on prend sur la gauche du dividende assez de chiffres pour que le nombre qui en résulte contienne le diviseur; on divise ce nombre par le diviseur, et l'on obtient le premier chiffre du quotient. Du premier dividende partiel, on retranche le produit du diviseur par le chiffre obtenu au quotient; à la droite du reste, on abaisse le chiffre suivant du dividende; on divise le nombre ainsi formé par le diviseur, et l'on obtient le second chiffre du quotient, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'ayant abaissé successivement tous les chiffres du diviseur, on obtienne le chiffre des unités du quotient et le reste de l'opération.*

18. Soit encore à diviser 65438 par 7 :

65438	7
24	9348
33	
58	
2	

Le quotient est 9348, et le reste est 2.

Dans la pratique, lorsque le diviseur n'a qu'un seul chiffre, on n'écrit pas les restes, qui sont faciles à retenir, et l'on place les différents chiffres du quotient sous les parties correspondantes du dividende :

	65438	7
Quotient....	9348	
Reste.....	2	

19. *Preuve de la division.* — Pour faire la preuve de la division, on multiplie le diviseur par le quotient; au produit on ajoute le reste, et l'on doit obtenir le dividende.

Ainsi, nous vérifierons, comme il suit, la division de 678914 par 259, laquelle a donné pour quotient 2621, et pour reste 75 :

259
2621
259
518
1554
518
75
678914

Digitized by Google

La division sert aussi très-souvent à faire la preuve de la multiplication (14); en divisant le produit par l'un des deux facteurs, on doit retrouver l'autre.

20. On indique la division de deux nombres en plaçant le diviseur à la suite du dividende dont on le sépare par deux points, ou bien encore en plaçant le diviseur au-dessous du dividende, dont on le sépare par un trait horizontal; l'un ou l'autre de ces deux signes s'énonce *divisé par*. Au moyen de cette notation, on groupe fort simplement en une seule formule les données et les résultats d'une division :

$$\frac{678914 - 75}{259} = 2621.$$

En général.... $\dfrac{\text{dividende} - \text{reste}}{\text{diviseur}} = \text{quotient}.$

On aurait pu aussi employer ici les deux points pour le signe *divisé par;* mais, dans ce cas, il eût fallu montrer clairement que ce signe s'appliquait à la différence entre le dividende et le reste, et non pas au reste seul; ce résultat s'obtient simplement en plaçant cette différence dans une parenthèse que suit alors le signe de division :

$$(678914 - 75) : 259 = 2621.$$

FRACTIONS.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

21. Nous avons dit (1) que nous nous occuperions plus loin des *fractions*, c'est-à-dire des nombres formés par la réunion d'une ou plusieurs parties de l'unité. Comme l'unité peut être divisée d'une infinité de manières diverses, nous serons obligés, pour éviter toute confusion, de donner un nom à chacune des parties produites par la division, ou mieux de supposer que chaque fraction provient de la division de l'unité en un nombre déterminé de parties égales dont une ou plusieurs entrent dans la fraction considérée.

De là la nécessité d'indiquer, dans l'énoncé d'une fraction, d'une part, en combien de parties égales a été partagée l'unité, d'autre part, combien la fraction dont il s'agit comprend de ces parties; tels sont respectivement les rôles de chacun des deux *termes* de toute fraction, le *dénominateur* et le *numérateur*.

22. Pour énoncer une fraction, on prononce successivement son numérateur, puis son dénominateur que l'on fait suivre de la terminaison qualificative *ième;* ainsi, une fraction, dont le numérateur serait 12 et le dénominateur 37, s'énoncerait *douze trente-septièmes*. Cependant les dénominateurs 2, 3 et 4 se prononcent exceptionnellement *demi*, *tiers*,

Digitized by Google

quart. Toute fraction, 7 dix-neuvièmes, peut être considérée comme le quotient d'une division ayant pour dividende le numérateur 7, et pour diviseur le dénominateur 19 ; car cette fraction exprime 7 fois la dix-neuvième partie de l'unité, et le quotient de 7 par 19 représente la dix-neuvième partie de 7 unités, ce qui revient évidemment au même.

C'est en vertu de cette assimilation à un quotient que l'on écrit les fractions comme l'indication d'une division, en plaçant le dénominateur sous le numérateur, et en séparant ces deux termes par un trait. Les fractions 2 tiers, 12 trente-septièmes, 7 dix-neuvièmes s'écrivent donc respectivement

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{12}{37}, \quad \frac{7}{19}.$$

23. D'après cet exposé de la nature des fractions et des éléments qui entrent dans leur composition, on voit clairement :

1°. Que, *à numérateur égal, de deux fractions la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur*, et que, *à dénominateur égal, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur ;*

2°. Que l'*on rend une fraction un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, en rendant son numérateur le même nombre de fois plus grand ou plus petit*, puisqu'on prend ce même nombre de fois plus ou moins de parties égales de l'unité ; et qu'inversement, *on rend une fraction un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, en rendant son dénominateur le même nombre de fois plus petit ou plus grand*, puisque chacune des parties est devenue ce même nombre de fois plus grande ou plus petite, tandis qu'on continue à en prendre autant qu'auparavant ;

3°. Que l'*on ne change pas la valeur d'une fraction, quand on multiplie ou divise à la fois ses deux termes par un même nombre*, puisque ces deux opérations, effectuées simultanément sur les deux termes, rendent la fraction en même temps un même nombre de fois plus grande et plus petite.

Ainsi,

$\frac{12}{37}$ est plus grand que $\frac{12}{53}$ et plus petit que $\frac{19}{37}$;

$\frac{15}{124}$ est 3 fois plus grand que $\frac{5}{124}$ et 3 fois plus petit que $\frac{45}{124}$;

$\frac{15}{124}$ est 4 fois plus grand que $\frac{15}{31}$ et 4 fois plus petit que $\frac{15}{496}$;

enfin,

$\frac{25}{40}$ est égal à $\frac{75}{120}$ aussi bien qu'à $\frac{5}{8}$.

24. Les fractions proprement dites ont nécessairement leur numérateur

Digitized by Google

plus petit que leur dénominateur; si les deux termes étaient égaux, on aurait l'unité elle-même.

Si, au contraire, le numérateur devenait supérieur au dénominateur, alors la quantité considérée serait plus grande que l'unité, puisque le numérateur indiquerait que l'on prend un plus grand nombre de parties égales qu'il y en a dans l'unité. On a distingué ce cas par une dénomination spéciale, et les quantités

$$\frac{7}{4}, \quad \frac{34}{9}, \quad \frac{63}{17}$$

sont des *nombres fractionnaires*.

Pour connaître le nombre d'unités entières que renferme un nombre fractionnaire, par exemple $\frac{34}{9}$, pour en *extraire les entiers*, on remarquera que, l'unité valant 9 neuvièmes, ce nombre renferme autant d'unités que 34 contient de fois 9, et la division de 34 par 9 donne

$$\frac{34}{9} = 3 + \frac{7}{9}.$$

En général, *pour extraire les entiers contenus dans un nombre fractionnaire, on divise le numérateur par le dénominateur, et à la partie entière du quotient on ajoute une fraction ayant pour dénominateur celui du nombre fractionnaire et pour numérateur le reste de la division.*

Cette règle donne le moyen de compléter le quotient d'une division quelconque par une fraction qui a pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur.

Ainsi l'on peut encore formuler comme il suit la division du n° 20 :

$$\frac{678914}{259} = 2621 + \frac{75}{259}.$$

25. Inversement, on peut se proposer de convertir une expression telle que $7 + \frac{4}{5}$ en un nombre fractionnaire. On considérerait alors que, une unité valant 5 cinquièmes, les 7 unités valent 7 fois 5 cinquièmes ou 35 cinquièmes; donc

$$7 + \frac{4}{5} = \frac{35}{5} + \frac{4}{5} = \frac{39}{5}.$$

Ainsi, *pour convertir un nombre entier en une fraction dont le dénominateur est assigné, on multiplie ce nombre par le dénominateur donné, et le produit est le numérateur cherché.*

26. Nous venons de voir (23) que les fractions $\frac{75}{120}, \frac{25}{40}, \frac{5}{8}$ sont équivalentes; en raison de l'avantage que l'on trouve nécessairement à intro-

Digitized by Google

duire dans les calculs des fractions à termes simples, on doit toujours chercher à remplacer ces quantités, quand elles se présentent, par d'autres de même valeur et ayant des termes moindres. Quand cette simplification est impossible, comme dans le cas de $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{11}$, on dit que les fractions sont *irréductibles* ou qu'elles sont *ramenées à leur plus simple expression.*

Le moyen de simplifier une fraction consiste à diviser séparément ses deux termes par les facteurs communs qu'ils peuvent contenir; ainsi nous avons réduit $\frac{75}{120}$ à $\frac{25}{40}$ en divisant 75 et 120 par 3; la division des deux termes de $\frac{25}{40}$ par 5 nous a conduit à $\frac{5}{8}$.

C'est donc par une série de tâtonnements qu'on s'efforcera de ramener les fractions à des expressions plus simples. Il existe bien une méthode sûre pour arriver sans hésitation à des fractions irréductibles; mais elle est fondée sur des propriétés des nombres que les limites de notre programme ne nous ont pas permis d'aborder.

27. Pour comparer deux ou plusieurs fractions entre elles, il est souvent nécessaire et toujours avantageux qu'elles aient toutes le *même dénominateur.* On les ramène facilement à remplir cette condition *en multipliant les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.* Aucune des fractions considérées n'a, dans cette transformation, changé de valeur, puisque l'on a multiplié ses deux termes par un même nombre (23), et toutes ont pour dénominateur commun le produit des dénominateurs primitifs. Soit, par exemple, à réduire au même dénominateur les trois fractions

$$\frac{9}{12}, \quad \frac{13}{24}, \quad \frac{17}{36}.$$

La règle précédente donne immédiatement pour chacune d'elles :

$$\frac{9 \times 24 \times 36}{12 \times 24 \times 36}, \quad \frac{13 \times 12 \times 36}{24 \times 12 \times 36}, \quad \frac{17 \times 12 \times 24}{36 \times 12 \times 24},$$

ou

$$\frac{7776}{10368}, \qquad \frac{5616}{10368}, \qquad \frac{4896}{10368}.$$

Cette méthode est générale; mais elle est parfois susceptible de modifications qui conduisent à des fractions plus simples. On comprend en effet que si, par un moyen quelconque, ou par le seul examen des dénominateurs donnés, on découvrait un nombre qui, étant moindre que leur produit, fût exactement divisible par chacun d'eux, il suffirait de multiplier les deux termes de chaque fraction par le quotient que fournirait la divi-

Digitized by Google

sion de ce nombre par le dénominateur correspondant. Les trois fractions précédemment considérées présentent cette circonstance; on s'aperçoit sans peine que le nombre 72 est exactement divisible par chacun des trois dénominateurs, et que les quotients de ces divisions sont respectivement égaux à

$$6, \quad 3, \quad 2.$$

On aura donc réduit les fractions données au même dénominateur 72, si l'on multiplie les deux termes de la première par 6, ceux de la deuxième par 3 et ceux de la troisième par 2; ce calcul donne enfin les fractions

$$\frac{54}{72}, \quad \frac{39}{72}, \quad \frac{34}{72},$$

qui sont équivalentes aux proposées. Leur dénominateur commun permet d'ailleurs de reconnaître, à l'inspection des numérateurs, qu'elles sont placées dans l'ordre de grandeur décroissante.

Cette recherche d'un des nombres exactement divisibles par tous les dénominateurs des fractions proposées est basée sur la considération des facteurs dans lesquels peut se décomposer chacun de ces dénominateurs, et, ce nombre exactement divisible devenant le dénominateur commun des fractions transformées, il importe à un haut degré de le choisir le plus petit possible. La découverte d'un pareil nombre repose encore sur des considérations qui sortent du cadre tracé par notre programme : l'habitude du calcul et du maniement des nombres est donc le seul guide que nous puissions indiquer; mais il suffit dans le plus grand nombre des cas usuels.

OPÉRATIONS FONDAMENTALES SUR LES FRACTIONS.

ADDITION.

28. L'addition ayant toujours pour but de réunir en une seule plusieurs quantités de même espèce, *deux ou plusieurs fractions s'ajouteront entre elles par la simple addition de leurs numérateurs, si elles ont le même dénominateur qui sera également celui de la fraction totale :*

$$\frac{5}{9}+\frac{7}{9}+\frac{3}{9}=\frac{5+7+3}{9}=\frac{15}{9}=1+\frac{6}{9}=1+\frac{2}{3}.$$

Si les dénominateurs des fractions à ajouter ne sont pas les mêmes, on commencera par réduire ces fractions au même dénominateur, et ce cas sera ramené au précédent :

$$\frac{9}{12}+\frac{13}{24}+\frac{17}{36}=\frac{54}{72}+\frac{39}{72}+\frac{34}{72}=\frac{127}{72}=1+\frac{55}{72}.$$

Pour ajouter ensemble des expressions composées d'entiers et de fractions, on additionne séparément les entiers et les fractions.

Digitized by Google

Soit à ajouter

$$4 + \frac{2}{5},$$

$$2 + \frac{9}{10},$$

et

$$7 + \frac{3}{4}.$$

La somme des entiers est 13; celle des trois fractions est $\frac{41}{20}$ ou $2 + \frac{1}{20}$; la somme des trois expressions fractionnaires sera donc

$$13 + 2 + \frac{1}{20} \quad \text{ou} \quad 15 + \frac{1}{20}.$$

SOUSTRACTION.

29. De même que pour l'addition, *la soustraction de deux fractions s'effectuera, si elles ont même dénominateur, en retranchant l'un de l'autre les deux numérateurs et en donnant à cette différence le dénominateur commun :*

$$\frac{7}{13} - \frac{2}{13} = \frac{7-2}{13} = \frac{5}{13}.$$

Si les dénominateurs sont différents, on réduira les fractions à avoir le même dénominateur, puis on appliquera la règle précédente :

$$\frac{13}{15} - \frac{2}{3} = \frac{13}{15} - \frac{10}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

30. *On soustrait l'une de l'autre deux expressions composées d'entiers et de fractions, en retranchant séparément les entiers l'un de l'autre, ainsi que les fractions.*

$$\text{De } 9 + \frac{5}{6} \quad \text{soit à retrancher } 4 + \frac{3}{7}.$$

La différence des entiers est $9 - 4$, ou 5; celle des fractions est $\frac{5}{6} - \frac{3}{7}$, ou $\frac{17}{42}$; le résultat de la soustraction proposée est donc $5 + \frac{17}{42}$.

Il arrive souvent que la fraction appartenant à l'expression à retrancher est plus grande que celle de l'expression de laquelle on doit soustraire, comme cela a lieu pour retrancher $3 + \frac{5}{7}$ de $9 + \frac{4}{7}$. On emploiera alors un artifice analogue à celui qui a été indiqué (9) pour la soustraction des nombres entiers, et l'on augmentera en même temps d'une unité la fraction du nombre dont on soustrait et l'entier du nombre à soustraire.

Digitized by Google

L'opération se trouve ainsi ramenée à retrancher $4+\frac{5}{7}$ de $9+\frac{4}{7}+\frac{7}{7}$, ou de $9+\frac{11}{7}$, et le résultat est $5+\frac{6}{7}$.

Au moyen des parenthèses dont l'usage a été indiqué plus haut (20), cette soustraction peut se formuler ainsi :

$$\left(9+\frac{4}{7}\right)-\left(3+\frac{5}{7}\right)=5+\frac{6}{7}.$$

On agirait de même s'il fallait retrancher une expression composée d'un entier et d'une fraction d'un simple nombre entier :

$$6-\left(3+\frac{4}{5}\right)=\left(6+\frac{5}{5}\right)-\left(4+\frac{4}{5}\right)=2+\frac{1}{5}.$$

MULTIPLICATION.

31. L'analogie complète qui existe entre l'addition et la soustraction des nombres entiers et celles des fractions n'existe plus pour ce qui concerne la multiplication. On ne peut pas dire, en effet, comme au n° 12, que l'on doit répéter le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, puisque ce dernier est une fraction ; force est donc de recourir à une autre définition qui, pour s'appliquer aux fractions, n'en convienne pas moins à la multiplication des nombres entiers, et que nous n'avons tardé à énoncer que pour ne pas compliquer dès le début l'exposition des principes. Nous dirons maintenant que, en général, la multiplication a pour objet de *chercher un nombre, appelé produit, qui soit composé avec le multiplicande comme le multiplicateur est composé avec l'unité.*

Ainsi, de même que multiplier un nombre par 7, c'est le répéter sept fois, parce que le multiplicateur 7 est la répétition de 7 fois l'unité, nous dirons que multiplier un nombre par $\frac{7}{9}$, c'est prendre les $\frac{7}{9}$, ou sept fois le neuvième de ce nombre, parce que le multiplicateur $\frac{7}{9}$ n'est autre chose que sept fois le neuvième de l'unité. Cette opération se fera donc d'abord en prenant le neuvième du multiplicande, et multipliant ensuite ce neuvième par 7.

Soit, comme exemple, à multiplier 3 par $\frac{7}{9}$; le neuvième de 3 est $\frac{3}{9}$, et sept fois le neuvième de 3 seront exprimés par $\frac{3}{9}\times 7$ ou $\frac{3\times 7}{9}$, d'après le 2° du n° 23.

Si l'on veut multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{7}{9}$, on prendra d'abord le neuvième de $\frac{3}{4}$,

Digitized by Google

ce qui se fera en multipliant le dénominateur par 9, et donnera $\frac{3}{4 \times 9}$; puis on répétera ce neuvième sept fois, en multipliant le numérateur par 7. On aura alors pour produit $\frac{3 \times 7}{4 \times 9}$.

Il résulte de ce qui précède que, *pour multiplier un nombre par une fraction, il faut, si ce nombre est entier, le multiplier par le numérateur de la fraction, et diviser le produit par son dénominateur; si le nombre à multiplier est une fraction, le produit sera une autre fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs du multiplicande et du multiplicateur, et pour dénominateur le produit des dénominateurs.*

32. Cette règle est parfois susceptible d'être modifiée de manière à simplifier les calculs, puisque pour prendre le neuvième, par exemple, d'une fraction, on peut, quand cela est possible, diviser son numérateur par 9, au lieu de multiplier le dénominateur par ce nombre; de même que pour prendre sept fois ce neuvième, on peut, s'il y a lieu, diviser le dénominateur par 7, au lieu de multiplier le numérateur; c'est ce que met en évidence l'opération suivante.

Soit à multiplier $\frac{27}{35}$ par $\frac{7}{9}$. La règle énoncée donnerait pour produit $\frac{27 \times 7}{35 \times 9}$, ou $\frac{189}{315}$.

Mais, si l'on remarque que le neuvième de $\frac{27}{35}$ est $\frac{3}{35}$, et que ce neuvième répété sept fois, ou multiplié par 7, est $\frac{3}{5}$, fraction équivalente à $\frac{189}{315}$, on constatera une fois de plus combien il est avantageux de saisir rapidement la décomposition des nombres en facteurs plus simples, pour mettre à profit toutes les circonstances favorables à l'abréviation des calculs.

33. Il est bon de remarquer que, quand le multiplicateur est une fraction, le produit est nécessairement plus petit que le multiplicande, dont il n'est qu'une partie d'autant plus petite que le multiplicateur est lui-même plus petit.

34. Pour multiplier plusieurs fractions entre elles, on divise le produit des numérateurs par celui des dénominateurs de toutes ces fractions.

Ainsi

$$\frac{4}{9} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{7} \times \frac{11}{15} = \frac{4 \times 5 \times 3 \times 11}{9 \times 6 \times 7 \times 15} = \frac{22}{189}.$$

Ce produit exprime les $\frac{11}{15}$ des $\frac{3}{7}$ des $\frac{5}{6}$ de la fraction $\frac{4}{9}$; nous l'avons

Digitized by Google

simplifié, avant d'effectuer les multiplications indiquées, par la suppression des facteurs 2, 3 et 5, qui existent à la fois au numérateur et au dénominateur.

35. Si l'on avait à multiplier $5+\frac{7}{9}$ par $4+\frac{3}{8}$, on pourrait multiplier séparément chacune des deux parties de la somme multiplicande par chacune des deux parties de la somme multiplicateur, et faire la somme des quatre produits partiels; cette somme serait

$$(5\times 4)+\left(5\times\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{7}{9}\times 4\right)+\left(\frac{7}{9}\times\frac{3}{8}\right)$$
$$=20+\frac{15}{8}+\frac{28}{9}+\frac{21}{72}=25+\frac{20}{72}.$$

Mais il est souvent plus commode de réduire les deux sommes données en nombres fractionnaires, et de ramener cette multiplication à celle de $\frac{52}{9}$ par $\frac{35}{8}$. On aurait ainsi pour produit

$$\frac{52\times 35}{72}=\frac{1820}{72}=25+\frac{20}{72}.$$

36. *Le produit de plusieurs fractions ne change pas, quoiqu'on intervertisse l'ordre des facteurs.* En effet, dans les deux cas, le produit est une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs. Or, chacun de ces produits est indépendant de l'ordre des facteurs qui le composent (15).

Ainsi

$$\frac{5}{7}\times\frac{6}{11}\times\frac{8}{9}=\frac{6\times 8\times 5}{11\times 9\times 7}=\frac{8\times 5\times 6}{9\times 7\times 11}=\frac{240}{693}=\frac{80}{231}.$$

DIVISION.

37. La division des fractions ne peut non plus s'assimiler à celle des nombres entiers, si l'on veut considérer exclusivement cette dernière comme l'abréviation d'une série de soustractions. Mais l'analogie se retrouve dès que l'on regarde la division comme ayant pour objet d'*obtenir un nombre qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende;* nous avons en effet précédemment (17) présenté cette recherche comme exprimant l'un des aspects de la division des nombres entiers, quand il ne doit pas y avoir de reste.

Soit donc à diviser $\frac{7}{11}$ par $\frac{3}{4}$.

Le quotient cherché multiplié par le diviseur $\frac{3}{4}$ doit reproduire le di-

Digitized by Google

vidende $\frac{7}{11}$; ceci revient à dire que les $\frac{3}{4}$ ou trois fois $\frac{1}{4}$ du quotient doivent égaler $\frac{7}{11}$. Mais, puisque trois fois le quart du quotient font $\frac{7}{11}$, le quart du quotient est trois fois moindre que $\frac{7}{11}$, c'est-à-dire équivaut à $\frac{7}{11 \times 3}$, et le quotient lui-même est égal à quatre fois $\frac{7}{11 \times 3}$ ou à $\frac{7 \times 4}{11 \times 3}$.

Il résulte de cette analyse que

$$\frac{7}{11} : \frac{3}{4} = \frac{7 \times 4}{11 \times 3} = \frac{7}{11} \times \frac{4}{3} = \frac{28}{33},$$

et l'on en tire cette règle générale que, *pour diviser deux fractions l'une par l'autre, il faut multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Il est évident qu'il n'y aurait rien à changer à ce qui vient d'être dit, si le dividende était un nombre entier, et qu'il faudrait toujours multiplier cet entier par le diviseur renversé :

$$7 : \frac{3}{4} = 7 \times \frac{4}{3} = \frac{28}{3} = 9 + \frac{1}{3}.$$

38. La division des fractions comporte des simplifications analogues à celles que nous avons indiquées (32) pour la multiplication, simplifications dues à ce que l'on multiplie ou divise une fraction par un entier, aussi bien en divisant le dénominateur ou le numérateur par cet entier, lorsque cela est possible, qu'en multipliant le numérateur ou le dénominateur.

Ainsi, pour diviser $\frac{16}{39}$ par $\frac{8}{13}$, la règle donnerait pour quotient $\frac{16 \times 13}{39 \times 8} = \frac{208}{312}$; mais, d'après l'exposé démonstratif de cette règle, on a été conduit à prendre d'abord le huitième du dividende $\frac{16}{39}$, et ce huitième peut s'obtenir en divisant 16 par 8; on a alors $\frac{2}{39}$, et cette quantité, multipliée par 13, donne $\frac{2}{3}$, résultat égal à $\frac{208}{312}$, mais beaucoup plus simple.

C'est d'ailleurs ici le lieu de généraliser cette remarque et d'indiquer que des simplifications de cette nature se présentent à chaque instant dans le calcul, toutes les fois que l'on a à considérer des fractions dont les deux termes sont des produits de plusieurs nombres entre eux. On

Digitized by Google

peut et l'on doit alors supprimer au numérateur et au dénominateur tous les facteurs communs qui sont en évidence, ou ceux que l'on y découvre facilement.

Ainsi, quelle que soit dans un calcul l'origine de la fraction

$$\frac{36 \times 15 \times 3 \times 28}{24 \times 9 \times 35 \times 4},$$

il est facile de voir que le facteur 36 du numérateur se trouve au dénominateur sous la forme 9×4 ; la fraction devient donc d'abord

$$\frac{15 \times 3 \times 28}{24 \times 35},$$

et, dans cette nouvelle expression, on découvre bientôt que le facteur 35, ou 5×7, du dénominateur a l'un de ses facteurs 5 dans le premier facteur 15 du numérateur, et l'autre 7 dans le dernier 28 ; la suppression de ces facteurs communs conduit à

$$\frac{3 \times 3 \times 4}{24},$$

où l'on trouve au numérateur 3×4, ou 12, et au dénominateur 24, ou 2×12; il reste donc enfin $\frac{3}{2}$ comme quantité équivalente à la fraction primitive qui, sans ces réductions successives, et par l'effet des multiplications indiquées, se fût présentée sous la forme embarrassante de $\frac{45360}{30240}$.

39. Nous avons vu (33) que, quand le multiplicateur d'une multiplication est une fraction, le produit est nécessairement plus petit que le multiplicande ; on comprend dès lors que, dans une division, si le diviseur est une fraction proprement dite, le quotient est toujours supérieur au dividende, et en diffère d'autant plus que le diviseur lui-même est plus petit.

40. Si le dividende et le diviseur, ou seulement le diviseur, étaient composés d'entiers et de fractions, on convertirait chacun d'eux en une seule expression fractionnaire, pour en faire la division suivant la règle ci-dessus :

$$\left(5+\frac{7}{9}\right) : \left(4+\frac{3}{8}\right) = \frac{52}{9} : \frac{35}{8} = \frac{52 \times 8}{9 \times 35} = \frac{416}{315} = 1 + \frac{101}{315};$$

$$5 : \left(4+\frac{3}{8}\right) = 5 : \frac{35}{8} = \frac{5 \times 8}{35} = \frac{40}{35} = 1 + \frac{5}{35} = 1 + \frac{1}{7}.$$

Quand c'est le dividende seul qui contient un entier et une fraction,

Digitized by Google

et que le diviseur est simplement entier ou fractionnaire, cette conversion préalable n'est plus nécessaire, et l'on peut indifféremment l'opérer, ou faire séparément la division des deux parties du dividende par le diviseur :

$$\left(5+\frac{7}{9}\right) : \frac{3}{8} = \frac{40}{3} + \frac{56}{27} = \frac{416}{27}, \quad \text{ou} \quad \left(5+\frac{7}{9}\right) : \frac{3}{8} = \frac{52}{9} : \frac{3}{8} = \frac{416}{27}.$$

41. En terminant ce qui a rapport à la division des fractions, nous remarquerons que nous avons exclusivement employé jusqu'ici le signe : pour indiquer cette opération, avec ou sans l'aide des parenthèses, suivant les cas. Rien n'empêche toutefois que l'on emploie aussi le second signe de division indiqué pour les nombres entiers; mais ici nous devons signaler un inconvénient qu'il est toutefois facile et bien essentiel d'éviter. Nous voulons parler de la nécessité de bien préciser, par un trait plus fort ou autrement, le signe principal de division que l'on pourrait, sans cette précaution, confondre avec l'indice des fractions. Un exemple fera sentir surabondamment la portée de cette observation.

La division de 7 par $\frac{3}{5}$, et celle de $\frac{7}{3}$ par 5 se confondraient l'une avec l'autre, et conduiraient à des erreurs considérables, si l'on écrivait pour l'une comme pour l'autre $\frac{7}{\frac{3}{5}}$; mais, on évitera l'écueil signalé, soit en ayant recours au signe :, soit en distinguant comme ci-après ces deux opérations différentes :

$$\frac{7}{\frac{3}{5}}, \quad \frac{\frac{7}{3}}{5}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{7}{\left(\frac{3}{5}\right)}, \quad \frac{\left(\frac{7}{3}\right)}{5}.$$

NOMBRES DÉCIMAUX.

42. On se rappelle que notre système de numération écrite (4) repose sur cette convention, que les chiffres qui entrent dans l'expression d'un nombre expriment des unités de dix en dix fois plus petites, à mesure que l'on s'avance vers la droite de ce nombre. Si l'on poursuit cette classification au delà des unités, on obtiendra successivement des parties de l'unité de dix en dix fois plus petites, lesquelles, sous une nouvelle forme, représenteront des fractions ayant pour dénominateur 10 ou un certain nombre de facteurs égaux à 10 marqué par le rang du chiffre considéré, depuis celui des unités exclusivement, et que, pour cette raison, on appelle *fractions décimales*. On obtiendra donc ainsi une manière aussi simple que commode d'écrire les fractions décimales sous la forme des nombres entiers, pourvu que l'on ait soin de marquer, par une

Digitized by Google

virgule placée à la droite du chiffre des unités, la partie entière du nombre dont on s'occupe, cette partie entière pouvant d'ailleurs être nulle et représentée par un zéro, s'il s'agit d'une fraction proprement dite, et non d'un *nombre décimal*.

Ainsi l'expression 57,4763 représente un nombre décimal dont la partie entière est 57, et dont la partie décimale se compose de 4 *dixièmes*, 7 dixièmes de dixièmes ou 7 *centièmes*, 6 dixièmes de centièmes ou 6 *millièmes*, 3 dixièmes de millièmes ou 3 dix-millièmes, partie décimale qui peut s'énoncer tout à la fois comme s'il s'agissait de la partie entière, pourvu que l'on indique à la fin le nom du dernier ordre d'unités décimales, en disant 4763 dix-millièmes. Le nombre tout entier s'énoncerait d'ailleurs 57 unités 4763 dix-millièmes, ou encore, la virgule ne servant plus qu'à indiquer le nom du dernier ordre décimal, 574763 dix-millièmes.

On verrait de la même manière que 0,392 représente 392 millièmes,
et que 0,00406 représente 406 cent-millièmes.

Il ne saurait donc, dans aucun cas, se présenter de difficulté, soit pour énoncer un nombre décimal écrit, soit pour écrire un nombre décimal énoncé, puisqu'il suffit toujours de fixer le nom des dernières unités décimales d'après la position de la virgule, ou de placer cette dernière d'après le nom du dernier ordre décimal énoncé.

Enfin, cette nouvelle forme des fractions décimales ne fait pas obstacle à ce qu'elles puissent toujours se mettre sous la forme des fractions ordinaires :

$$57,4763 = \frac{574763}{10000}, \quad 0,392 = \frac{392}{1000}, \quad 0,00406 = \frac{406}{100000}.$$

43. *On multiplie ou l'on divise un nombre décimal par* 10, 100, 1000, ..., *en transportant la virgule de* 1, 2, 3, ..., *rangs vers la droite ou vers la gauche,* puisque, par cette transposition, la valeur relative de chaque chiffre devient 10, 100, 1000,..., fois plus grande ou plus petite.

Nous multiplierons donc 0,4873 par 100, en avançant la virgule de deux rangs vers la droite, et nous écrirons

$$0,4873 \times 100 = 48,73;$$

de même

$$57,348 : 1000 = 0,057348.$$

44. Il est évident qu'un nombre décimal ne change pas de valeur quel que soit le nombre de zéros que l'on place à sa droite, puisque, les différents chiffres ne changeant pas de place par rapport à la virgule, leurs valeurs relatives ne sont pas altérées.

Ainsi

$$47,195 = 47,19500.$$

Digitized by Google

On a quelquefois besoin d'ajouter des zéros à la suite d'un nombre décimal, comme nous le verrons bientôt; cette transformation n'est du reste pas autre chose que celle qui aurait pour but de réduire une fraction ordinaire à un dénominateur donné et multiple du premier; elle permet aussi de réduire, de la manière la plus simple, plusieurs fractions décimales au même dénominateur. puisqu'il suffit d'ajouter à la suite de chacune d'elles autant de zéros qu'il en faut pour que toutes présentent le même nombre de figures décimales.

OPÉRATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX.

ADDITION.

45. L'addition des nombres décimaux s'effectue identiquement comme celle des nombres entiers, puisque la règle exposée (6) s'appuie uniquement sur ce que dix unités de chaque ordre valent une unité de l'ordre immédiatement supérieur, propriété commune aux nombres entiers et aux nombres décimaux. Dans l'application de la règle connue, il suffit de bien placer les unités de même ordre les unes sous les autres, ce qui revient à superposer les virgules :

	471,19
	0,50473
	28,0009
	0,018
Total.....	499,71363

SOUSTRACTION.

46. La soustraction des nombres décimaux se fait encore, et par les mêmes raisons que pour l'addition, suivant la méthode indiquée (9) pour les nombres entiers :

	520,413$\overline{00}$
	49,37256
Différence...	471,04044

Il est entendu que l'opération ne s'explique complétement qu'au moyen des deux zéros que nous avons ajoutés (44) à la droite du plus grand nombre; mais, dans la pratique, on se dispense de les écrire, pourvu que l'on conserve bien scrupuleusement le rang des unités de chaque ordre dans les deux nombres donnés. Dans l'addition, la même remarque a lieu, et l'écriture des zéros serait encore plus superflue que pour la soustraction.

Digitized by Google

MULTIPLICATION.

47. Pour multiplier entre eux deux nombres décimaux, il n'est rien de plus naturel que de les mettre tous deux sous la forme de fractions ordinaires, et d'opérer suivant la règle propre à ce cas (31).

Soit à multiplier 6,41 par 3,187, ou $\frac{641}{100}$ par $\frac{3187}{1000}$; le produit sera exprimé par

$$\frac{641 \times 3187}{100 \times 1000}, \quad \text{ou} \quad \frac{641 \times 3187}{100000}, \quad \text{ou} \quad \frac{2042867}{100000}, \quad \text{ou} \quad 20,42867.$$

On voit que nous avons été très-simplement conduits à multiplier les deux facteurs comme s'ils étaient absolument entiers, et à donner à ce produit, pour dénominateur, l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y en a à la fois dans le multiplicande et le multiplicateur.

De là cette règle générale : *Pour faire le produit de deux nombres décimaux, on multiplie l'un par l'autre les deux nombres, abstraction faite de la virgule; puis on sépare, sur la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.*

Si le produit, obtenu par la multiplication des facteurs en supprimant momentanément les virgules, n'avait pas assez de chiffres pour permettre de placer cette dernière, on y suppléerait sans difficulté (42) par l'introduction à la gauche de ce produit d'un nombre suffisant de zéros pour qu'il puisse y avoir la quantité voulue de décimales :

$$0,00021 \times 0,06 = 0,0000126.$$

48. Les nombres décimaux se multipliant entre eux d'après la règle des fractions ordinaires, il est évident que, comme pour ces dernières, le produit de plusieurs nombres décimaux ne change pas dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.

DIVISION.

49. On pourrait, comme pour la multiplication, rendre raison de la division des nombres décimaux par leur transformation en fractions ordinaires; mais l'exposé suivant a le mérite d'être plus simple et plus facile à retenir.

Le dividende et le diviseur étant d'abord, s'il y a lieu, ramenés à avoir le même nombre de chiffres décimaux (44), *on supprime la virgule dans chacun d'eux, et l'on fait la division comme s'il s'agissait de nombres entiers.* On voit qu'en effet la suppression de la virgule ayant pour objet de multiplier les deux nombres donnés par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux, le dividende et le diviseur ont été multi-

Digitized by Google

pliés par un même nombre, et leur quotient n'a pas été modifié (23). Exemple :

Soit à diviser 497,2 par 19,037; le quotient est le même que celui de 497,200 par 19,037, et le même aussi que celui de 497200 par 19037; cette division donne 26 avec un reste égal à 2238, et le quotient complet est alors $26 + \frac{2238}{19037}$.

De même,

$$\frac{0,0592}{0,025} = \frac{0,0592}{0,0250} = \frac{592}{250} = 2 + \frac{92}{250}.$$

30. Au lieu d'exprimer par une fraction ordinaire la partie complémentaire du quotient d'une division qui donne un reste, on donne très-simplement à ce quotient la forme décimale. Prenons pour exemple la division de 592 par 250, laquelle a donné 2 pour quotient et 92 pour reste; ce reste 92, qu'il faut diviser par 250, se convertit facilement en 920 dixièmes par l'apposition d'un zéro à sa droite, et le quotient de 920 dixièmes par 250 nous donne le nombre 3 de dixièmes qu'il faut ajouter au quotient 2. De même, le reste 170 de cette seconde division, lequel ne peut plus donner de dixièmes au quotient, puisqu'il est plus petit que le diviseur 250, se convertit en 1700 centièmes dont le quotient par 250 est 6 centièmes avec un nouveau reste 200. Ce dernier reste, converti en 2000 millièmes et divisé par 250, donne le quotient partiel exact 8 millièmes, et le quotient total est alors 2,368.

L'opération s'exécute d'ailleurs sous la forme ci-après :

592	250
920	2,368
1700	
2000	
000	

De là la règle générale suivante : *Pour obtenir le quotient d'une division quelconque sous forme décimale, on calcule suivant la règle connue la partie entière de ce quotient, et l'on continue la division en plaçant un zéro à la droite de chacun des restes successifs; on trouve ainsi l'un après l'autre tous les chiffres décimaux du quotient.*

31. Cette règle importante ne diffère d'ailleurs pas de celle qu'il convient d'employer pour convertir une fraction ordinaire en fraction décimale, puisqu'une fraction ordinaire ne représente pas autre chose que le quotient de son numérateur par son dénominateur. Il faut seulement avoir le soin de placer un zéro à la partie entière du quotient, quand il s'agit d'une fraction proprement dite qui ne peut contenir d'unités entières.

Digitized by Google

Proposons-nous, comme exemple, de convertir en décimales la fraction $\frac{7}{125}$.

700	125
750	0,056
00	

Nous placerons un zéro pour partie entière au quotient, puisque le numérateur 7 est moindre que le dénominateur 125; nous mettrons ensuite un zéro à la droite de 7 que nous convertirons ainsi en 70 dixièmes dont le quotient par 125 donne encore zéro pour les dixièmes; plaçant un second zéro à la suite de 70, nous divisons 700 centièmes par 125; le quotient est 5 centièmes avec le reste 75 qui vaut 750 millièmes. Ces 750 millièmes divisés par 125 donnent 6 millièmes sans nouveau reste, et la fraction entière équivaut à 0,056.

52. Nous devons placer ici deux simplifications dont est susceptible, dans certains cas, la division des nombres décimaux.

1°. Examinons la division de 8,659237 par 0,025 dans laquelle c'est le dividende qui a le plus grand nombre de chiffres décimaux. Au lieu de ramener cette division à celle de 8659237 par 25000, comme l'indiquerait la règle ci-dessus, nous multiplierons seulement le dividende et le diviseur par 1000, de manière à rendre entier ce dernier, et nous diviserons ensuite 8659,237 par 25.

8659,237	25
115	346,36946
159	
92	
173	
237	
120	
200	
0	

Il est évident, sans que nous devions y insister, qu'il suffit dans ce cas de prendre soin de placer la virgule au quotient, lorsqu'on a obtenu la partie entière du quotient de 8659 par 25, et de continuer en abaissant successivement les chiffres décimaux du dividende.

2°. Lorsque, dans une division, on a un diviseur qui se termine par un ou plusieurs zéros, et que l'on devrait placer à la droite d'un dividende partiel un chiffre décimal du dividende principal ou un zéro, on simplifie l'opération en supprimant un zéro à la droite du diviseur; cette manière d'opérer n'a évidemment aucune influence sur la partie du quotient qui reste à obtenir, puisqu'il revient évidemment au même, dans une division, de multiplier le dividende ou de diviser le diviseur par 10.

Digitized by Google

Ainsi, quand plus haut (50) nous avons divisé 592 par 250, nous aurions pu opérer comme il suit :

592	250
92	2,368
170	
200	
00	

en barrant le zéro du diviseur au lieu d'en mettre un à la suite de 92. L'opération se continue d'ailleurs ensuite d'après la méthode ordinaire.

53. Nous n'avons présenté jusqu'ici que des divisions de nombres décimaux qui ne donnaient aucun reste; il s'en faut beaucoup qu'il en soit toujours ainsi, et il arrive, au contraire, le plus souvent que la division ne se fait pas exactement, quelque loin qu'on la pousse au moyen des décimales.

Dans les cas même où l'on pourrait parvenir à un quotient exact, on s'arrête quelquefois avant de l'avoir atteint, parce que la nature de la question à laquelle se rapportent les calculs permet de se contenter d'une approximation déterminée.

Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir le quotient de 92 par 7 à moins de 0,01, ce qui veut dire que l'on doit exprimer ce quotient de telle façon que, soit en plus, soit en moins, cette expression diffère de la vraie valeur de moins que 0,01 :

92	7
22	13,142
10	
30	
20	
6	

D'après l'opération développée ci-dessus et arrêtée au reste 2 centièmes, le quotient exact est $13,14 + 0,01 \times \frac{2}{7}$, et la seconde partie $0,01 \times \frac{2}{7}$ est nécessairement plus petite que 0,01, puisque le reste 2 est toujours plus petit que le diviseur 7, et que, par suite, la fraction $\frac{2}{7}$ est forcément moindre que l'unité. On voit donc que, le quotient exact étant plus grand que 13,14 et plus petit que 13,15, chacun de ces deux nombres peut être pris pour la vraie valeur du quotient, à moins de 0,01 près.

La première de ces valeurs est le quotient *par défaut*, l'autre le quotient *par excès*.

Il est même facile d'obtenir le quotient à moins d'un demi-centième, en calculant le chiffre 2 des millièmes. On voit alors, en effet, que le

Digitized by Google

véritable quotient est compris entre 13,14 et 13,145, qui diffèrent entre eux de 0,005 ou d'un demi-centième; par conséquent, 13,14 représente aussi la valeur du quotient cherché, à moins d'un demi-centième.

Si le chiffre des millièmes du quotient eût été plus grand que 5, ce quotient eût été compris entre 13,145 et 13,15, et l'on eût pris ce dernier nombre pour valeur à moins d'un demi-centième.

Enfin, si ce chiffre était 5 lui-même, il paraîtrait indifférent de prendre 13,14 ou 13,15; seulement, comme ce 5 est généralement suivi d'autres chiffres significatifs dans la valeur développée du quotient, on prend alors la valeur approchée par excès, soit 13,15.

Nous ne pousserons pas plus loin cette recherche, et nous nous contenterons de poser cette règle : *Pour obtenir un quotient à moins d'une demi-unité d'un certain ordre décimal, il suffit de pousser le calcul jusqu'au chiffre de l'ordre suivant; si ce dernier chiffre est moindre que* 5, *ceux qui le précèdent forment le quotient; s'il est égal ou supérieur à* 5, *il faut forcer d'une unité le dernier chiffre conservé.*

54. Lorsqu'un quotient décimal ne doit pas se déterminer exactement et sans reste, on est averti de cette circonstance par la réapparition de l'un des restes déjà obtenus une première fois, à partir du point où les dividendes partiels se forment par l'addition d'un zéro à la suite de chacun d'eux. Or, à partir de ce moment, comme chaque reste est toujours plus petit que le diviseur, on retombera nécessairement sur un reste déjà obtenu, après un nombre de divisions partielles au plus égal à ce diviseur; dès lors on verra se reproduire indéfiniment, et sauf la différence dans les ordres des unités, la même série de restes et de quotients successifs.

Le quotient s'appelle, dans ce cas, quotient décimal *périodique;* la série des chiffres qui s'y représentent indéfiniment est dite la *période,* et les chiffres qui précèdent la période forment la *partie non périodique.*

Posons comme exemple la division ci-après de 537 par 13 :

```
537 | 13
 17 | 41,307692 307692 307...
 40
100
 90
120
 30
 40
100
 90
 :
```

Il est clair que, à partir du reste 4 qui se reproduit une seconde fois avec un zéro à sa suite pour former le dividende partiel suivant, les

Digitized by Google

restes successifs reparaîtront dans le même ordre et fourniront au quotient une période composée du groupe 307692, et une partie non périodique représentée par 41 unités.

Quand, comme dans l'exemple précédent, la partie périodique commence immédiatement après la virgule, le quotient est dit *périodique simple;* il est *périodique mixte,* si d'autres chiffres sont intercalés entre la virgule et la première période, comme cela a lieu le plus généralement, et comme on le voit, par exemple, dans le quotient de 537 par 1300, lequel équivaut évidemment à 0,41 307692 307692....

55. Nous allons maintenant donner le moyen de revenir d'un nombre décimal périodique à la fraction ordinaire qui lui est équivalente.

Soit 8,35 769 769..... une expression décimale périodique que, pour abréger, nous désignerons par F.

Transportons la virgule après la partie non périodique en multipliant par 100, puis après la première période en multipliant par 100000; nous aurons

d'une part..... 100 fois F = 835,769 769.....,
d'autre part.... 100000 fois F = 835769,769 769.....;

puis, en retranchant l'un de l'autre les termes correspondants de ces deux égalités,

$$99900 \text{ fois } F = 835\,769 - 835,$$

les parties décimales étant les mêmes et se détruisant.

Il vient enfin

$$1 \text{ fois } F \quad \text{ou} \quad F = \frac{835769 - 835}{99900}.$$

De là cette règle générale : *Tout nombre décimal périodique équivaut à une fraction qui a pour numérateur l'excès de la partie entière que l'on obtient en transportant la virgule après la première période sur celle qui résulte du transport de la virgule après la partie non périodique, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres dans la période, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux non périodiques.*

Appliquée à l'expression périodique simple, 41,307 692 307 692....., ci-dessus trouvée (54), cette règle donne

$$F = \frac{41307692 - 41}{999999} = \frac{41307651}{999999} = \frac{76923 \times 537}{76923 \times 13} = \frac{537}{13}.$$

On trouve de même que

$$0,2373737.... = \frac{237 - 2}{990} = \frac{235}{990} = \frac{47}{198},$$

et que

$$0,981981.... = \frac{981}{999} = \frac{109}{111}.$$

Digitized by Google

EXTRACTION DES RACINES CARRÉES ET CUBIQUES.

CARRÉ ET CUBE.

56. On appelle *puissance* d'un nombre le produit obtenu en multipliant ce nombre plusieurs fois par lui-même, et *racine* d'un nombre un autre nombre qui, élevé à une certaine puissance, reproduit le premier.

La deuxième et la troisième puissance d'un nombre sont ordinairement désignées sous les noms de *carré* et de *cube* de ce nombre; ainsi 49 est le carré de 7, et 64 le cube de 4; inversement, 7 est la *racine carrée* de 49, et 4 la *racine cubique* de 64.

On indique une puissance déterminée d'un nombre au moyen d'un petit nombre placé au-dessus du premier et un peu à droite; ce petit nombre est dit l'*exposant* de la puissance.

35^{17} désigne la 17^{e} puissance de 35,
12^{2} désigne le carré de 12,
et 7^{3} désigne le cube de 7.

La racine d'un degré quelconque d'un nombre se désigne par le signe $\sqrt{\ }$, que l'on nomme *radical*, et entre les branches duquel on place l'*indice* de la racine ou l'exposant de la puissance à laquelle il faudrait élever la racine pour obtenir le nombre donné.

$$9 = \sqrt[4]{6561}, \quad 12 = \sqrt[3]{144}, \quad 4 = \sqrt[3]{64}.$$

Pour la racine carrée, on est convenu de ne pas mettre l'indice et d'écrire simplement

$$12 = \sqrt{144}.$$

57. *Composition du carré de la somme de deux nombres.* — Nous obtiendrons le carré de la somme $35 + 8$ en multipliant cette somme par elle-même, c'est-à-dire en multipliant successivement ses deux parties par chacune de ces mêmes parties, et faisant la somme des quatre produits partiels :

$$\begin{array}{l} 35 + 8 \\ 35 + 8 \\ \hline 35^2 + 8 \times 35 \\ \quad + \qquad 35 \times 8 + 8^2 \\ \hline 35^2 + 2 \text{ fois } 35 \times 8 + 8^2 \end{array}$$

En examinant ce produit, on reconnaît que le carré de la somme de deux nombres se compose : 1° *du carré du premier nombre;* 2° *de deux fois le produit du premier nombre par le second;* 3° *du carré du second nombre.*

Remarque I. — Tout nombre entier plus grand que 10 peut être re-

Digitized by Google

gardé comme la somme de ses dizaines et de ses unités; son carré doit donc se composer : 1° *du carré des dizaines*, lequel exprime un nombre entier de centaines; 2° *de deux fois le produit des dizaines par les unités;* 3° *du carré des unités :*

$$78^2 = (70+8)^2 = 70^2 + 2 \times 70 \times 8 + 8^2 = 4900 + 1120 + 64 = 6084.$$

Remarque II. — La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale au double du plus petit nombre, plus une unité :

$$24^2 = (23+1)^2 = 23^2 + 2 \times 23 + 1.$$

Ce qui établit que la différence entre 24^2 est 23^2 est égale à $2 \times 23 + 1$.

58. *Composition du cube de la somme de deux nombres.* — Pour avoir le cube de $35+8$, dont nous avons formé le carré dans le numéro précédent, il faut multiplier de nouveau ce carré par $35+8$:

$$\begin{array}{l} 35^2 + 2 \text{ fois } 35 \times 8 + 8^2 \\ 35 + 8 \\ \hline 35^3 + 2 \text{ fois } 35^2 \times 8 + 8^2 \times 35 \\ \quad + \qquad 35^2 \times 8 + 2 \text{ fois } 8^2 \times 35 + 8^3 \\ \hline 35^3 + 3 \text{ fois } 35^2 \times 8 + 3 \text{ fois } 8^2 \times 35 + 8^3 \end{array}$$

et l'on reconnaît que le cube de la somme de deux nombres se compose : 1° *du cube du premier nombre;* 2° *de* 3 *fois le carré du premier nombre multiplié par le second;* 3° *de* 3 *fois le premier nombre multiplié par le carré du second;* 4° *du cube du second nombre.*

Remarque I. — Le cube d'un nombre entier plus grand que 10 se compose : 1° *du cube des dizaines*, lequel exprime un nombre entier de mille; 2° *de* 3 *fois le carré des dizaines multiplié par les unités;* 3° *de* 3 *fois les dizaines multipliées par le carré des unités;* 4° *du cube des unités :*

$$\begin{aligned} 78^3 = (70+8)^3 &= 70^3 + 3 \times 70^2 \times 8 + 3 \times 70 \times 8^2 + 8^3 \\ &= 343000 + 117600 + 13440 + 512 = 474552. \end{aligned}$$

Remarque II. — La différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs est égale à 3 *fois le carré du plus petit nombre, plus* 3 *fois le plus petit nombre, plus une unité :*

$$24^3 = (23+1)^3 = 23^3 + 3 \times 23^2 + 3 \times 23 + 1,$$

d'où

$$24^3 - 23^3 = 3 \times 23^2 + 3 \times 23 + 1.$$

59. *Carré ou cube d'un produit. — Le carré ou le cube d'un produit est égal au produit des carrés ou des cubes de ses facteurs.*

En effet,

$$(7 \times 16)^3 = (7 \times 16) \times (7 \times 16) \times (7 \times 16) = 7^3 \times 16^3.$$

Digitized by Google

60. *Racine carrée ou cubique d'un produit.* — Il résulte du numéro précédent que *la racine carrée ou cubique d'un produit de plusieurs carrés ou de plusieurs cubes est égale au produit des racines carrées ou cubiques de ces facteurs.*

Car, puisque

$$7^3 \times 16^3 = (7 \times 16)^3,$$

on a nécessairement

$$\sqrt[3]{7^3 \times 16^3} = 7 \times 16.$$

61. *Carrés et cubes des* 10 *premiers nombres entiers.* — Nous donnons ci-après les carrés et les cubes des 10 premiers nombres entiers.

Nombres..	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Carrés....	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Cubes....	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Les nombres de la première ligne sont les racines carrées de ceux de la seconde, et les racines cubiques de ceux de la troisième ; il suffit donc d'examiner ces trois séries pour reconnaître que la racine carrée d'un nombre plus grand que 100, et la racine cubique d'un nombre plus grand que 1000, sont toutes deux supérieures à 10, et contiennent par conséquent des dizaines.

Ce tableau donne en même temps le moyen de déterminer, à moins d'une unité près, la racine carrée d'un nombre plus petit que 100 et la racine cubique d'un nombre plus petit que 1000, quand ce nombre n'est pas exactement le carré ou le cube d'un nombre entier.

Soit pris pour exemple le nombre 78 ; ce nombre tombe, à la deuxième ligne, entre 64 et 81 ; donc sa racine carrée est comprise entre 8 et 9, qui expriment l'un et l'autre, l'un par défaut et l'autre par excès, la racine carrée de 78 à moins d'une unité près.

Le nombre 78 tombant, à la troisième ligne, entre 64 et 125, sa racine cubique est comprise elle-même entre 4 et 5, et l'on peut prendre l'un de ces deux nombres pour la racine cubique de 78, à moins d'une unité près.

En prenant seulement la racine par défaut, on peut envisager la détermination ou l'extraction de la racine carrée ou cubique d'un nombre qui n'est pas un carré ou un cube parfait comme ayant pour objet de trouver la racine du plus grand carré ou du plus grand cube contenu dans ce nombre. Tel est le but que nous assignerons en général à cette opération dont nous allons indiquer les procédés.

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE ENTIER.

62. Nous venons de voir que cette racine serait immédiatement fournie

Digitized by Google

par le tableau précédent, si le nombre donné était inférieur à 100; nous n'avons donc à nous occuper maintenant que des nombres plus grands que 100 et dont la racine contient par conséquent des dizaines. Proposons-nous d'extraire la racine carrée du nombre 83576, c'est-à-dire de trouver la racine du plus grand carré contenu dans ce nombre. Cette opération repose sur le principe suivant : *On obtient les dizaines de la racine carrée d'un nombre en extrayant la racine carrée des centaines de ce nombre.*

Soit, en effet, 28 la racine du plus grand carré contenu dans les 835 centaines du nombre proposé. Puisque le carré de 28 est contenu dans 835, celui de 280 est aussi contenu dans 83500 et à plus forte raison dans 83576.

D'un autre côté, le carré de 29 étant plus grand que 835, celui de 290 est plus grand que 83500 et aussi que 83576, car ce carré excède 83500 au moins d'une centaine. Le nombre 83576 est donc compris entre le carré de 280 et celui de 290; par conséquent, le nombre des dizaines de sa racine est bien 28.

63. De cette analyse il résulte que, pour avoir le nombre des dizaines de la racine cherchée, il faut déterminer la racine du plus grand carré contenu dans les centaines du nombre donné. Opérant alors sur les 835 centaines comme on l'a fait sur le nombre donné lui-même, on verrait que, 835 étant supérieur à 100, sa racine a des dizaines qui sont données par la racine du plus grand carré contenu dans 8, ou par 2. D'où l'on peut conclure généralement que, *pour obtenir le premier chiffre de la racine, il faut partager le nombre donné en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la tranche de gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre; puis extraire la racine du plus grand carré contenu dans cette dernière tranche.*

Remarque. — Le nombre des tranches indique précisément le nombre des chiffres de la racine.

64. Essayons maintenant de déterminer les chiffres suivants.

Nous avons été conduits à chercher la racine du plus grand carré contenu dans les centaines 835 du nombre donné. Ce nouveau nombre 835 se compose généralement de quatre parties : 1° du carré des dizaines de sa racine ou 20^2, ou 400; 2° du double produit des 2 dizaines de sa racine par le chiffre encore inconnu des unités; 3° du carré de ces unités; 4° enfin d'un reste égal à l'excès de 835 sur le plus grand carré qu'il contient. En retranchant de 835 le carré des dizaines, ou 400, le reste 435 renferme encore les trois autres parties, et en particulier le double produit des 2 dizaines par le chiffre inconnu des unités, lequel produit ne peut évidemment se trouver que dans les 43 dizaines de 435.

Si donc nous divisons les 43 dizaines du reste 435 par le double des

Digitized by Google

dizaines de la racine, le quotient représentera les unités de la racine de 835, ou un chiffre plus fort que ces unités. Ce quotient serait 10, qui est naturellement trop fort, puisque la racine ne peut contenir plus de 2 centaines, ainsi que nous l'avons vu plus haut; essayons 9. Examinons pour cela si 435 contient bien le double produit 360 des dizaines du nombre 29 par ses unités, et le carré 81 des unités; ces deux parties font ensemble 441, donc 9 est un chiffre trop fort. En essayant de même 8, on trouverait 384 au lieu de 441, et l'excès de 435 sur 384 serait 51; par conséquent, le nombre 835 a pour racine carrée 28 et dépasse de 51 le carré de cette racine.

Ainsi la racine de 83576 contient 28 dizaines, et, comme 835 centaines excèdent de 51 centaines le carré de 28 dizaines, le nombre donné 83576 dépasse de 5176 le carré de 28 dizaines; donc 5176 contient encore le double produit des 28 dizaines de la racine totale par le chiffre inconnu des unités, le carré des unités et un reste, si 83576 n'est pas un carré parfait. Or le double produit des dizaines par les unités ne peut se trouver que dans les 517 dizaines de 5176; si donc nous divisons ces 517 dizaines par 2 fois les 28 dizaines ou par 56, nous obtiendrons pour quotient le chiffre des unités de la racine du nombre donné ou un chiffre trop fort. Ce chiffre des unités est 9, et le carré de 289 étant 83521, le nombre 83576 excède de 55 le plus grand carré qu'il contient.

65. En général, *pour extraire la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans un nombre, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre. On extrait la racine du plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche et l'on a le premier chiffre de la racine cherchée. On soustrait de la première tranche le carré du premier chiffre de la racine; à la droite du reste, on abaisse la tranche suivante, et dans le nombre ainsi formé on sépare le premier chiffre à droite; divisant alors la partie de gauche par le double du chiffre obtenu à la racine, on obtient pour quotient le second chiffre de cette racine ou un chiffre trop fort. Pour essayer ce chiffre, on forme les deux dernières parties du carré de la racine et l'on soustrait ces deux parties réunies du nombre formé par le premier reste suivi de la seconde tranche; si la soustraction est possible, le chiffre essayé est exact; sinon, on essaye de la même manière le chiffre inférieur d'une unité, et ainsi de suite jusqu'à ce que la soustraction puisse se faire.*

A la droite de ce nouveau reste, on écrit la tranche suivante, et l'on continue la recherche des chiffres successifs de la racine comme il a été fait pour le second.

Remarque I. — Il existe un moyen simple et commode de faire d'un seul

Digitized by Google

coup les opérations partielles nécessaires pour l'essai d'un chiffre quelconque de la racine et de disposer l'opération générale.

Nombre donné.. 8.3 5.7 6	289	racine cherchée.		
4 3.5	49	48	569	Essais relatifs aux deux
5 1 7.6	9	8	9	derniers chiffres de la
Reste.. 5 5	441	384	5121	racine.

Quand on a obtenu le premier chiffre 2 de la racine, on a retranché de 8 le carré 4 de ce chiffre; puis, abaissant la deuxième tranche du nombre donné, on a eu le nombre 435, dans lequel on a divisé 43 par le double 4 de 2, et le quotient 9 eût fourni le chiffre suivant de la racine, s'il n'eût été reconnu trop fort et abaissé par suite à 8. Or, que l'on essaye 9 ou 8, il faut doubler le chiffre 2 de la racine qui, par rapport à celui que l'on cherche, exprime 2 dizaines; multiplier ce double 40 par les unités cherchées ou par le chiffre à essayer; faire enfin le carré de ce chiffre pour retrancher le tout de 435. Il est alors facile de voir que multiplier 40 par 8, puis 8 par 8, et faire la somme des deux produits, revient à faire du même coup le produit de $40 + 8$ ou 48 par 8. On arrivera donc au but désiré en doublant la partie connue de la racine, plaçant à la suite le chiffre à essayer, et multipliant le nombre résultant par ce dernier chiffre, le produit devant être ensuite retranché de la même manière que dans la division ordinaire des nombres entiers.

Cette observation est générale et s'applique à une phase quelconque de l'opération; c'est ainsi que pour avoir le reste 55, nous avons doublé 28, divisé 517 par 56, et retranché de 5176 le produit de 569 par 9.

Remarque II. — Dans une extraction de racine carrée, un reste quelconque est au plus égal au double de la partie obtenue de la racine.

En effet, si dans l'opération qui précède et dans laquelle nous avons été conduit à extraire la racine carrée 28 du nombre 835, par exemple, nous avions obtenu, au lieu du reste 51, le nombre $28 \times 2 + 1$, ou 57, nous eussions été avertis (57, rem. II) que 835 contenait, outre le carré de 28, le double de 28 plus 1, c'est-à-dire le carré de 29, et le chiffre 8 eût dû être remplacé par 9.

Cette observation s'applique en particulier au reste final de l'opération.

Remarque III. — Lorsque les dizaines de l'un des restes accompagné de la tranche suivante forment un nombre moindre que le double de la partie obtenue de la racine, le quotient est nul et le chiffre correspondant de la racine est un zéro; il faut alors abaisser encore la tranche suivante et continuer, s'il y a lieu, l'opération d'après la méthode ordinaire.

Digitized by Google

Cette circonstance se présente dans l'exemple qui suit :

12.3 0.6 0.8 7	3508	
3 3.0	65	7008
5 6.0 8.7	5	8
2 3	325	56064

Si le chiffre 0 de la racine en était le dernier, le reste de l'opération serait le nombre lui-même qui aurait fourni ce chiffre, comme cela a lieu, par exemple, pour le nombre 2948 dont la racine est 170 avec un reste 248.

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE D'UN NOMBRE ENTIER.

66. Le tableau du n° 61 fournirait sur-le-champ la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre donné, si ce dernier n'avait que 3 chiffres, c'est-à-dire s'il était inférieur à 1000.

Lorsque le nombre donné est supérieur à 1000, sa racine cubique est elle-même supérieure à 10 et contient des dizaines; on a vu (58) que, dans ce cas, le nombre donné contient cinq parties distinctes, savoir : 1° le cube des dizaines; 2° le triple produit du carré des dizaines par les unités; 3° le triple produit des dizaines par le carré des unités; 4° le cube des unités, et enfin 5° un reste qui représente l'excédant du nombre donné sur le plus grand cube exact qu'il renferme.

Par des considérations tout à fait analogues à celles que nous avons exposées (62) pour la racine carrée, nous arriverions aisément à conclure que les dizaines de la racine, qui élevées au cube produisent un certain nombre de mille, ne sont autre chose que la racine du plus grand cube contenu dans les mille du nombre donné, et que, par suite, on doit extraire d'abord la racine cubique dudit nombre donné, abstraction faite des trois chiffres qui le terminent à droite.

Si ce nouveau nombre est lui-même supérieur à 1000, on établira encore de la même façon que l'on doit commencer par extraire la racine du nombre qui représente ses mille, en sorte que, quel que soit le nombre donné, s'il est supérieur à 1000, il faut le partager en tranches de trois chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir que deux ou un seul chiffre; puis, extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans cette première tranche de gauche, pour avoir le premier chiffre de la racine cherchée.

Remarque. — Le nombre des tranches, comme dans la racine carrée, indique le nombre des chiffres de la racine cubique.

Digitized by Google

67. Occupons-nous maintenant de la recherche des chiffres de la racine qui viennent après le premier.

Soit, pour fixer les idées, à extraire la racine cubique de 73.849.264.

Nous venons de voir que la racine cherchée aurait 3 chiffres, et que le premier de ses chiffres serait la racine du plus grand cube contenu dans la première tranche à gauche ou dans 73; ce premier chiffre est donc 4.

En retranchant de 73849, dont nous avons vu qu'il fallait d'abord rechercher la racine cubique, le cube 64000 des dizaines de cette racine, le reste 9849 contient encore les quatre dernières des parties que renferme tout nombre supérieur à 1000 par rapport à sa racine cubique, et en première ligne le triple produit du carré des dizaines par le chiffre inconnu des unités, c'est-à-dire le produit de 48 centaines par le chiffre cherché, lequel produit ne peut se trouver que dans les 98 centaines de 9849. Si donc nous divisons 98 par 48, nous aurons pour quotient le chiffre 2 des unités, c'est-à-dire le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort.

Pour essayer si le chiffre 2 n'est pas trop fort, on peut ou faire le cube 74088 de 42 et tenter de le retrancher de 73849, ou retrancher simplement de 9849, s'il est possible, la somme des trois parties qui doivent encore être contenues dans ce reste, sauf l'excès sur le plus grand cube. On formera donc dans ce but le triple carré 4800 des dizaines; on le multipliera par les unités 2, et l'on aura la première de ces trois parties, ou 9600. La seconde est le produit 480 du triple 120 des dizaines par le carré 4 des unités; enfin, la troisième partie est le cube 8 des unités. Ces trois parties réunies donnent une somme 10088 supérieure à 9849, circonstance qui indique, comme le montrerait également l'essai par le cube complet, que le chiffre 2 est trop fort; il faut donc essayer 1 qui donne une soustraction possible et conduit au reste 4928.

Connaissant ainsi le nombre 41 des dizaines de la racine, nous procéderons, comme ci-dessus, à la recherche des unités, en plaçant à droite du reste 4928 la dernière tranche de trois chiffres, ce qui donne 4928264; puis nous diviserons les 49282 centaines de ce nombre par le triple carré du nombre des dizaines, c'est-à-dire par 5043. Le quotient de cette division est 9, que nous essayerons, et qui sera peut-être trop fort. Pour cet essai, nous formerons, comme précédemment, les trois parties de la racine que doit renfermer 4928264, outre l'excès sur le plus grand cube contenu. La première de ces parties est le produit 4538700 du triple carré 504300 des dizaines par les 9 unités; la seconde est le produit 99630 du triple 1230 des dizaines par le carré 81 des unités; enfin la troisième de ces parties est le cube 729 des unités. La somme 4639059 de ces trois parties est inférieure à 4928264; par conséquent 419 exprime bien la racine du plus grand cube contenu dans le nombre proposé, et l'excès de ce dernier sur le plus grand cube est la différence 289205 entre 4928264 et 4639059; c'est le reste de

Digitized by Google

l'opération, qui se dispose d'ailleurs comme il suit :

Nombre donné....	73.849.264	419	racine.
	64	16	41
	98.49	3	41
	49 21	48	41
	49 282.64		164
	46 390 59		1681
Reste.....	2 892 05		3
			5043

	Essai du chiffre 1.	*Essai du chiffre* 9.
2e partie.....	4800	4538700
3e partie.....	120	99630
4e partie.....	1	729
	4921	4639059

68. Résumons ce qui précède en une règle générale :

Pour extraire la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans un nombre, on partage ce nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir que deux ou même un seul chiffre; on extrait la racine du plus grand cube contenu dans la première tranche à gauche, et l'on a le premier chiffre de la racine cherchée. On soustrait de la première tranche le cube de ce premier chiffre; à la droite du reste on abaisse la tranche suivante et, dans le nombre ainsi formé, on sépare les deux premiers chiffres à droite. Divisant alors la partie de gauche par trois fois le carré du chiffre obtenu à la racine, on obtient pour quotient le second chiffre de cette racine, ou un chiffre trop fort. Pour essayer ce chiffre, on forme les trois dernières parties du cube de la racine, et l'on soustrait ces trois parties réunies du nombre formé par le premier reste suivi de la seconde tranche; si la soustraction est possible, le chiffre essayé est exact; sinon, on essaye de la même manière le chiffre inférieur d'une unité, et ainsi de suite jusqu'à ce que la soustraction puisse se faire.

A la droite de ce nouveau reste, on écrit la tranche suivante, et l'on continue la recherche des chiffres successifs de la racine comme il a été fait pour le second.

Remarque I. — Dans une extraction de racine cubique, un reste quelconque est au plus égal à trois fois le carré de la partie de la racine obtenue, plus trois fois cette partie.

En effet, si dans l'opération qui précède, et dans laquelle nous avons été conduit à extraire la racine cubique 41 du plus grand cube contenu

Digitized by Google

dans 73849, par exemple, nous avions obtenu, au lieu du reste 4928, le nombre $3\times\overline{41}^{2}+3\times41+1$, ou 5167, nous eussions été averti (58, rem. II) que 73849 contenait, outre le cube de 41, celui de $41+1$, ou 42, et le chiffre 1 eût dû être remplacé par 2. Cette observation s'applique en particulier au reste final de l'opération.

Remarque II. — Lorsque les centaines de l'un des restes accompagnés de la tranche suivante forment un nombre moindre que le triple carré de la partie obtenue de la racine, le chiffre suivant de la racine est zéro, et l'on doit abaisser la tranche suivante pour continuer l'opération, s'il y a lieu.

Cette circonstance se présente dans l'extraction de la racine cubique du nombre 28935984, qui donne pour résultat 307 avec un reste 1535.

CARRÉ ET RACINE CARRÉE D'UNE FRACTION ORDINAIRE OU DÉCIMALE.

69. On forme le carré d'une fraction ordinaire en élevant séparément ses deux termes au carré. Ainsi,

$$\left(\frac{13}{29}\right)^{2}=\frac{13}{29}\times\frac{13}{29}=\frac{13^{2}}{29^{2}}.$$

Inversement, on extrait la racine carrée d'une fraction dont les deux termes sont des carrés parfaits, en extrayant la racine de ses deux termes; car

$$\sqrt{\frac{13^{2}}{29^{2}}}=\sqrt{\frac{13}{29}\times\frac{13}{29}}=\frac{13}{29}.$$

Pour élever un nombre décimal au carré, on fait le carré de ce nombre, abstraction faite de la virgule, et l'on sépare au résultat deux fois autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le nombre donné.

Ainsi,

$$(7{,}364)^{2}=7{,}364\times7{,}364=54{,}228496.$$

Inversement, on extrait la racine carrée d'un nombre décimal en extrayant la racine de ce nombre, abstraction faite de la virgule, et séparant, sur la droite du résultat, la moitié du nombre des chiffres décimaux que contient le nombre donné.

En effet,

$$\sqrt{54{,}228496}=\sqrt{7{,}364\times7{,}364}=7{,}364.$$

Remarque. — Tout nombre décimal qui est un carré parfait a un nombre pair de chiffres décimaux.

70. Lorsqu'un nombre décimal n'est pas un carré parfait, ou lorsqu'il est le carré d'un nombre qui aurait plus de chiffres décimaux qu'il n'est nécessaire pour l'approximation réclamée par la question traitée, on se

Digitized by Google

contente ordinairement d'exprimer la racine cherchée à une unité près d'un ordre décimal donné.

Par exemple, le nombre 574289 n'étant pas un carré parfait, la racine du plus grand carré qu'il renferme est 757 avec le reste 1240. Si donc nous voulons extraire la racine carrée de 57,4289, et si nous procédons suivant la règle du numéro précédent, nous trouverons que la racine cherchée est 7,57, sauf le reste 0,1240.

Or 574289 étant compris entre 757^2 et 758^2, le nombre décimal 57,4289 est nécessairement compris lui-même entre $(7,57)^2$ et $(7,58)^2$; donc chacune des deux quantités 7,57 et 7,58 exprime la racine carrée de 57,4289 à moins de 0,01 près, l'une par défaut, et l'autre par excès.

Comme deuxième exemple, considérons le nombre 0,2268712161 qui a pour racine carrée exacte 0,47631. Il est clair que cette même racine peut s'exprimer par 0,476 à moins de 0,001 près, et qu'elle serait ainsi obtenue en réduisant à six le nombre des chiffres décimaux, et extrayant la racine de 0,226871 comme il vient d'être dit.

En général, *pour extraire la racine carrée d'un nombre décimal, à une unité près d'un ordre décimal donné, on rend le nombre des chiffres décimaux du carré double de celui qu'on veut à la racine, soit en négligeant les dernières décimales du nombre donné, soit en en complétant le nombre par des zéros; on extrait la racine carrée du nombre ainsi formé, abstraction faite de la virgule, et on sépare à la droite de la racine le nombre des chiffres décimaux marqué par l'approximation demandée.*

Remarque I. — Cette règle s'applique aussi bien aux nombres entiers qu'aux nombres décimaux, et permet d'obtenir la racine carrée d'un nombre entier à une approximation décimale donnée. Ainsi, à moins de 0,01 près, la racine carrée de 17 est 4,12.

Remarque II. — Si l'on voulait chercher la racine d'un nombre fractionnaire ordinaire, il suffirait de le convertir en nombre décimal par la règle connue (31), et de pousser la division jusqu'à ce que le quotient ait un nombre de chiffres décimaux double de celui que l'on veut à la racine. On extrairait ensuite la racine de ce quotient décimal, comme il a été dit plus haut. Par exemple, à moins de 0,01 près,

$$\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{4,6250} = 2,15.$$

CUBE ET RACINE CUBIQUE D'UNE FRACTION ORDINAIRE OU DÉCIMALE.

71. On forme le cube d'une fraction ordinaire en élevant séparément au cube ses deux termes; ainsi

$$\left(\frac{13}{29}\right)^3 = \frac{13}{29} \times \frac{13}{29} \times \frac{13}{29} = \frac{13^3}{29^3}.$$

Digitized by Google

Inversement, on extrait la racine cubique d'une fraction dont les termes sont des cubes parfaits, en extrayant la racine de ses deux termes; car

$$\sqrt[3]{\frac{13^3}{29^3}} = \sqrt[3]{\frac{13}{29}\times\frac{13}{29}\times\frac{13}{29}} = \frac{13}{29}.$$

Pour élever un nombre décimal au cube, on fait le cube de ce nombre, abstraction faite de la virgule, et l'on sépare au résultat trois fois autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le nombre donné. Ainsi

$$(7{,}36)^3 = 7{,}36\times 7{,}36\times 7{,}36 = 192{,}608256.$$

Inversement, on extrait la racine cubique d'un nombre décimal en extrayant la racine de ce nombre, abstraction faite de la virgule, et séparant, sur la droite du résultat, le tiers du nombre des chiffres décimaux que contient le nombre donné.

En effet,

$$\sqrt[3]{192{,}608256} = \sqrt[3]{7{,}36\times 7{,}36\times 7{,}36} = 7{,}36.$$

Remarque. — Tout nombre décimal qui est un cube parfait a le nombre de ses chiffres décimaux divisible par 3.

72. Par des raisonnements analogues à ceux du n° 70, et que, par cette raison, nous ne déduirons pas ici, il est facile d'étendre à la racine cubique ce que nous avons dit de la racine carrée, et d'établir la règle suivante :

Pour extraire la racine cubique d'un nombre décimal ou fractionnaire ordinaire, à une approximation décimale donnée, il faut ramener, s'il y a lieu, ce nombre à la forme décimale, rendre le nombre des chiffres décimaux du cube égal à trois fois celui qu'on veut à la racine, extraire à moins d'une unité la racine cubique du nombre ainsi formé, abstraction faite de la virgule, et séparer à la droite de la racine le nombre de chiffres décimaux marqué par l'approximation demandée.

Ainsi, à moins de 0,01 près, la racine cubique de 17 est 2,57; celle de 57,00362839 est 3,84, et enfin celle de $\frac{3}{7}$ est 0,75.

SYSTÈME LÉGAL DES POIDS ET MESURES.

73. Les quantités que l'on a le plus ordinairement à mesurer sont les longueurs, les surfaces, les volumes, les poids et les valeurs monétaires. Avant la fin du siècle dernier, on se servait en France d'unités diverses pour le mesurage des mêmes grandeurs; aucun lien uniforme ne rattachait les multiples et les sous-multiples d'une unité à cette unité elle-même, et la confusion la plus complète régnait dans ce système composé de parties tout à fait incohérentes.

Digitized by Google

La réforme apportée dans ce chaos a consisté dans la création d'une unité mère qui a servi à former toutes les autres, et dans l'application de la loi décimale aux multiples et sous-multiples de ces nouvelles unités, par l'apposition des particules *myria*, *kilo*, *hecto*, *déca*, et *déci*, *centi*, *milli*, respectivement correspondantes à *dix mille*, *mille*, *cent*, *dix*, et *dixième*, *centième*, *millième*.

L'unité primordiale est le *mètre*, qui n'est autre chose que la dix-millionième partie du quart d'un méridien terrestre; ainsi prise dans la nature, en dehors de toute attribution spéciale à aucun pays, cette unité est susceptible de se retrouver intacte par le renouvellement de la mesure directe qui l'a fournie, et d'être même adoptée par tous les peuples civilisés dans un but d'uniformité favorable aux transactions internationales.

LONGUEURS.

74. Nous venons de dire que le mètre était l'unité fondamentale du système légal des mesures; il est naturellement l'unité à laquelle se rapportent toutes les longueurs; ses multiples sont :

Le *decamètre*, qui vaut.....	10	mètres.
L'*hectomètre*.....	100	»
Le *kilomètre*.....	1000	»
Et le *myriamètre*.....	10000	»

Chacun de ces multiples s'emploie à des usages spéciaux. Le décamètre est la longueur donnée à une chaîne de 10 mètres dont on se sert pour mesurer des longueurs sur le terrain; les routes et chemins de fer sont ordinairement bornés en hectomètres et kilomètres, et les mesures itinéraires considérables s'évaluent le plus généralement en kilomètres et myriamètres. Enfin, en dehors des termes réguliers de cette série, on parle quelquefois de la *lieue* métrique, qui se compose de 4 kilomètres.

Quant aux sous-multiples, ou parties plus petites que le mètre, ce sont:

	m
Le *décimètre*, qui vaut.....	0,1
Le *centimètre*.....	0,01
Et le *millimètre*.....	0,001

SURFACES.

75. L'unité de surface est le *mètre carré;* c'est un carré dont chaque côté a un mètre de longueur.

Le *décamètre carré* et l'*hectomètre carré* sont rarement usités; mais, quand on veut mesurer la superficie d'un territoire étendu, on se sert du *kilomètre carré*, du *myriamètre carré*, et quelquefois aussi de la *lieue carrée*. Ces multiples sont autant de carrés qui ont respectivement 10, 100, 1000, 10000 ou 4000 mètres de côté.

Digitized by Google

Les sous-multiples du mètre carré sont tous trois généralement employés, et l'on compte par *décimètres, centimètres* et *millimètres carrés*. Il importe de ne pas confondre, comme cela arrive quelquefois, les expressions qui précèdent avec celles de *dixièmes, centièmes* et *millièmes de mètre carré*. Le décimètre carré, par exemple, est un carré qui a pour côté un décimètre; il est contenu cent fois dans le mètre carré : c'est donc le centième du mètre carré; de même le centimètre carré est égal à un dix-millième du mètre carré, et le millimètre carré à un millionième de mètre carré.

On voit d'ailleurs bien clairement que le mètre carré contient 100 décimètres carrés, 10000 centimètres carrés, 1000000 de millimètres carrés, en partageant le côté d'un mètre carré en 10, 10000, 1000000 parties égales; on peut alors faire, sur chacune de ces parties, un carré équivalent à 1 décimètre, à 1 centimètre, à 1 millimètre carré; on a ainsi une tranche de 10 décimètres carrés, ou de 100 centimètres carrés, ou de 1000 millimètres carrés, et cette tranche peut être répétée 10, 100 ou 1000 fois dans la hauteur du mètre carré.

Cette observation s'applique également aux multiples; le kilomètre carré, par exemple, contient mille fois mille ou un million de mètres carrés.

Dans la mesure usuelle des terrains, le mètre carré serait une unité trop petite qui conduirait à exprimer les superficies par des nombres trop considérables et peu commodes; on a pris pour unité spéciale à ce cas le décamètre carré que l'on a nommé *are*, et qui équivaut à 100 mètres carrés.

Les seuls multiples et sous-multiples usités de l'are sont l'*hectare*, qui vaut 100 ares ou 10000 mètres carrés, et le *centiare*, ou centième partie de l'are, qui n'est autre chose que le mètre carré lui-même.

VOLUMES.

76. On nomme *cube* un volume ayant la forme d'une boîte à six faces carrées, ou d'un dé à jouer.

Un mètre cube est un cube dont chaque face a 1 mètre carré de surface, et dont chacune des douze arêtes ou côtés a 1 mètre de longueur.

L'unité de volume est le *mètre cube*. On ne fait guère usage des multiples du mètre cube; tous les sous-multiples, au contraire, sont fréquemment employés. Comme pour les surfaces, il faut avoir bien soin de ne pas confondre les mots *décimètre cube, centimètre cube, millimètre cube*, avec les expressions *dixième, centième* ou *millième de mètre cube*. Il est facile, en effet, de se représenter que le dixième, le centième, le millième de mètre cube contiennent respectivement 100 *décimètres cubes*, 10000 *centimètres cubes*, 1000000 *millimètres cubes*.

Le mètre cube, lorsqu'il est employé à la mesure des bois de chauffage,

Digitized by Google

prend le nom de *stère;* on ne se sert que d'un seul multiple, le *décastère,* et d'un seul sous-multiple, le *décistère.*

Mesures de capacité. — Pour mesurer les liquides, les grains, les corps en poudre, on emploie un vase dont la capacité est égale à 1 décimètre cube; on l'a nommé *litre.* C'est, comme on le voit, la millième partie de 1 mètre cube.

Les multiples et sous-multiples les plus usités du litre sont :

L'*hectolitre*, qui vaut.....	100 litres.
Le *décalitre*.....	10
Le *décilitre*.....	0,1
Le *centilitre*.....	0,01

Pour mesurer les grains, on emploie généralement un vase cylindrique dont la capacité est de 2 décalitres, ou 20 litres.

POIDS.

77. L'unité de poids est le *gramme;* c'est le poids de 1 centimètre cube d'eau distillée, pesée dans le vide et à son maximum de densité, lequel correspond d'une manière constante à 4 dégrés environ au-dessus du zéro du thermomètre centigrade. On voit déjà que, dans ces circonstances, un litre d'eau distillée pèse 1000 grammes ou 1 kilogramme, et que 1 mètre cube pèse 1000 kilogrammes.

Les multiples usités du gramme sont :

Le *décagramme*, qui vaut...	10 grammes.
L'*hectogramme*.....	100
Le *kilogramme*.....	1000

En dehors de la série ordinaire, on emploie : le *quintal métrique,* qui vaut 100 kilogrammes, et le *tonneau,* qui est équivalent au poids de 1000 kilogrammes.

Les sous-multiples sont :

	gr.
Le *décigramme*.....	0,1
Le *centigramme*.....	0,01
Le *milligramme*.....	0,001

MONNAIES.

78. L'unité monétaire est le *franc;* c'est une pièce formée d'un alliage de 9 dixièmes d'argent avec 1 dixième de cuivre : elle pèse 5 grammes.

On n'emploie aucun multiple du franc dans les énonciations de valeurs monétaires; les deux seuls sous-multiples usités sont le *décime* et le *centime,* respectivement égaux à un dixième et un centième de franc.

Les monnaies d'argent sont, dans l'état actuel de la législation y re-

Digitized by Google

lative :

La pièce de 20 centimes, ou $\frac{1}{5}$ franc, qui pèse 1 gramme.

» 50 » ou $\frac{1}{2}$ franc..... 2,5

» 1 franc, qui pèse..... 5

» 2 francs..... 10

» 5..... 25

D'après la loi, la valeur de l'or est, à poids égal, quinze fois et demie celle de l'argent. Les monnaies d'or contiennent, comme celles d'argent, les 9 dixièmes de leur poids en or, et l'autre dixième en cuivre; ce sont :

		gr	
La pièce de	5 francs, qui pèse...	1,613	*Nota.* La pièce de 40 francs ne fait plus partie légale du système monétaire français; celles qui circulent sont des règnes précédents; on n'en fabrique plus de nouvelles.
»	10.....	3,226	
»	20.....	6,452	
»	40.....	12,903	
»	50.....	16,130	
»	100.....	32,260	

Les monnaies de cuivre sont au nombre de quatre : le centime, le double centime, la pièce de cinq centimes et celle de dix centimes ou le décime.

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES.

79. Dans un problème quelconque, on se propose de découvrir une quantité *inconnue* au moyen de relations qui existent entre elle et d'autres quantités *connues*.

Nous ne prétendons pas donner ici des règles générales pour résoudre tous les problèmes que l'arithmétique élémentaire permet d'aborder, et nous nous contenterons d'en analyser un certain nombre de ceux qui nous paraîtront propres à exercer convenablement le lecteur, pour étudier ensuite, d'une manière spéciale, les questions d'intérêt, d'escompte et de société qui figurent explicitement au programme.

PROBLÈME I. — *5 mètres d'étoffe ont coûté 30 francs; combien coûteront 8 mètres de la même étoffe ?*

Pour résoudre cette question, nous dirons :

Puisque 5 mètres ont coûté 30 francs, 1 mètre coûte 5 fois moins, ou $\frac{30}{5}$, ou 6 francs; donc 8 mètres coûteraient 8 fois 6 francs, ou 48 francs.

Par un raisonnement identique, on trouverait que si $4^{kil},30$ d'une cer-

Digitized by Google

taine marchandise ont coûté $17^{fr},75$, chaque kilogramme vaut $\frac{17,75}{4,30}$, et $9^{kil},67$ valent $\frac{17,75}{4,30} \times 9,67$, ou $39^{fr},92$.

Telle est, dans sa plus grande simplicité, le problème connu et désigné sous le nom de *règle de trois*, dans laquelle trois nombres sont donnés et doivent servir à en déterminer un quatrième.

Quand des conditions accessoires viennent apporter de nouveaux éléments dans la question, on dit alors que la règle de trois est *composée;* nous allons donner des exemples de ce genre.

80. Problème II. — *7 ouvriers ont fait en 4 jours 36 mètres cubes de maçonnerie; combien de jours 5 ouvriers mettront-ils pour en faire 59?*

Nous dirons :

puisque

7 ouvriers font 36 mètres cubes en 4 jours,
1 ouvrier fera 36 » en 4×7 »

et

1 ouvrier fera 1 » en $\frac{4 \times 7}{36}$ »

par conséquent,

5 ouvriers feront 1 » en $\frac{4 \times 7}{36 \times 5}$ »

et

5 ouvriers feront 59 » en $\frac{4 \times 7 \times 59}{36 \times 5}$ jours, ou $9^{jours},177$.

On peut déjà généraliser l'esprit de la méthode que nous avons employée pour résoudre ce problème. Cette méthode est dite *de réduction à l'unité;* elle consiste à transformer le fait qui sert de base à la question, de manière à le remplacer d'abord par un autre dans lequel tous les éléments soient représentés par l'unité, sauf celui qui correspond à l'inconnue, pour arriver ensuite au fait incomplet que l'on a en vue de compléter. Ainsi, dans les cinq lignes qui ont fourni la solution précédente, la première représente le fait complet et fondamental de la question; la troisième donne ce même fait réduit à l'unité, sauf en ce qui concerne le nombre cherché de jours; enfin, la dernière est le fait incomplet dans l'énoncé, et qui se trouve ainsi complété par la détermination de l'inconnue.

Le résultat final $\frac{4 \times 7 \times 59}{36 \times 5}$, lequel exprime un nombre de jours, peut se mettre sous la forme $4 \times \frac{7}{5} \times \frac{59}{36}$, dans laquelle les deux fractions $\frac{7}{5}$

Digitized by Google

et $\frac{59}{36}$ ont leurs deux termes pris dans les éléments correspondants des deux faits de la question.

Il importe en outre de remarquer que, dans les questions de ce genre et notamment dans celle qui nous occupe en ce moment, certains éléments, eu égard aux nombres qui les représentent, interviennent pour augmenter, d'autres pour diminuer la valeur de l'inconnue cherchée; cette considération est de la plus grande importance pour servir à placer au numérateur ou au dénominateur de chaque fraction le nombre relatif au fait fondamental ou celui du fait à compléter. Ainsi, dans le problème actuel, nous formerons le nombre inconnu de jours par le nombre 4 du premier fait, multiplié par deux fractions correspondant, l'une aux nombres d'ouvriers employés, l'autre aux nombres des mètres cubes d'ouvrage exécutés. La première des deux fractions sera-t-elle $\frac{7}{5}$ ou $\frac{5}{7}$? Nous dirons alors : Plus est grand le nombre d'ouvriers, moindre est celui des jours de travail; par conséquent, toutes choses égales d'ailleurs, 5 ouvriers mettront plus de jours que 7, et l'influence de cet élément dans le nombre cherché des jours doit tendre à l'augmenter; c'est donc une fraction plus grande que l'unité, ou $\frac{7}{5}$, qu'il faut introduire comme facteur de 4 dans la valeur de l'inconnue. De même, plus est grande la quantité d'ouvrage à faire, plus grand est le nombre de jours nécessaires pour le faire, et 59 mètres cubes demandant, abstraction faite des autres circonstances, plus de jours que 36 mètres cubes, c'est encore par $\frac{59}{36}$ qu'il faudra multiplier les autres facteurs de l'inconnue.

81. On peut donc conclure de ce qui précède une règle générale :

Pour résoudre une règle de trois quelconque, on multiplie la quantité donnée qui est de même nature que l'inconnue, par une suite de fractions dont les deux termes sont pris parmi les quantités de même nature dans les deux faits considérés, ces deux termes étant disposés l'un par rapport à l'autre dans chacune des fractions de manière à former un facteur plus grand ou plus petit que l'unité, suivant que, d'après les chiffres de la question et abstraction faite des autres circonstances, son introduction doit tendre à rendre plus grand ou plus petit le nombre cherché.

Nous allons appliquer, sans entrer dans les détails, cette règle à un nouvel exemple :

PROBLÈME III. — *4 hommes, en travaillant 12 jours et 7 heures par jour, ont creusé un fossé de 20 mètres de longueur sur 6 de largeur et 9 de profondeur. Quelle serait la longueur d'un fossé que 16 hommes, 3 fois plus forts que les premiers, devraient creuser en 35 jours à raison*

Digitized by Google

de $8^{heures},5$ *par jour, ledit fossé devant avoir* 51 *metres de largeur sur* 32 *de profondeur, et ce dernier travail étant* 5 *fois plus difficile que le premier?*

La longueur inconnue sera égale à la longueur connue 20, multipliée par 7 fractions respectivement relatives au nombre des hommes, à leur force, au nombre de jours de travail, à celui des heures employées par jour, à la largeur du fossé, à sa profondeur, et à la difficulté de chaque ouvrage.

Puisqu'il y a un plus grand nombre d'hommes dans le second cas que dans le premier, la longueur tendra à augmenter; donc, pour ce chef, il faudra multiplier la longueur primitive 20 par une fraction plus grande que l'unité, c'est-à-dire par $\frac{16}{4}$.

Puisque les hommes sont trois fois plus forts, ils feront, tout égal d'ailleurs, une longueur plus grande, et la fraction à introduire sera $\frac{3}{1}$.

Puisque ces mêmes ouvriers travaillent pendant un plus grand nombre de jours, la fraction sera $\frac{35}{12}$, puisqu'ils travaillent plus longtemps par jour, on multipliera encore par $\frac{8,5}{7}$.

Le second fossé étant plus large que le premier, les ouvriers en feront une moindre longueur, et c'est ici par la fraction $\frac{6}{51}$, plus petite que l'unité, qu'il faut multiplier. Par la même raison, la profondeur donnera le facteur $\frac{9}{32}$.

Enfin, le second travail étant 5 fois plus difficile que le premier, on en fera 5 fois moins en longueur, et cette condition fournira la fraction proprement dite $\frac{1}{5}$.

En résumé, la longueur inconnue et cherchée sera exprimée par

$$20^m \times \frac{16}{4} \times \frac{3}{1} \times \frac{35}{12} \times \frac{8,5}{7} \times \frac{6}{51} \times \frac{9}{32} \times \frac{1}{5} = 5^m, 625.$$

Remarque. — Avant d'effectuer les calculs indiqués pour trouver la valeur de l'inconnue, il convient de simplifier autant que possible cette expression en supprimant tous les facteurs communs que l'on découvre dans la série des numérateurs et dans celle des dénominateurs.

Cette simplification a donné, dans l'exemple précédent,

$$\frac{5 \times 8,5 \times 27}{51 \times 4}, \quad \text{ou} \quad \frac{11475}{2040}, \quad \text{ou} \quad 5,625.$$

Digitized by Google

QUESTIONS D'INTÉRÊT.

82. On appelle *intérêt* d'une somme prêtée, ou d'un *capital*, le bénéfice qu'il rapporte à celui qui l'a prêté. C'est ordinairement au moyen de sa quotité pour 100 francs et par année que s'exprime l'intérêt; cette quotité est le *taux*, que l'on dit être de 3, 4, 5,..., pour 100, selon que, d'après les conditions du prêt, le capital rapporte par an autant de fois 3, 4, 5,..., francs qu'il contient de fois 100 francs, toute fraction d'année ou de centaine de francs ajoutant d'ailleurs une égale fraction du taux.

Dans les calculs d'intérêt, les années sont comptées pour 12 mois de 30 jours chacun, ou pour 360 jours.

Il y a deux sortes d'intérêts : le *simple* et le *composé*.

On dit que l'intérêt est simple quand le capital reste le même pendant toute la durée du prêt, l'intérêt étant réglé annuellement et payé au prêteur. Quand, au contraire, l'intérêt de chaque année reste entre les mains de l'emprunteur pour augmenter annuellement le capital, l'intérêt est dit composé; on tient compte, en un mot, de l'*intérêt des intérêts*.

Nous examinerons successivement ces deux cas.

INTÉRÊT SIMPLE.

83. Problème IV. — *Quelle somme d'intérêts rapportent* 5600 *francs placés à* 4 *pour* 100 *pendant* 7 *ans?*

Cette question peut s'énoncer ainsi : 100 *francs rapportent* 4 *francs d'intérêt dans un an; combien rapporteront* 5600 *francs pour* 7 *ans?* C'est évidemment là une règle de trois qui peut se résoudre par la méthode générale (81), et l'on trouve pour expression de l'inconnue

$$4^{fr} \times \frac{5600}{100} \times \frac{7}{1} \quad \text{ou} \quad 1568^{fr}.$$

Problème V. — *Que rapporteront* $5637^{fr},43$ *placés à* $4^{fr},58$ *pour* 100 *pendant* 7 *ans* 4 *mois et* 21 *jours?*

Nous tranformerons facilement cet énoncé en celui-ci : 100 *francs rapportent* $4^{fr},58$ *en* 1 *an ou* 360 *jours; combien rapporteront* $5637^{fr},43$ *en* 7 *ans* 4 *mois et* 21 *jours, ou* 2661 *jours*?

La réponse est

$$4^{fr},58 \times \frac{5637^{fr},43}{100} \times \frac{2661}{360} \quad \text{ou} \quad 1878^{fr},57.$$

Problème VI. — *Combien vaudra, après* 3 *ans et* 5 *mois, ou* 41 *mois, le capital* 1853 *francs placé à* 5 *pour* 100?

Traduite sous la forme ordinaire des règles de trois, cette question équivaut à celle-ci : 100 *francs rapportent* 5 *francs après* 1 *an, ou* 12 *mois,*

Digitized by Google

combien rapportent 1853 *francs après* 41 *mois?*

Réponse : $5^{fr} \times \frac{1853}{100} \times \frac{41}{12}$ ou $316^{fr},55.$

Par conséquent, les 1853 francs vaudront, au bout de 3 ans et 5 mois, $1853^{fr} + 316^{fr},55$, ou $2169^{fr},57$.

PROBLÈME VII. — *Combien valent aujourd'hui, à raison de* 5 *pour* 100, $2169^{fr},55$ *qui ne sont payables que dans* 41 *mois?*

Nous dirons ici : 100 francs rapportent 5 francs pour 12 mois, ou $\frac{5^{fr}}{12}$ pour 1 mois, ou $\frac{5^{fr} \times 41}{12}$ pour 41 mois; donc 100 francs vaudront, dans 41 mois, $100^{fr} + 5^{fr} \times \frac{41}{12}$, et la question posée pourra se remplacer par celle-ci : $100^{fr} + 5^{fr} \times \frac{41}{12}$ *se réduisent à* 100 *francs, à combien se réduiront* $2169^{fr},55$?

La réponse est alors

$$100^{fr} \times \frac{2169,55}{100 + \frac{5 \times 41}{12}}, \quad \text{ou} \quad 100 \times \frac{2169,55 \times 12}{1200 + 5 \times 41},$$

$$\text{ou} \quad \frac{2169,55 \times 12}{1405}, \quad \text{ou} \quad 1852^{fr},996, \quad \text{ou} \quad 1853^{fr}.$$

PROBLÈME VIII. — *A quel taux faut-il placer* 1853 *francs pour retirer* $316^{fr},55$ *d'intérêt après* 41 *mois?*

Puisque 1853 francs rapportent $316^{fr},55$ d'intérêt dans 41 mois, combien rapporteront 100 francs dans 12 mois?

Réponse : $316^{fr},55 \times \frac{100}{1853} \times \frac{12}{41}$, ou $4^{fr},9999$, ou 5^{fr}.

Le taux cherché est donc 5 pour 100.

PROBLÈME IX. — *Dans combien de temps le capital* 1853 *francs, placé à* 5 *pour* 100, *aura-t-il rapporté* $316^{fr},55$?

Puisque 100 francs rapportent 5 francs en 1 an, dans quel temps 1853 francs rapporteront-ils $316^{fr},55$?

Réponse : $1^{an} \times \frac{100}{1853} \times \frac{316,55}{5}$, ou $\frac{316,55^{an}}{9265}$, ou $3^{ans},42$,

ou $12^{mois} \times 3,42$, ou 41 mois.

PROBLÈME X. — *A quel taux place-t-on son argent en achetant des rentes* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *au cours de* 92,65?

Dire que les rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100 sont au cours de 92,65, c'est dire que

Digitized by Google

$4^{fr},50$ de rente annuelle se payent $92^{fr},65$; le taux étant toujours la rente annuelle que rapporterait un capital de 100 francs, sa valeur sera fournie par l'expression

$$4^{fr},50 \times \frac{100}{92,65}, \quad \text{ou} \quad 4,86.$$

PROBLÈME XI. — *Combien coûteront* 1500^{fr} *de rentes à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *au cours de* $92^{fr},65$?

Si $4^{fr},50$ de rente annuelle coûtent $92^{fr},65$, combien coûteront 1500 francs de rente?

Réponse : $92^{fr},65 \times \frac{1500}{4,5}$, ou $3083^{fr},33$.

INTÉRÊT COMPOSÉ.

84. PROBLÈME XII. — *Quelle somme d'intérêts rapportent* 5600 *francs à* 4 *pour* 100 (*intérêts composés*) *pendant* 7 *ans?*

Au bout de la première année, chaque centaine de francs rapportant 4 francs, ou chaque franc rapportant $0^{fr},04$, le capital 5600 francs rapportera $5600^{fr} \times 0^{fr},04$ et sera devenu

$$5600^{fr} + 5600^{fr} \times 0^{fr},04, \quad \text{ou} \quad 5600^{fr}(1 + 0^{fr},04), \quad \text{ou} \quad 5600^{fr}(1,04).$$

Au bout de la deuxième année, ce nouveau capital sera devenu de même

$$5600^{fr}(1,04) + 5600^{fr}(1,04)(0,04), \quad \text{ou} \quad 5600^{fr}(1,04)(1 + 0,04),$$
$$\text{ou} \quad 5600^{fr}(1,04)^2.$$

On arrivera ainsi au bout de la septième année, et le capital donné sera devenu

$$5600^{fr}(1,04)^7, \quad \text{ou} \quad 5600^{fr} \times 1,32;$$

il aura donc rapporté

$$5600^{fr} \times 1,32 - 5600^{fr}, \quad \text{ou} \quad 5600^{fr} \times 0,32, \quad \text{ou} \quad 1892^{fr}.$$

Ce qui précède suffit pour établir la règle générale suivante :

Pour obtenir ce que devient un capital placé à intérêts composés, il faut multiplier ce capital par l'unité augmentée de l'intérêt de 1 *franc pendant un an, ce facteur étant en outre élevé à une puissance marquée par le nombre des années durant lesquelles le capital reste placé.*

Nous pouvons voir ici l'influence des intérêts composés en rapprochant le résultat de ce problème de celui du problème IV, dont les données sont les mêmes en intérêts simples. Dans ce dernier cas, en effet, les 5600 francs n'ont rapporté que 1568 francs, tandis qu'ici nous avons obtenu 1792 francs.

La théorie des intérêts composés comporte, comme celle des intérêts

Digitized by Google

simples, une série de problèmes dans lesquels on peut prendre successivement pour inconnue chacun des éléments de la question, savoir : le temps, le taux, le capital placé, le capital produit; mais ces nouveaux problèmes, sauf celui que nous avons examiné et qui est la base de cet ordre d'idées, ne sont accessibles que par l'emploi des procédés algébriques, et ne sauraient trouver place ici : nous ne nous étendrons donc pas davantage sur les intérêts composés.

QUESTIONS D'ESCOMPTE.

85. On nomme *escompte* la retenue qui doit être faite sur le montant d'un billet payable dans un temps plus ou moins long, lorsqu'on veut toucher ce billet avant son échéance.

L'escompte devrait donc rigoureusement être tel, que la somme payée, augmentée de ses intérêts composés pendant le temps qui reste à s'écouler jusqu'à l'échéance, produisît le montant du billet : c'est sur cette base, réduite toutefois à l'intérêt simple, que la plupart des nations étrangères calculent l'escompte; mais en France on est dans l'habitude de retenir comme escompte les intérêts simples que produirait la somme marquée sur le billet depuis le jour du payement jusqu'à l'échéance. Ces deux modes d'opérer sont respectivement distingués par les dénominations significatives d'*escompte en dedans* et d'*escompte en dehors;* nous ne nous occuperons ici que de l'escompte en dehors, le seul usité dans notre pays, et qui doit cette préférence à l'avantage de donner lieu à des calculs beaucoup plus expéditifs.

PROBLÈME XIII. — *Quel escompte retiendra le banquier, au taux de* 5 *pour* 100, *pour payer sur-le-champ un billet de* 1853 *francs exigible dans* 41 *mois ?*

D'après la définition de l'escompte en dehors, il retiendra comme escompte l'intérêt de 1853 francs pendant 41 mois à 5 pour 100, soit $316^{fr},55$ (problème VI).

PROBLÈME XIV. — *A quel taux a été escompté un billet de* 1853 *francs payable dans* 41 *mois, et sur lequel le banquier a retenu* $316^{fr},55$?

Cette question est encore la même que celle-ci : *A quel taux faudrait-il placer* 1853 *francs pour que, dans* 41 *mois, ils aient produit* $316^{fr},55$ *d'intérêt ?*

Réponse : A 5 pour 100 (problème VIII).

PROBLÈME XV. — *A quelle époque était payable un billet de* 1853 *francs qui, au taux de* 5 *pour* 100, *vient d'être payé avec un escompte de* $316^{fr},55$?

En d'autres termes : *Dans combien de temps le capital* 1853 *francs, placé à* 5 *pour* 100, *aura-t-il rapporté* $316^{fr},55$?

Réponse : Dans 41 mois (problème IX).

Digitized by Google

Remarque. — Le problème VII présente le type des questions d'escompte en dedans; il établit, en effet, qu'un billet de $2169^{fr},55$, payable dans 41 mois et escompté en dedans à 5 pour 100, vaudrait aujourd'hui 1853 francs, puisque les 1853 francs, placés aujourd'hui à 5 pour 100, auraient produit, dans 41 mois, $316^{fr},55$ d'intérêts, et vaudraient, par conséquent, $2169^{fr},55$.

QUESTIONS DE SOCIÉTÉ.

86. On donne le nom de *règle de société* à une question qui a pour objet de partager entre plusieurs associés le bénéfice ou la perte résultant de leur association.

Il est d'ailleurs admis que le bénéfice ou la perte de chacun des associés dépend à la fois et de sa mise et du temps pendant lequel cette mise est restée dans la société.

C'est encore par la méthode de réduction à l'unité, employée pour la solution des règles de trois (80), que nous traiterons ces nouvelles questions.

PROBLÈME XVI. — *Les mises de trois associés sont respectivement* 450, 540 *et* 620 *francs; le gain de la société, à un moment donné, est* 1127 *francs. Comment ce gain doit-il être partagé?*

Faisant la somme 1610 francs des trois mises, nous dirons : Puisque

une mise totale de 1610^{fr} a produit un gain total de 1127^{fr},

une mise de 1^{fr} doit rapporter un gain de $\frac{1127^{fr}}{1610}$,

et une mise de 450^{fr} » » $\frac{1127^{fr}}{1610} \times 450^{fr}$, ou 315^{fr};

de même 540^{fr} rapporteront $\frac{1127^{fr}}{1610} \times 540^{fr}$, ou 378^{fr};

et 620^{fr} » $\frac{1127^{fr}}{1610} \times 620^{fr}$, ou 434^{fr}.

Telles seront donc les trois parts dont la somme donne bien le gain total 1127^{fr}.

La règle générale qui convient à cette question est celle-ci : *Multipliez chacune des mises par une fraction qui a pour numérateur le gain total, et pour dénominateur la mise totale.*

87. Il arrive fréquemment que les mises ne restent pas pendant le même temps dans l'association; on ramène ce cas au précédent en calculant et attribuant à chacun des coassociés des mises fictives relatives à un temps unique, et en partant de ce principe que : *une mise quelconque, associée pendant un temps,* 1, 2, 3, ..., *fois plus grand ou plus petit, équivaut à*

Digitized by Google

une mise 1, 2, 3, ..., *fois plus petite ou plus grande, associée pendant le même temps.* Exemple :

PROBLÈME XVII. — *Trois personnes ont placé dans une entreprise, la première* 450 *francs qu'elle a laissés pendant* 1 *an, la seconde* 540 *francs qu'elle a retirés au bout de* 8 *mois, et la troisième* 620 *francs qui ne sont restés que* 15 *mois. L'association se liquidant par une perte de* 1127 *fr., on demande quelle part de cette perte chacune doit supporter.*

Les mises 450, 540 et 620 francs étant restées respectivement 12, 8 et 15 mois dans l'association, elles y ont produit le même effet que des mises de 12×450 francs, 8×540 francs, 15×620 francs qui auraient été unies pendant un seul mois; la question est donc ramenée au cas du problème XVI dans lequel il faut remplacer les mises primitives par 5400, 4320 et 9300 francs, qui forment un apport total de 19020 francs.

Nous aurons ainsi, comme plus haut :

1re part de perte.	$\frac{1127}{19020} \times 5400$ francs,	ou	$319^{fr},97$;
2e part de perte.	$\frac{1127}{19020} \times 4320$ francs,	ou	$255^{fr},97$;
3e part de perte.	$\frac{1127}{19020} \times 9300$ francs,	ou	$551^{fr},06$;
	Perte totale.....		$1127^{fr},00$

88. Quelquefois les mises elles-mêmes ne sont pas connues, et l'on ne possède que leurs valeurs relatives; dans ce cas, qui conduit à un partage identique du bénéfice ou de la perte, tant que les mises satisfont aux conditions de l'énoncé, il suffit de donner à l'une d'elles une valeur quelconque, l'unité par exemple, et de déterminer ensuite les valeurs qui en résultent pour les autres mises.

PROBLÈME XVIII. — *Partager un bénéfice de* 1800 *francs entre quatre associés, sachant que la mise du second n'a été que la moitié de celle du premier; celle du troisième les* $\frac{3}{4}$ *de celle du second, et celle du quatrième les* $\frac{5}{7}$ *de celle du troisième.*

Si le premier a mis 1 franc, le second aura mis $\frac{1^{fr}}{2}$, le troisième $\frac{3}{4} \times \frac{1^{fr}}{2}$, et le quatrième $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{1^{fr}}{2}$. Partant donc de ces quatre mises fictives qui, après réduction, deviennent respectivement 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{15}{56}$, et qui donnent pour sommes $\frac{120}{56}$, ou $\frac{15}{7}$, nous formerons, d'après la règle

Digitized by Google

générale énoncée plus haut, le partage des 1800 francs comme il suit :

$$1^{re}\text{ part. } \frac{1800}{\frac{15}{7}} \times 1^{fr}, \text{ ou } \frac{1800 \times 7}{15}, \text{ ou } 840^{fr};$$

$$2^{e}\text{ part. } \frac{1800}{\frac{15}{7}} \times \frac{1^{fr}}{2}, \text{ ou } \frac{1800 \times 7}{15 \times 2}, \text{ ou } 420^{fr};$$

$$3^{e}\text{ part. } \frac{1800}{\frac{15}{7}} \times \frac{3^{fr}}{8}, \text{ ou } \frac{1800 \times 7 \times 3}{15 \times 8}, \text{ ou } 315^{fr};$$

$$4^{e}\text{ part. } \frac{1800}{\frac{15}{7}} \times \frac{15^{fr}}{56}, \text{ ou } \frac{1800 \times 7 \times 15}{15 \times 56}, \text{ ou } 225^{fr}.$$

Bénéfice total..... 1800^{fr}.

DIFFÉRENCES, RAPPORTS, ÉQUIDIFFÉRENCES ET PROPORTIONS.

89. Quand on compare deux nombres l'un à l'autre, on peut se demander de combien le plus grand dépasse l'autre, ou combien de fois le premier contient le second; dans le premier cas, le résultat de la comparaison est la *différence* des deux nombres; dans le second, on obtient le *rapport* de ces deux nombres, c'est-à-dire le quotient de leur division. Ainsi tout rapport peut être mis sous la forme d'une fraction, de même que toute fraction représente le rapport de son numérateur à son dénominateur.

Il résulte de ces définitions qu'*une différence ne change pas, quand on augmente ou diminue à la fois ses deux termes d'une même quantité*, et qu'*un rapport ne change pas, quand on multiplie ou divise à la fois ses deux termes par une même quantité.*

Ainsi

$$9 - 5 = (9 \pm 3) - (5 \pm 3) = 12 - 8 = 6 - 2 = 4;$$

$$\frac{12}{9} = \frac{13 \times 3}{9 \times 3} = \frac{36}{27} = \frac{12 : 3}{9 : 3} = \frac{4}{3}.$$

L'égalité de deux différences forme une *équidifférence;* celle de deux rapports est une *proportion.*

$9 - 5 = 12 - 8$ est une équidifférence que l'on écrit encore $9.5 : 12.8$;

$\frac{12}{9} = \frac{36}{27}$ est une proportion qui se met aussi sous la forme $12 : 9 :: 36 : 27$.

Toute différence et tout rapport étant composés de deux termes dont le

Digitized by Google

premier est dit *antécédent*, le second *conséquent*, une équidifférence et une proportion sont composées de quatre termes dont le premier et le troisième sont appelés antécédents, le second et le quatrième conséquents. Le premier antécédent et le second conséquent sont aussi désignés sous le nom d'*extrêmes;* le premier conséquent et le deuxième antécédent sous celui de *moyens*.

Sous la seconde forme que nous leur avons donnée, forme surannée et que nous conservons uniquement à cause de l'usage qui en est encore répandu, l'équidifférence et la proportion s'énoncent ainsi : 9 *est à* 5 *comme* 12 *est à* 8; 12 *est à* 9 *comme* 36 *est à* 27.

90. *Dans une équidifférence, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens.*

En effet, si nous ajoutons $8 + 5$ ou 13 aux deux membres de l'équidifférence $9 - 5 = 12 - 8$, elle deviendra

$$9 + 8 = 12 + 5.$$

Réciproquement, *si la somme de deux nombres est égale à celle de deux autres, ces quatre nombres pourront former une équidifférence ayant pour extrêmes les deux parties de l'une des sommes et pour moyens les deux parties de l'autre.*

On tire en effet de $9 + 8 = 12 + 5$, en retranchant $8 + 5$, ou 13, aux deux membres de cette égalité,

$$9 - 5 = 12 - 8.$$

Cette double propriété de l'équidifférence permet évidemment de lui faire subir toute transposition de termes qui n'altérera pas l'égalité de la somme des extrêmes à celle des moyens, et donne naissance à la nouvelle équidifférence

$$8 - 5 = 12 - 9$$

qui découle de la première par la transposition des deux extrêmes.

On pourrait de même obtenir six autres équidifférences avec les quatre nombres 9, 5, 12 et 8; mais chacune d'elles ne serait autre au fond que l'une des deux qui précèdent. Toutefois, à l'aide de la forme indiquée 9.5 : 12.8, on peut présenter aux yeux huit équidifférences qui, nous le répétons, se réduisent à deux essentiellement distinctes.

91. Quand on connaît trois des termes d'une équidifférence, il est facile de calculer le quatrième que l'on représente alors provisoirement par la lettre x.

Si le terme inconnu est l'un des extrêmes, le dernier par exemple, nous écrirons

$$9 - 5 = 12 - x,$$

Digitized by Google

puis de là nous tirerons (90) :

$$9 + x = 12 + 5 = 17.$$

Retranchant alors 9 aux deux membres égaux $9 + x$ et 17, nous obtiendrons $x = 17 - 9 = 8$.

Si c'est l'un des moyens que l'on cherche, on posera

$$9 - x = 12 - 8,$$

puis

$$9 + 8 = 12 + x.$$

Nous retrancherons ensuite 12 aux deux membres, et il viendra

$$x = 9 + 8 - 12 = 17 - 12 = 5.$$

On peut donc dire que, *dans une équidifférence, un extreme inconnu est égal à la somme des moyens diminuée de l'extréme connu*, et qu'*un moyen inconnu est égal à la somme des extrémes diminuée du moyen connu.*

S'il arrivait que les deux moyens fussent égaux, comme dans $9-7=7-5$, l'équidifférence serait dite *continue*, et la relation fondamentale deviendrait

$$9 + 5 = 7 + 7 = 2 \times 7;$$

en divisant par 2 les deux membres égaux, il vient alors

$$7 = \frac{9+5}{2}.$$

Par conséquent, *dans une équidifférence continue, le moyen unique n'est autre chose que la demi-somme des extrémes;* ce moyen unique est désigné spécialement sous le nom de *moyen différentiel*, ou simplement de *moyen* ou *moyenne*, entre les deux extrêmes.

92. *Dans une proportion, le produit des extrémes est égal à celui des moyens.*

En effet, en multipliant les deux membres de la proportion $\frac{12}{9} = \frac{36}{27}$ par 9×27, ou 243, nous trouverons

$$12 \times 27 = 9 \times 36.$$

Réciproquement, *si le produit de deux nombres est égal à celui de deux autres, ces quatre nombres peuvent former une proportion ayant pour extrémes les deux premiers nombres, et pour moyens les deux derniers.*

On tire en effet de $12 \times 27 = 9 \times 36$, en divisant les deux membres de cette égalité par 27×9,

$$\frac{12}{9} = \frac{36}{27}.$$

Digitized by Google

Cette double propriété de la proportion permet évidemment de lui faire subir toute transposition de termes qui n'altérera pas l'égalité du produit des extrêmes à celui des moyens. On obtient ainsi les quatre proportions suivantes :

$$12 : 9 :: 36 : 27,$$
$$27 : 9 :: 36 : 12,$$
$$9 : 12 :: 27 : 36,$$
$$9 : 27 :: 12 : 36.$$

En renversant l'ordre des deux rapports qui composent chacune de ces quatre proportions, on en aurait encore quatre autres qui n'en différeraient que pour les yeux ; il faut de plus remarquer que, bien que les deux dernières proportions aient leurs rapports respectivement composés des mêmes nombres que ceux qui leur correspondent dans les deux premières, elles n'en diffèrent pas moins de celles-ci, par la raison que le rapport $12 : 9$, ou $\frac{12}{9}$, n'est pas le même que le rapport inverse $9 : 12$, ou $\frac{9}{12}$. Il n'en a pas été de même (90) pour les équidifférences, attendu que la différence $9 - 5$, ou 4, est unique, en ce sens que l'arithmétique ne nous apprend pas à attacher à la différence inverse $5 - 9$ une valeur autre que celle de $9 - 5$, ou 4 ; par ce motif, les quatre équidifférences analogues aux quatre proportions ci-dessus sont réduites à deux. L'algèbre nous permettra plus tard d'étendre nos idées sur ce point.

93. Quand on connaît trois des termes d'une proportion, il est facile de calculer le quatrième au moyen de la propriété fondamentale ci-dessus établie (92).

Si le terme inconnu est un extrême, le dernier par exemple, nous écrirons

$$12 : 9 :: 36 : x ;$$

de là nous tirerons

$$12 \times x = 9 \times 36,$$

et en divisant par 12 les deux membres de cette égalité, nous aurons

$$x = \frac{9 \times 36}{12} = 27.$$

Si c'est l'un des moyens que l'on cherche, on aura de même

$$12 : x :: 36 : 27,$$
$$12 \times 27 = 36 \times x,$$

puis

$$x = \frac{12 \times 27}{36} = 9.$$

On voit donc que, *dans une proportion, un extrême inconnu est égal*

Digitized by Google

au produit des deux moyens divisés par l'extrême connu, et un moyen inconnu est égal au produit des deux extrêmes divisé par le moyen connu.

S'il arrivait que les deux moyens fussent égaux, comme cela se présente dans

$$9 : 6 :: 6 : 4,$$

la proportion serait dite *continue*, et la relation fondamentale deviendrait

$$9 \times 4 = 6 \times 6 = 6^2.$$

En extrayant alors la racine carrée des deux membres de cette égalité, on trouve

$$6 = \sqrt{9 \times 4},$$

ce qui prouve que, *dans une proportion continue, le moyen unique n'est autre chose que la racine carrée du produit des extrêmes.* Ce moyen prend la dénomination spéciale de *moyen proportionnel* entre les deux extrêmes.

94. Les proportions sont d'un usage très-fréquent dans la géométrie et, pour ce motif, nous citerons encore quelques-unes de leurs propriétés.

1°. *Une proportion n'est pas troublée quand on y multiplie ou divise un extrême et un moyen par la même quantité; il en est de même quand on élève à la fois ses quatre termes à une même puissance, ou quand on en extrait la racine d'un même degré.*

Ceci ressort avec toute évidence des égalités suivantes :

$$\frac{12}{9} = \frac{36}{27};$$

$$\frac{5 \times 12}{9} = \frac{5 \times 36}{27}, \quad \frac{5 \times 12}{5 \times 9} = \frac{36}{27},$$

$$\frac{12^3}{9^3} = \frac{36^3}{27^3}, \quad \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{27}},$$

dans lesquelles on a, soit multiplié par un même nombre les deux rapports égaux, ou les deux termes d'un même rapport, soit élevé à une même puissance les deux rapports égaux, soit extrait la racine d'un même degré des deux rapports égaux.

2°. *La somme ou la différence des deux premiers termes est à la somme ou à la différence des deux derniers comme le premier antécédent est au deuxième, ou comme le premier conséquent est au deuxième :*

$$\frac{12}{9} \pm 1 = \frac{36}{27} \pm 1,$$

$$\frac{12 \pm 9}{9} = \frac{36 \pm 27}{27},$$

ou enfin,

$$\frac{12 \pm 9}{36 \pm 27} = \frac{9}{27} = \frac{12}{36}.$$

Digitized by Google

En effet, le premier rapport équivaut à $\frac{21}{63}$ ou à $\frac{3}{9}$, comme les deux derniers.

3°. *La somme ou la différence des antécédents est à la somme ou à la différence des conséquents comme un antécédent quelconque est à son conséquent :*

$$\frac{36}{12} = \frac{27}{9}, \quad \frac{36}{12} \pm 1 = \frac{27}{9} \pm 1,$$

$$\frac{36 \pm 12}{12} = \frac{27 \pm 9}{9},$$

ou enfin

$$\frac{36 \pm 12}{27 \pm 9} = \frac{12}{9} = \frac{36}{27}.$$

En effet, le premier rapport équivaut à $\frac{48}{36}$ ou à $\frac{24}{18}$, comme les deux derniers.

4°. *Lorsque deux proportions ont les mêmes antécédents ou les mêmes conséquents, les quatre autres termes forment une proportion.*

Soient

$$\frac{12}{9} = \frac{36}{27}, \quad \frac{12}{7} = \frac{36}{21}.$$

La première proportion donne, par l'interversion des moyens,

$$\frac{12}{36} = \frac{9}{27};$$

la seconde fournit également

$$\frac{12}{36} = \frac{7}{21};$$

et, par suite, les deux rapports $\frac{9}{27}$ et $\frac{7}{21}$, étant égaux à $\frac{12}{36}$, sont égaux entre eux; on a donc

$$\frac{9}{27} = \frac{7}{21},$$

ce qui est facile à vérifier en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens.

5°. *Lorsqu'on multiplie les termes de plusieurs proportions par ordre, les quatre produits sont encore en proportion.*

Soient

$$\frac{12}{9} = \frac{36}{27}, \quad \frac{6}{2} = \frac{15}{5}, \quad \frac{21}{3} = \frac{28}{4}.$$

Nous pouvons évidemment multiplier membre à membre ces trois éga-

Digitized by Google

lités, et les deux produits seront encore égaux ; nous aurons ainsi :

$$\frac{12}{9} \times \frac{6}{2} \times \frac{21}{3} = \frac{36}{27} \times \frac{15}{5} \times \frac{28}{4},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{12 \times 6 \times 21}{9 \times 2 \times 3} = \frac{36 \times 15 \times 28}{27 \times 5 \times 4},$$

ou, après avoir effectué les multiplications indiquées,

$$\frac{1512}{54} = \frac{15120}{540}.$$

93. Nous avons considéré d'abord les rapports isolément, puis groupés deux à deux en proportions ; la propriété qui suit s'applique à un nombre quelconque de rapports égaux.

Dans une suite de rapports égaux, la somme d'un nombre quelconque des antécédents est à la somme des conséquents correspondants, comme un antécédent quelconque est à son conséquent.

Soit

$$\frac{12}{9} = \frac{36}{27} = \frac{20}{15} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3};$$

je dis que

$$\frac{12 + 36 + 20}{9 + 27 + 15} = \frac{4}{3}.$$

En effet, si nous représentons pour un moment par la lettre R la valeur commune de tous ces rapports, nous aurons séparément

$$\frac{12}{9} = R, \quad \text{ou} \quad 12 = 9 \times R;$$

$$\frac{36}{27} = R, \quad \text{ou} \quad 36 = 27 \times R;$$

$$\frac{20}{15} = R, \quad \text{ou} \quad 20 = 15 \times R;$$

en ajoutant membre à membre ces trois égalités, nous trouverons

$$12 + 36 + 20 = 9 \times R + 27 \times R + 15 \times R = (9 + 27 + 15) R;$$

puis, divisant les deux membres par $9 + 27 + 15$, nous aurons

$$\frac{12 + 36 + 20}{9 + 27 + 15} = R = \frac{4}{3};$$

ce que nous voulions démontrer ; et l'on peut vérifier, en faisant les additions indiquées, que le rapport $\frac{68}{51}$ est bien égal à $\frac{4}{3}$.

Digitized by Google

PROGRESSIONS.

96. Lorsqu'une suite de nombres est telle, que, en retranchant de chaque terme celui qui le précède, on obtient une différence constante, cette suite forme une *progression par différence;* si, au lieu de la différence, c'était le rapport d'un terme quelconque au précédent qui fût constant, on aurait une *progression* par rapport ou *par quotient.*

Dans l'un et l'autre cas, la différence constante ou le quotient constant est appelé la *raison* de la progression.

Comme exemple d'une progression par différence, nous présenterons la suite

$$\div 4.7.10.13.16.19.22.25.28,$$

et, pour la progression par quotient,

$$\div\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384.$$

Les points séparés par un trait, qu'on voit en tête des progressions, sont destinés à rappeler que, en énonçant ces progressions, on doit répéter chaque terme, excepté le premier et le dernier, comme ci-après :

4 *est à* 7 *comme* 7 *est à* 10, *comme* 10 *est à* 13, *comme* 13 *est à* 16, ...,

3 *est à* 6 *comme* 6 *est à* 12, *comme* 12 *est à* 24, *comme* 24 *est à* 48, ...

Les deux progressions ci-dessus posées sont *croissantes,* c'est-à-dire que leurs termes vont en augmentant; la raison de la première est 3, celle de la seconde est 2. Il y aurait encore progression, mais progression *décroissante,* si les termes allaient en diminuant; on retrancherait alors chaque terme du précédent pour avoir la raison de la progression par différence; dans la progression par quotient, on diviserait chaque terme par celui qui vient après lui. Telles seraient les deux progressions suivantes, qui ne sont d'ailleurs que les deux premières lues en ordre inverse :

$$\div 28.25.22.19.16.13.10.7.4;$$

$$\div\div 384 : 192 : 92 : 48 : 24 : 12 : 6 : 3.$$

Ainsi qu'on le verra, les propriétés des progressions décroissantes sont absolument les mêmes, sauf quelques changements dans la manière de les énoncer, que celles des progressions croissantes; aussi nous bornerons-nous à parler ici de ces dernières.

97. D'après la définition de la progression par différence, le second terme est égal au premier, plus la raison; le troisième est égal au second, plus la raison, ou au premier, plus deux fois la raison; le quatrième est égal au troisième, plus la raison, ou au premier plus trois fois la raison, et ainsi de suite. En général, *un terme quelconque d'une pro-*

Digitized by Google

gression par différence est égal au premier, plus autant de fois la raison qu'il a de termes avant lui.

Remarque. — Si le premier terme était zéro, tout autre terme de la progression serait égal à autant de fois la raison qu'il y aurait de termes avant lui.

Ce principe important peut recevoir une application immédiate dans la recherche d'un terme quelconque d'une progression par différence, sans passer par les termes qui le précèdent. Supposons, par exemple, qu'on désire connaître quel serait le 53e terme de la progression

$$\div 7.12.17.22.27.32.37.42,\ldots.$$

Puisque ce terme cherché doit être le 53e, il en a 52 avant lui; il est donc égal au premier 7 plus 52 fois la raison 5, ou à $7 + 260$, ou à 267, ce qui serait facile à vérifier.

98. Le même principe sert à lier deux nombres quelconques par une suite de tant d'autres nombres que l'on voudra, de manière que le tout forme une progression par différence; c'est cette opération que l'on désigne sous le nom d'*insertion d'un nombre déterminé de moyens par différence entre deux nombres donnés.*

Soit, en effet, proposé d'insérer 6 moyens par différence entre les nombres 4 et 17. Le problème serait résolu, si nous connaissions la raison de la progression à former. Or, le nombre 17 étant le 8e terme de ladite progression, il est égal au premier 4, plus 7 fois la raison; de cette manière on voit que, si du dernier terme 17 nous ôtons le premier 4, la différence 13 est exactement égale à 7 fois la raison qui, elle-même, est par conséquent égale à $\frac{13}{7}$. Nous pouvons donc maintenant former la progression

$$\div 4.5\frac{6}{7}.7\frac{5}{7}.9\frac{4}{7}.11\frac{3}{7}.13\frac{2}{7}.15\frac{1}{7}.17.$$

Posons cette règle générale : *Pour insérer entre deux nombres donnés autant de moyens par différence que l'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres du plus grand, et diviser le reste par le nombre des moyens augmenté d'une unité; le quotient sera la raison de la nouvelle progression.*

On voit, par cette règle et par les raisonnements qui nous ont servi à l'établir, que l'on peut toujours insérer, entre deux nombre donnés, quelque voisins qu'ils soient, autant de moyens par différence qu'on le voudra. Cette remarque n'est pas sans importance, comme nous ne tarderons pas à le constater.

99. Dans une progression par différence, avons-nous dit (97), un terme

Digitized by Google

quelconque est égal au premier, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui; par le même moyen, on établirait que : *Un terme quelconque est égal au dernier, moins autant de fois la raison qu'il y a de termes après lui.* De là résulte cette conséquence que : *Deux termes à égale distance des extrêmes forment une somme constamment égale à celle de ces mêmes extrêmes.*

Il en découle encore que : *Si l'on ajoute terme à terme une progression par différence avec cette même progression prise dans un ordre inverse, on formera une somme double de celle de tous les termes de la progression, et qui se trouvera composée d'autant de fois la somme des extrêmes que la progression elle-même contient de termes.*

Appliqué à la progression par différence du n° 96, ce principe montre que le double de la somme des termes de cette suite équivaut à 9 fois $(4 + 28)$, ou à 9 fois 32, ou à 288; par suite, la somme simple de ces termes est $\frac{288}{2}$, ou 144, ce qu'il est facile de vérifier.

100. D'après la définition de la progression par quotient, le second terme est égal au premier multiplié par la raison; le troisième est égal au second multiplié par la raison, ou au premier multiplié par le carré de la raison; le quatrième est égal au troisième multiplié par la raison, ou au premier multiplié par le cube de la raison, et ainsi de suite. En général, *un terme quelconque d'une progression par quotient est égal au premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent.*

Remarque. — Si le premier terme était l'unité, tout autre terme de la progression serait égal à une puissance de la raison marquée par le nombre des termes qu'il aurait avant lui.

Au moyen de ce principe, on peut évaluer un terme de rang quelconque d'une progression par quotient, sans passer par les termes intermédiaires. Si l'on demandait, par exemple, quel serait le 47e terme de la progression

$$\div 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : \text{etc.},$$

nous dirions qu'il est égal à 4 multiplié par la 16e puissance de la raison 3, ou à 4 multiplié par 2436721, ou à 9746884, ce qu'il serait d'ailleurs aisé de vérifier.

101. Le même principe permet d'insérer entre deux nombres donnés autant de moyens proportionnels qu'on le désire, en donnant la facilité de calculer la raison de la progression qui doit résulter de cette opération.

Soit proposé d'insérer cinq moyens proportionnels entre les nombres 3 et

Digitized by Google

12288. Le dernier terme 12288 de la progression cherchée se compose du premier multiplié par la 6e puissance de la raison inconnue; par suite, la 6e puissance de la raison est égale au quotient de 12288 par 3, ou à 4096; enfin, la raison elle-même sera égale à la racine 6e de 4096, ou à 4, et la progression pourra se développer comme il suit :

$$\div\ 3 : 12 : 48 : 192 : 768 : 3072 : 12288.$$

La règle à suivre est donc celle-ci : *Pour insérer entre deux nombres donnés autant de moyens proportionnels qu'on le voudra, il faut diviser le plus grand des deux nombres par le plus petit, et extraire du quotient une racine d'un degré marqué par le nombre des moyens à insérer plus un.*

Pareillement, si l'on demandait d'insérer 7 moyens proportionnels entre 3 et 36, nous diviserions 36 par 3, et du quotient 12 nous aurions à extraire la racine huitième. Mais le nombre 12 n'a pas de racine huitième exacte; on ne peut donc pas obtenir exactement en nombres 7 moyens proportionnels entre 3 et 36; mais on peut approcher de cette racine autant qu'on le désire, par une méthode tout à fait analogue à celle que nous avons exposée (70 et 72) pour les racines carrée et cubique, et qu'il serait aussi facile qu'inutile de généraliser. Il suffit, quant à présent, que l'on conçoive qu'il est toujours possible de calculer des nombres qui, multipliés 8 fois par eux-mêmes, approchent de plus en plus de reproduire 12, et qu'il en est de même pour tout autre nombre et pour toute autre racine; nous pourrons, dès lors, conclure que : *Entre deux nombres quelconques, quelque voisins qu'ils soient, on peut toujours insérer autant de moyens proportionnels qu'on le désire, soit exactement, soit avec une approximation aussi grande qu'on le voudra.*

102. De même que nous avons établi (100) que, dans une progression par quotient, un terme quelconque est égal au premier multiplié par une puissance de la raison marquée par le nombre des termes qui le précèdent, nous montrerions que : *Un terme quelconque est égal au dernier divisé par une puissance de la raison marquée par le nombre des termes qui le suivent.* De là cette conséquence que : *Deux termes également éloignés des extrêmes forment un produit constamment égal à celui de ces mêmes extrêmes.*

103. Si, dans la somme des termes d'une progression par quotient, nous multiplions tous les termes par la raison, la nouvelle somme se composera encore des termes de la première, moins le premier et plus un nouveau terme qui ne sera autre que le produit du dernier terme primitif par la raison; l'excès de la somme multipliée par la raison sur la somme elle-même, ou un nombre de fois la somme marqué par la raison moins une

Digitized by Google

unité, sera donc égal à ce nouveau terme moins le premier de la progression.

Il en résulte que : *Pour avoir la somme des termes d'une progression par quotient, il faut multiplier le dernier terme par la raison, retrancher du produit le premier terme, et diviser cette différence par la raison diminuée d'une unité.*

Appliqué à la progression par quotient du n° 96, cette règle nous donnera, pour la somme des termes, $\frac{2 \times 384 - 3}{2 - 1}$, ou $768 - 3$, ou 765, résultat facile à vérifier.

Si la progression était décroissante, il suffirait de la renverser pour pouvoir appliquer à la lettre la règle qui précède; il reviendrait d'ailleurs au même de prendre les deux différences dans le sens contraire à celui qui a été indiqué, ainsi qu'on le verrait en appliquant à ce cas le raisonnement ci-dessus.

LOGARITHMES.

104. Les *logarithmes* sont des nombres qui correspondent à d'autres nombres suivant une loi que nous allons exposer, et au moyen desquels les *multiplications*, *divisions*, *élévations aux puissances* et *extractions de racines* de degrés quelconques à opérer sur ceux-ci, sont respectivement abaissées à des *additions*, *soustractions*, *multiplications* et *divisions* à faire sur les premiers.

On comprend dès à présent de quel immense avantage doit être cette précieuse découverte qui ramène à des calculs simples des opérations toujours laborieuses et souvent même inexécutables par les moyens ordinaires; elle est fondée sur la remarque suivante :

Soient les deux séries de nombres indéfinies et croissantes :

NOMBRES.	LOGARITHMES.
1	0
3	5
9	10
27	15
81	20
243	25
729	30
2187	35
6561	40
19683	45
59049	50
⋮	⋮
⋮	⋮

Digitized by Google

lesquelles représentent, la première une progression par quotient ayant son premier terme égal à l'unité et pour raison un nombre entier quelconque 3, l'autre une progression par différence commençant par zéro et ayant aussi pour raison un autre nombre entier 5 ; il est facile de voir que chaque terme de la première progression est égal à la raison 3 élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent, et que chaque terme de la seconde est égal à la raison 5 répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui. C'est ainsi, par exemple, que le septième terme 729 de la progression par quotient est égal 9^6, et que le terme de même rang 30 de la progression par différence est égal à 6×5.

C'est cette corrélation entre les termes des deux suites qui, comme nous allons le montrer, donne naissance à la propriété fondamentale que nous avons énoncée en tête de ce numéro, et en vertu de laquelle chaque terme de la progression par différence est le logarithme du terme qui lui correspond dans la progression par quotient.

105. Lorsque, dans les deux suites qui précèdent, on fait le produit de deux termes de la progression par quotient et la somme des deux termes correspondants de la progression par différence, ce produit et cette somme font partie des deux progressions et s'y correspondent.

En effet, si l'on multiplie 27 par 729, ou 3^3 par 3^6, le produit $3^3 \times 3^6$, ou 3^{3+6}, ou 3^9, ou 19683 se retrouve nécessairement dans la série des nombres, au même rang que la somme de 15 et 30, ou $3 \times 5 + 6 \times 5$, ou $(3 + 6) \times 5$, ou 9×5, ou 45, dans la série des logarithmes.

Il suit de là que pour avoir le produit 27×729 des deux termes de la première suite, il suffit d'ajouter ensemble les termes correspondants 15 et 30 de la seconde, et de prendre dans la première le terme 19683 correspondant à la somme 45.

Le même raisonnement s'applique identiquement à un nombre quelconque de termes de la progression par quotient, et le principe peut se généraliser dans l'énoncé suivant : *Le logarithme du produit de plusieurs termes de la progression par quotient est égal à la somme des logarithmes de ces termes.*

106. Dans une division exacte, le dividende n'est autre chose que le produit du diviseur par le quotient, et, par suite, le logarithme du dividende est égal à celui du diviseur, plus celui du quotient ; par conséquent, aussi, *le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende, moins celui du diviseur.*

Si donc nous voulions obtenir le quotient de 19683 par 27, nous retrancherions le logarithme 15 du logarithme 45, et le reste 30 serait le logarithme du quotient ; nous trouverions ainsi la valeur 729 de ce dernier.

107. En appliquant le principe du n° 105 à un produit composé de fac-

Digitized by Google

teurs égaux, on le transforme en celui-ci : *Le logarithme d'une puissance quelconque d'un terme de la progression par quotient est égal au logarithme de ce terme multiplié par l'exposant de la puissance.*

Il en résulte que, pour obtenir, par exemple, la cinquième puissance de 9, nous pouvons multiplier par 5 le logarithme 10 de ce nombre, et prendre dans la progression par quotient le terme 59049 qui correspond au produit 50.

108. Inversement, *le logarithme de la racine de degré quelconque d'un terme de la progression par quotient est égal au logarithme de ce terme divisé par l'indice de la racine.*

Ainsi, pour connaître la racine cubique de 19683, il suffira de prendre le tiers 15 du logarithme 45 de ce nombre, et le nombre 27, qui correspond au logarithme 15, est la racine cherchée.

109. Toutefois, l'utilité de ces remarquables propriétés serait contestable, s'il fallait en restreindre l'application aux seuls termes de la progression par quotient que nous avons choisie, ou de toute autre que nous pourrions adopter dans des conditions analogues. Mais si nous concevons qu'on insère successivement (101) un même nombre de moyens proportionnels entre tous les termes consécutifs de la progression par quotient, nous obtiendrons autant de nouvelles progressions, dont l'ensemble n'en formera en réalité qu'une seule, puisqu'elles auront toutes la même raison. Or, quelle que soit la raison primitive, on comprend facilement que le nombre des moyens insérés puisse être suffisamment grand pour que la différence entre deux termes consécutifs quelconques de la nouvelle progression soit aussi faible que l'on voudra. Tous les nombres plus grands que l'unité peuvent, par conséquent, être considérés comme faisant partie d'une telle progression par quotient, et cela avec une approximation aussi voisine qu'on le voudra de l'exactitude. Si donc on a en même temps inséré entre les termes de la progression par différence un égal nombre de moyens différentiels, on aura pareillement formé une nouvelle progression dont tous les termes correspondront à ceux de la série par quotient, et chacun de ces derniers aura ainsi son logarithme.

Cette conclusion fondamentale permet maintenant de généraliser les principes établis dans les nos 105, 106, 107 et 108, et de poser sans aucune restriction les vérités suivantes :

1°. *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

2°. *Le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins celui du diviseur.*

3°. *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit du logarithme de ce nombre par l'exposant de la puissance.*

Digitized by Google

4°. *Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre divisé par l'indice de la racine.*

110. Nous n'avons considéré jusqu'ici, dans la théorie des logarithmes, que des progressions par quotient croissantes et commençant par l'unité, et nous avons cependant implicitement établi que les fractions avaient aussi leurs logarithmes, en disant (109) que le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende diminué de celui du diviseur; l'assimilation complète d'une fraction à un quotient conduit en effet à ce principe :

Le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur diminué de celui du dénominateur.

Rien n'est, au reste, plus facile que d'introduire les fractions, quel que soit leur degré de grandeur entre l'unité et zéro, dans la série par quotient, où l'on peut regarder le terme égal à l'unité comme la séparation entre la période croissante depuis l'unité jusqu'à l'infini, et une période décroissante, suivant la même loi, depuis l'unité jusqu'à zéro; il suffit pour cela de se rappeler que chaque terme de cette progression s'obtient de celui qui le suit en divisant ce dernier par la raison; de telle sorte que, dans le cas qui nous occupe, chaque terme précédant le terme 1 aura pour numérateur l'unité, et pour dénominateur une puissance de la raison marquée par le nombre des termes qui le suivent jusques et y compris le terme 1 lui-même.

Il n'est pas aussi simple d'exprimer les termes de la progression par différence qui correspondent aux termes fractionnaires de la progression par quotient. Toutefois nous remarquerons que, dans cette série par différence, un terme quelconque se tire aussi du suivant en retranchant de celui-ci la raison; le terme qui précédera zéro devra donc s'obtenir en ôtant la raison de zéro. Cette soustraction étant impossible, on est convenu de l'indiquer seulement en faisant précéder du signe — le nombre à retrancher; au moyen de cette notation conventionnelle, qui indique une soustraction à faire et qui a fait donner aux nombres qui en sont affectés la dénomination de *quantités négatives*, par opposition avec les quantités plus grandes que zéro ou *positives*, on peut représenter tous les termes décroissants de la progression par différence à partir de zéro; ces termes sont nécessairement d'autant plus petits que la valeur absolue du nombre qui les exprime est plus grande, et cette valeur absolue est toujours égale à autant de fois la raison que le terme considéré en compte après lui, jusques et y compris le terme o.

Ainsi se trouve complété l'ensemble des deux progressions qui assignent des logarithmes à tous les nombres compris entre zéro et l'infini; en conservant le système arbitrairement choisi dans le n° 104, on arrive à le

Digitized by Google

présenter sous la forme suivante :

⋮	⋮
$\frac{1}{243}$	— 25
$\frac{1}{81}$	— 20
$\frac{1}{27}$	— 15
$\frac{1}{9}$	— 10
$\frac{1}{3}$	— 5
1	0
3	5
9	10
27	15
81	20
243	25
729	30
2187	35
⋮	⋮

On peut alors vérifier, sur cet ensemble complet des deux progressions logarithmiques, les principes ci-dessus posés. C'est ainsi, par exemple, que l'on obtiendra le produit de $\frac{1}{81}$ par 27, en faisant la somme du logarithme — 20 et du logarithme 15, somme qui équivaut à la différence 15 — 20, ou à 15 — 15 — 5, ou à — 5, et en prenant le nombre $\frac{1}{3}$ qui a pour logarithme — 5. De même, la racine 5^{me} de $\frac{1}{243}$ se trouve en divisant par 5 le logarithme — 25 de cette fraction; or soustraire 25 revient à soustraire 5 fois successivement le nombre 5, et par suite le quotient de — 25 par 5 est — 5; donc la racine cherchée est la fraction $\frac{1}{3}$ qui correspond au logarithme — 5.

111. Ce que nous avons dit (109) sur l'insertion de moyens par quotient et par différence entre les termes des deux progressions adoptées, insertion qui a permis de conclure que tous les nombres plus grands que l'unité avaient des logarithmes, s'applique également, sans aucun changement, aux termes qui précèdent 1 et 0 dans les deux séries ; par conséquent, il est établi de la manière la plus générale que, dans un

Digitized by Google

système quelconque de deux progressions analogues à celles ci-dessus considérées, *tous les nombres compris entre zéro et l'infini ont des logarithmes, et les logarithmes des fractions sont toujours négatifs.*

112. D'après tout ce qui précède, on voit que la définition donnée des logarithmes (104) serait pleinement justifiée, si l'on avait sous les yeux une Table contenant d'une part tous les nombres positifs, d'autre part et en regard leurs logarithmes. Mais une pareille Table est, par sa nature même, irréalisable; les propriétés des quantités dont il s'agit fournissent heureusement, comme on le verra bientôt, les moyens d'en restreindre le cadre à des limites usuelles qui comportent seulement les logarithmes des nombres entiers, depuis l'unité jusqu'à une limite plus ou moins éloignée.

De plus, il était nécessaire, pour pouvoir dresser utilement une Table de logarithmes, de faire un choix entre les divers systèmes de progressions que l'on peut adopter. On fixe ordinairement dans ce but la valeur numérique du terme de la progression par quotient qui correspond au terme 1 de la progression par différence, et ce nombre, qui a pour logarithme l'unité, s'appelle alors la *base* du système adopté.

Les logarithmes généralement en usage, et que pour cette raison on appelle *logarithmes vulgaires*, ont pour base 10; ils se déduisent des deux progressions suivantes :

⋮	⋮
0,00001	— 5
0,0001	— 4
0,001	— 3
0,01	— 2
0,1	— 1
1	0
Base. 10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
⋮	⋮

en insérant, entre les termes consécutifs de chacune d'elles, des moyens en quantité suffisante pour faire ressortir dans la première tous les nombres entiers qui, ainsi que nous l'avons déjà annoncé, forment la partie vraiment utile d'une Table de logarithmes.

113. Nous allons voir combien ce système de logarithmes décimaux apporte avec lui de simplifications dans les calculs :

Digitized by Google

1°. *Le logarithme de l'unité suivie d'un nombre quelconque de zéros, n'est autre chose que ce nombre de zéros lui-même ;* en d'autres termes, *le logarithme d'une puissance de* 10 *est égal à l'exposant de cette puissance.*

Ainsi, par exemple, le logarithme de 100000, ou de 10^5, est 5.

De même, *le logarithme de l'unité placée, sans autre chiffre significatif, à un rang décimal quelconque après la virgule, est égal au nombre qui exprime ce rang, ledit nombre pris négativement;* autrement dit, *le logarithme d'une puissance de* 0,1 *est égal négativement à l'exposant de cette puissance.*

Ainsi le logarithme de 0,00001, ou de $(0,1)^5$, est -5.

2°. Suivant qu'un nombre est compris entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, etc., son logarithme tombe entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 2 et 3, etc.

Par conséquent, si l'on évalue les logarithmes en décimales, la partie entière du logarithme d'un nombre (entier ou décimal) plus grand que 1, contiendra autant d'unités, moins une, qu'il y aura de chiffres dans la partie entière de ce nombre.

Ainsi le logarithme de 4,193 aura 0 à sa partie entière, et celle du logarithme de 6794,27 sera 3.

Cette partie entière d'un logarithme s'appelle sa *caractéristique.*

On reconnaît de la même manière que *la caractéristique du logarithme négatif d'un nombre décimal plus petit que* 1 *comporte autant d'unités que ce nombre a de zéros entre le premier chiffre décimal et la virgule.*

Ainsi le logarithme de 0,0457 a pour caractéristique -1; celui de 0,000695 aurait pour caractéristique -3.

3°. Lorsque deux nombres ne diffèrent que par un facteur égal à une puissance de 10, leurs logarithmes (109) ne diffèrent que du logarithme de cette puissance de 10; en d'autres termes, les caractéristiques de ces logarithmes ne diffèrent que d'un nombre d'unités égal à l'exposant de la puissance, et les parties décimales sont identiques.

Ainsi,

$$\log(326 \times 1000) = \log 326 + \log 1000 = \log 326 + 3,$$

$$\log \frac{326}{1000} = \log 326 - \log 1000 = \log 326 - 3.$$

114. Admettons maintenant que l'on ait

$$\log 326 = 2,5132176;$$

en divisant successivement par 10, on aura

$$\log 32,6 = 1,5132176,$$
$$\log 3,26 = 0,5132176,$$
$$\log 0,326 = \bar{1},5132176,$$
$$\log 0,0326 = \bar{2},5132176,$$
$$\log 0,00326 = \bar{3},5132176,$$

Digitized by Google

et ainsi de suite, en faisant toujours porter la soustraction exclusivement sur la caractéristique.

Cette forme nouvelle des logarithmes à caractéristique négative et à partie décimale positive est commode dans les calculs, comme on le verra bientôt; elle a surtout le grand avantage de conserver intacte, au-dessous comme au-dessus de l'unité, la partie décimale des logarithmes des nombres qui ne diffèrent que par un facteur égal à une puissance de 10. Rien n'est d'ailleurs plus facile que de passer de là, s'il en est besoin, au logarithme entièrement négatif équivalent.

En effet, l'expression $\bar{3},5132176$ représente $-3+0,5132176$, ou $0,5132176-3$. Pour effectuer autant que possible cette soustraction, nous décomposerons 3 en deux parties; l'une, équivalente à $0,5132176$, sera détruite; l'autre, égale à l'excès de 3 sur la première, ou à $3-0,5132176$, ou à $2,4867824$, subsistera seule avec le signe $-$. Il y a donc identité de valeur entre les deux quantités $\bar{3},5132176$ et $-2,4867824$, qui toutes deux représentent le logarithme de $0,00326$.

Rapprochées l'une de l'autre, ces deux formes du même logarithme offrent d'ailleurs un lien facile à saisir : leurs parties décimales sont *complémentaires*, c'est-à-dire que leur somme est égale à l'unité; l'une se déduit à vue de l'autre en retranchant de 10 le premier chiffre significatif à droite, puis successivement tous les autres de 9.

Quant aux caractéristiques, celle du logarithme entièrement négatif est toujours et nécessairement moindre que l'autre d'une unité.

USAGE DES TABLES.

115. Les Tables logarithmiques sont peu nombreuses, et présentent à peu près toutes la même disposition générale; elles ne diffèrent essentiellement que par leur étendue dans l'échelle des nombres, et par l'approximation plus ou moins grande avec laquelle sont donnés les logarithmes.

Il est d'usage de n'employer dans les calculs que les logarithmes à sept décimales que l'on trouve soit dans les petites Tables de de Lalande qui s'étendent jusqu'à 10000, soit dans celles de Callet qui vont jusqu'à 108000.

Quelle que soit celle de ces deux Tables que l'on adopte, on y remarque, outre la colonne des nombres et celle des logarithmes, une autre colonne renfermant toutes calculées les *différences* entre les logarithmes des nombres entiers consécutifs. Ces différences jouent un rôle très-important dans les calculs logarithmiques; elles vont en diminuant à mesure qu'elles s'appliquent à des nombres plus élevés; et, en même temps qu'elles convergent vers zéro, elles tendent à devenir *proportionnelles* aux différences correspondantes entre les nombres; c'est cette proportionnalité, admise comme rigoureuse dans la partie la plus élevée de la Table dont on dispose,

Digitized by Google

qui sert à passer, avec une approximation bien suffisante, des quantités contenues dans la Table aux quantités intermédiaires.

Ceci bien établi, nous allons résoudre successivement les deux problèmes fondamentaux du calcul par logarithmes, et nous supposerons d'abord que nous n'ayons en mains que les Tables de de Lalande étendues à 7 décimales par Marie.

116. PROBLÈME I. — *Un nombre étant donné, trouver son logarithme.*

Premier cas. — Si le nombre donné est entier et moindre que 10000, on le cherchera à son rang naturel dans la colonne des nombres, et son logarithme se trouvera à sa droite dans la colonne des logarithmes.

Deuxième cas. — Si le nombre donné est entier et plus grand que 10000, on ramènera toujours la question à déterminer le logarithme d'un nombre compris entre 1000 et 10000, comme nous allons l'indiquer.

Soit, par exemple, à calculer le logarithme de 439857.

Ce nombre ayant 6 chiffres, nous savons d'abord que son logarithme a pour caractéristique 5. Maintenant le même nombre est égal à $4398{,}57 \times 100$, et son logarithme ne diffère (113) que de deux unités de celui de 4398,57, que nous allons par conséquent chercher.

Cela posé, 4398,57 étant compris entre 4398 et 4399, son logarithme tombe entre les logarithmes tabulaires 3,6432552 et 3,6433540 de ces deux nombres. Quant à la quantité dont il faut augmenter le plus petit de ces deux logarithmes pour avoir celui de 4398,57, elle se calculera par la proportion indiquée n° 115 entre les accroissements des nombres et ceux des logarithmes.

Or la Table indique que la différence entre les deux logarithmes de 4398 et 4399 est 988 unités du 7^{me} ordre décimal; si donc nous désignons momentanément par x la quantité cherchée, nous aurons à poser la proportion

$$1 : 0{,}57 :: 988 : x,$$

qui exprime que l'accroissement 1 du nombre 4398 est à l'accroissement 0,57 du même nombre comme l'accroissement 988 du logarithme de ce nombre est à l'accroissement x cherché, et qui donne $x = 563$ unités décimales du 7^{me} ordre.

Le logarithme de 4398,57 est donc $3{,}6432552 + 0{,}0000563$, ou 3,6433115; celui de 439857 est par conséquent 5,6433115.

Ainsi l'on trouvera le logarithme d'un nombre entier quelconque plus grand que 10000, *en séparant quatre chiffres sur sa gauche par une virgule, cherchant le logarithme du nombre décimal, moindre que* 10000, *ainsi obtenu, et assignant ensuite la caractérisque qui convient au nombre donné.*

Dans la pratique, on se dispense de poser la proportion des accroissements, se souvenant qu'elle conduit à multiplier invariablement la différence tabulaire par l'accroissement décimal du nombre inférieur.

Digitized by Google

Troisième cas. — Si le nombre donné est décimal, on le ramène, par un déplacement convenable de la virgule, à n'avoir que quatre chiffres à sa partie entière, et l'on opère absolument comme il vient d'être exposé dans le cas précédent.

On trouve ainsi que

$$\log 43{,}9857 = 1{,}6433115,$$
$$\log 0{,}0043\,9857 = \bar{3}{,}6433115.$$

Quatrième cas. — *Si le nombre donné est fractionnaire*, il faut, comme nous l'avons vu, retrancher le logarithme du dénominateur de celui du numérateur.

Exemple :

$$\log \frac{1457}{326} = \log 1457 - \log 326 = 3{,}1634596 - 2{,}5132176 = 0{,}6502420.$$

S'il s'agissait d'une fraction proprement dite, le logarithme cherché serait nécessairement négatif :

$$\log \frac{27}{301} = \log 27 - \log 301 = 1{,}4313\,6376 - 2{,}4785\,6650 = -1{,}0472\,0274.$$

Ce logarithme, entièrement négatif, serait du reste facilement converti en logarithme à caractéristique seule négative par le procédé qui termine le n° 114 et dont l'application donnerait sur-le-champ

$$\log \frac{27}{301} = -1{,}0472\,0274 = \bar{2}{,}9527\,9726.$$

On aurait aussi pu l'obtenir directement sous cette dernière forme, en retranchant 2,4785\,6650 de 1,4313\,6376 sans faire attention à la grandeur relative de ces deux logarithmes, et n'appliquant le signe — qu'à la différence des deux caractéristiques, qui seules mettent en évidence l'impossibilité de la soustraction.

117. Problème II. — *Un logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il appartient.*

Premier cas. — *Si le logarithme donné est positif*, il correspond à un nombre plus grand que l'unité, et sa caractéristique, augmentée de 1, indique combien de chiffres a la partie entière du nombre cherché.

Cela posé, si la caractéristique du nombre donné est 3, le nombre correspondant est compris entre 1000 et 10000; on cherche ce logarithme dans la deuxième colonne de la Table, et, s'il s'y trouve exactement, le nombre que l'on veut obtenir se trouve en regard dans la première colonne.

Si ce logarithme ne se trouve pas exactement dans la Table, il tombe entre deux autres dont le plus petit correspond au nombre qui exprime la partie entière de celui que l'on cherche. Quant à la partie décimale de

Digitized by Google

ce nombre, elle s'obtient par la proportion posée dans le problème précédent.

Soit, par exemple, à chercher à quel nombre appartient le logarithme 3,6433115.

Nous voyons, dans la Table, que ce logarithme tombe entre 3,6432552 et 3,6433540, qui correspondent respectivement à 4398 et à 4399, et nous concluons déjà que la partie entière du nombre cherché est 4398.

Pour obtenir la partie décimale, nous prenons dans la Table la différence 0,0000988 entre les deux logarithmes ci-dessus, et, considérant que la différence entre le logarithme de 4898 et le logarithme donné est 0,0000563, nous posons la proportion

$$0{,}0000988 : 0{,}0000563 :: 1 : x,$$

ou

$$988 : 563 :: 1 : x;$$

d'où

$$x = \frac{563}{988} = 0{,}5698, \quad \text{ou} \quad 0{,}57.$$

Le nombre cherché est par conséquent 4398,57.

Comme pour le problème I, on ne pose pas cette proportion dans les calculs, et l'on se borne à diviser par la différence tabulaire l'excès du logarithme donné sur le plus petit des deux qui le comprennent.

Quand la caractéristique du logarithme donné n'est pas 3, on la suppose momentanément égale à ce chiffre, et l'on opère comme il vient d'être dit; on place ensuite, dans le nombre trouvé, la virgule au rang que lui assigne la caractéristique primitive.

C'est ainsi qu'on trouverait que le logarithme 0,6433115 correspond à 4,39857, et le logarithme 5,6433115 au nombre 439857.

Deuxième cas. — Supposons maintenant *que le logarithme donné soit négatif.*

1°. *S'il est entièrement négatif,* on lui ajoute autant d'unités qu'il en faut pour que le résultat soit entièrement positif et ait pour caractéristique 3, ce qui revient à ajouter quatre unités de plus qu'il y en a dans la caractéristique primitive. On cherche alors, par la méthode précédente, le nombre qui correspond au logarithme ainsi transformé, puis on reporte la virgule d'autant de rangs vers la gauche qu'on a ajouté d'unités au logarithme.

Soit, par exemple, à déterminer le nombre correspondant au logarithme $-2{,}3566885$.

Ajoutant six unités à ce logarithme, nous obtenons 3,6433115; or, ce dernier nombre étant le logarithme de 4398,57, comme on vient de le voir dans le premier cas, le nombre cherché sera 0,00439857.

2°. *Si la caractéristique seule est négative,* on lui ajoute assez d'unités pour qu'elle devienne positive et égale à 3; on opère comme ci-dessus,

Digitized by Google

et l'on reporte la virgule vers la gauche d'autant de rangs qu'on a ajouté d'unités.

Soit, en effet, le logarithme $\bar{2},6433115$; si nous ajoutons cinq unités à sa caractéristique, elle deviendra 3, et le nombre 3,6433115 ainsi obtenu étant le logarithme de 4398,57, nous aurons à reporter la virgule de cinq rangs vers la gauche, pour avoir le nombre 0,043985 7 auquel correspond le logarithme donné.

118. De l'ensemble des règles qui précèdent, il résulte que, soit qu'il s'agisse de trouver le logarithme d'un nombre, soit qu'on cherche à quel nombre appartient un logarithme, on ramène toujours, au moyen de changements opérés sur la place de la virgule ou sur la caractéristique, les calculs à se faire dans la période la plus élevée de la Table, celle qui s'étend de 1000 à 10000; cette prescription est fondée sur les deux propriétés que nous avons énoncées (115) relativement aux différences, savoir : que d'une part les différences entre les logarithmes sont d'autant moindres, que d'autre part la proportion employée est d'autant plus près d'être rigoureusement vraie qu'on opère sur des nombres plus grands. Les calculs y gagnent, comme on le voit, tant sous le rapport de la facilité que sous celui de l'exactitude, et, à ce double point de vue, les Tables de logarithmes sont d'autant plus avantageuses, en général, qu'elles s'arrêtent à une limite plus éloignée.

119. Quelques mots suffiront maintenant pour indiquer l'usage des Tables de Callet qui sont généralement adoptées et répandues; elles diffèrent de celles de de Lalande, outre quelques dispositions de détail que la seule inspection fait apercevoir, en ce que : 1° elles s'étendent jusqu'à 108000, en sorte que c'est entre 10000 et 100000 que se développe la période dans laquelle il convient de ramener les nombres et les logarithmes; 2° toutes les caractéristiques des logarithmes sont supprimées à cause des règles précises et simples qui ne laissent jamais d'incertitude sur ce point; 3° la portion de la partie décimale qui se reproduit dans plusieurs logarithmes successifs n'est écrite qu'une seule fois pour tous en tête du premier; 4° les logarithmes des dix nombres de chaque dizaine sont écrits sur la même ligne horizontale dans dix colonnes respectivement correspondantes aux dix chiffres qui représentent les unités, le nombre qui exprime les dizaines étant seul écrit dans la colonne intitulée N; 5° ces Tables contiennent, dans une dernière colonne intitulée *diff.*, non-seulement les différences entre les logarithmes consécutifs, mais encore les parties de ces différences, c'est-à-dire leurs produits successifs par 0,1, par 0,2, par 0,3, etc., jusqu'à 0,9. Cette dernière disposition offre, on le voit, l'avantage précieux de donner tout calculés les résultats des multiplications et divisions auxquelles conduisent les opérations relatives à des logarithmes non compris dans les Tables.

Digitized by Google

L'emploi des Tables de Callet ne présentera plus d'ailleurs aucune difficulté, quand nous aurons développé les deux exemples suivants :

1°. *Calculer le logarithme de* 43985698.

Ce nombre ayant huit chiffres entiers, la caractéristique de son logarithme sera 7.

Pour trouver la partie décimale, nous chercherons celle du nombre de cinq chiffres entiers 43985,698, laquelle est la même que la première. Prenons donc, dans la colonne N, le nombre 4398, et, combinant les indications des colonnes o et 5, nous trouverons que

$$\log 43985 = 4,6433046.$$

Pour trouver maintenant l'accroissement de la partie décimale du logarithme, en raison de l'accroissement résultant de la partie décimale 0,698 du nombre 43985,698, nous pourrions multiplier 0,698 par la différence tabulaire 99, et par suite ajouter au logarithme ci-dessus 69 unités du 7ᵉ ordre décimal ; mais les parties des différences qui sont toutes calculées dans la Table nous dispensent de cette opération. Nous voyons, en effet, en examinant la petite Table relative à la différence 99, que le produit de cette différence par 0,6 donne 59 unités décimales du 7ᵉ ordre ; que son produit par 0,09 est 8,9 unités du même ordre ; qu'enfin le produit de la même différence par 0,008 est 0,79 unités du 7ᵉ ordre ; en sorte que la somme de ces produits partiels est ce qu'il faut ajouter au logarithme primitif, comme il suit :

	$\log 43985$	$= 4,6433046$	
ajoutons pour	0,6	59	
pour	0,09	89	
pour	0,008	79	
nous aurons $\log 43985,698$		$= 4,6433114\,69$	$= 4,6433115$
et enfin $\log 43985698$			$7,6433115$

2°. *Trouver à quel nombre appartient le logarithme* 0,4971499.

Supposant pour un moment à ce logarithme la caractéristique 4, et cherchant dans la Table le logarithme immédiatement inférieur, nous trouvons 4,4971371 qui appartient au nombre 31415. La différence des deux logarithmes qui comprennent celui qui nous occupe est 138, et celui-ci surpasse de 128 le plus petit.

Au lieu de diviser 128 par 138, comme l'indique la règle pratique connue, opération qui nous donnerait pour partie décimale du nombre 31415 la fraction 0,9275, nous chercherons, dans la petite Table des parties de la différence 138, celle qui approche le plus de 128 en moins ; c'est 124 qui correspond au chiffre 9, ou mieux, à un accroissement de 0,9. Nous ne trouvons pas à quelle fraction correspond le reste 4, mais si 40 était

Digitized by Google

exactement dans la deuxième colonne de la petite Table, nous trouverions en regard le chiffre des centièmes du nombre cherché ; or 41 s'y trouve ; il correspond à 3, et nous ne commettrons pas d'erreur sensible en prenant 3 pour chiffre des centièmes ; ainsi le nombre correspondant au logarithme 4,4971499 sera 31415,93.

Il est rare qu'on ait besoin d'une approximation plus grande ; dans le cas où cependant celle-ci n'aurait pas été jugée suffisante, on aurait pu continuer de la même manière en ajoutant un zéro à la suite de chaque reste, et reculant le chiffre obtenu d'un rang vers la droite dans la partie décimale du nombre correspondant. Mais il est prudent de ne jamais compter sur plus de deux chiffres exacts, attendu que les logarithmes eux-mêmes ne sont fournis par les Tables qu'approximativement, et que l'hypothèse de la proportionnalité des différences n'est aussi qu'approchée.

Revenant enfin au logarithme donné 0,4971499, on trouve, en rétablissant la caractéristique momentanément altérée, qu'il appartient au nombre 3,141593.

120. On a pu juger, par l'exposé qui précède, combien l'emploi des logarithmes permet de simplifier les calculs arithmétiques ; cet avantage ne peut cependant être complétement obtenu que si, à la parfaite intelligence de la théorie, on joint une grande habitude du maniement des Tables. Nous allons terminer ce travail sur les logarithmes en présentant quelques exemples numériques propres à servir de type d'exercices, en même temps qu'ils mettront en évidence l'utilité de cette théorie.

Exemple I. — Soit à extraire la racine carrée de 3,14159.

Nous savons que le logarithme de la racine cherchée est égal (109) à la moitié du logarithme de 3,14159, ou à la moitié de 0,4971497, ou à 0,2485749.

Cherchant donc le nombre correspondant à ce dernier logarithme, nous trouvons que la racine demandée est 1,772454, résultat facile à vérifier en l'élevant au carré.

Si l'on avait demandé la racine cubique, on aurait pris le tiers du logarithme 0,4971499 ; ce tiers 0,1657166 correspond au nombre 1,464592, qui représente la racine cherchée.

Pour avoir la racine septième, on prendrait le septième du logarithme 0,4971499, soit 0,0710213 ; le nombre 1,177664 correspondant à ce logarithme serait la racine demandée.

En général, *pour avoir la racine d'un degré quelconque d'un nombre entier ou décimal, il faut diviser le logarithme de ce nombre par l'indice de la racine, et le nombre qui a pour logarithme le quotient de cette division est la racine cherchée.*

Exemple II. — Soit à extraire la racine cinquième de $\frac{31}{5476}$.

Digitized by Google

Nous avons vu que

$$\log\sqrt[5]{\frac{31}{5476}} = \frac{1}{5}\log\frac{31}{5476} = \frac{1}{5}(\log 31 - \log 5476).$$

Or,

$$\log 31 = 1,4913617$$
$$\log 5476 = 3,7384634$$
$$\log 31 - \log 5476 = \bar{3},7528983$$

Pour diviser par 5, nous mettrons ce dernier logarithme sous la forme

$$-5 + 2,7528983,$$

et le cinquième de ce nombre est $-1 + 0,5505797$, ou $\bar{1},5505797$.

On aura donc

$$\sqrt[5]{\frac{31}{5476}} = \bar{1},5505797,$$

et, en passant du logarithme au nombre correspondant,

$$\sqrt[5]{\frac{31}{5476}} = 0,3552872.$$

Ayant à diviser par un certain nombre un logarithme à caractéristique seule négative, nous avons employé un artifice qui consiste à augmenter négativement la caractéristique d'assez d'unités pour qu'elle devienne divisible par le nombre diviseur, et à placer en même temps en avant de la partie décimale autant d'unités positives qu'on en a ajouté de négatives à la caractéristique.

Exemple III. — Proposons-nous de calculer la valeur de l'expression

$$\frac{\sqrt[5]{0,439}\times(67,231)^2}{578\times\sqrt[7]{(0,047)^3}}.$$

Le logarithme de cette quantité peut se représenter par

$$\log\left[\sqrt[5]{0,439}\times(67,231)^2\right] - \log\left[578\times\sqrt[7]{(0,047)^3}\right],$$

ou par

$$\log\sqrt[5]{0,439} + \log(67,231)^2 - \log 578 - \log\sqrt[7]{(0,047)^3},$$

ou, enfin,

$$\frac{1}{5}\log 0,439 + 2\times\log 67,231 - \log 578 - \frac{3}{7}\log 0,047.$$

Or,

$$\log 0,439 = \bar{1},6424645, \quad \frac{1}{5}\log 0,439 = \bar{1},9284929$$
$$\log 67,231 = 1,8275696, \quad 2\log 67,231 = 3,6551392$$
$$-\log 578 = -2,7619278$$
$$\log 0,047 = \bar{2},6720979, \quad -\frac{3}{7}\log 0,047 = 0,5691009$$
$$1,3908052 = \log 24,5926$$

Digitized by Google

De ce calcul il résulte que la valeur de l'expression fractionnaire donnée est 24,5926.

Nous n'avons quelques particularités à faire remarquer que pour le quatrième logarithme 0,5691009, qui nous est venu du logarithme de 0,047, après division par 7 et multiplication du quotient par 3, sous la forme mixte $\bar{1}$,4308991. Ce dernier, qui devrait être retranché, est alors devenu 1 — 0,4308971 ou 0,5691009, et le calcul s'est achevé en faisant la somme des premier, deuxième et quatrième nombres, de laquelle on a retranché le troisième, qui seul avait sa partie décimale négative.

121. Au lieu de faire séparément la somme de trois des quatre nombres logarithmiques à ajouter, et d'en retrancher le quatrième, on pouvait éviter la soustraction par l'emploi des *compléments arithmétiques*.

Il est clair en effet que, au lieu de retrancher 2,7619278, on peut, sans altérer le résultat, ajouter 10 — 2,7619278, pourvu que de la somme totale on retranche ensuite 10. Or, la quantité 10 — 2,7619278 est ce qu'on appelle le complément arithmétique de 2,7619278, et ce complément s'obtient à vue du premier nombre en retranchant de 10 le premier chiffre significatif à droite, puis successivement tous les autres de 9, ainsi qu'on le constate aisément par le calcul direct. Nous aurions donc pu remplacer l'opération composée ci-dessus par l'addition unique suivante :

	$\bar{1}$,9284929	
	3,6551392	
	7,2380722	
	0,5691009	
laquelle donne.....	11,3908052	
et, après retranchement de 10,	1,3908052	comme ci-dessus.

D'après le même principe, on aurait pu aussi, quand on a dû retrancher $\bar{1}$,4308991, ajouter son complément 10,5691009, puis retrancher 10 encore soit de la somme totale, soit du nombre lui-même, en portant seulement 0,5691009, comme on y a été conduit par la soustraction directe.

La règle générale consiste donc à *remplacer les logarithmes à soustraire par leurs compléments, à faire ensuite une addition unique et à retrancher de la somme autant de dizaines qu'on a introduit de compléments.*

Cette seule application suffira pour montrer combien l'emploi des compléments arithmétiques permet de simplifier et d'abréger les calculs logarithmiques; nous terminerons par cet aperçu ce que nous avons à dire sur ce sujet.

Digitized by Google

Digitized by Google

ALGÈBRE.

PRÉLIMINAIRES.

1. Lorsqu'on a résolu un problème d'après des données numériques, le résultat est lui-même fourni par un ou plusieurs nombres qui ne conservent aucune trace, ni des raisonnements auxquels ils doivent naissance, ni des opérations qu'il a fallu faire sur les données; de là la nécessité de recommencer la série de ces raisonnements et de ces opérations pour tous les problèmes de la même espèce. On a donc été naturellement conduit à penser que, si l'on résolvait un problème sur des données générales représentées par des signes indéterminés, le résultat se présenterait lui-même sous une forme générale indiquant, indépendamment de toute valeur numérique attribuée aux quantités connues, les opérations qui doivent être faites dans chaque cas particulier.

L'*algèbre*, qui a pour objet cette extension des solutions, n'est donc, à proprement parler, que l'arithmétique généralisée; ses instruments sont des lettres qui représentent même, non plus seulement des nombres, mais des grandeurs quelconques, abstraction faite des unités qui les expriment; l'emploi de ces lettres qui conservent dans tout le cours d'une question une signification convenue, permet en outre souvent de fixer brièvement par écrit les diverses phases du raisonnement, et donne à l'intelligence le moyen de suivre sans s'égarer une analyse compliquée, alors qu'avec des chiffres elle aurait à faire des efforts laborieux et quelquefois infructueux.

Le problème suivant, quoique des plus simples, est propre à faire ressortir sous ce double rapport les avantages de l'emploi des notations et des procédés algébriques.

2. Problème. — *Trouver deux nombres dont la somme soit égale à* 36, *et la différence à* 8.

Solution arithmétique. — Le plus grand des deux nombres étant égal au plus petit augmenté de la différence 8, la somme 36 renferme deux fois le plus petit nombre plus 8. Si donc de cette somme 36 nous ôtons 8, le reste 28 équivaudra seulement à deux fois le plus petit nombre, qui par conséquent sera égal à $\frac{28}{2}$ ou 14.

Quant au plus grand nombre, il est égal au plus petit augmenté de 8, ou à 22.

Digitized by Google

Solution algébrique. — Désignons l'un des deux nombres cherchés par x, par exemple le plus petit; le plus grand sera alors $x+8$, et, puisque leur somme est égale à 36, nous pourrons écrire

$$x+x+8=36, \quad \text{ou} \quad 2x+8=36.$$

Cette relation une fois posée, on en tire immédiatement

$$2x=36-8=28;$$

et de cette dernière,

$$x=\frac{28}{2}=14.$$

De là, comme plus haut, on déduit que le plus grand nombre est 22.

Le rapprochement de ces deux solutions fait clairement voir que la seconde est beaucoup plus facile, plus commode que celle qui procède par le seul raisonnement, sans l'aide des lettres; nous allons montrer comment, en entrant plus encore dans l'emploi des notations spéciales à l'algèbre, on arrive à une solution tout à fait générale et applicable à tous les couples de valeurs numériques qu'il plaira choisir pour la somme et la différence des deux nombres cherchés.

Soit donc a la somme des deux nombres cherchés, et b leur différence; nous poserons comme ci-dessus

$$2x+b=a,$$

et cette relation nous donnera

$$2x=a-b;$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}.$$

Le plus grand des deux nombres étant égal au plus petit augmenté de b, il aura pour expression

$$\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2}+\frac{b}{2}.$$

Ainsi résolue, cette question nous montre que, *quand on connaît la somme et la différence de deux nombres, le plus grand des deux est égal à la demi-somme augmentée de la demi-différence, et le plus petit à la demi-somme diminuée de la demi-différence.*

Si, par exemple, la somme était 73 et la différence 27, l'un des nombres serait

$$\frac{73}{2}+\frac{27}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{100}{2}, \quad \text{ou} \quad 50;$$

l'autre

$$\frac{73}{2}-\frac{27}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{46}{2}, \quad \text{ou} \quad 23.$$

Digitized by Google

NOTATIONS ET DÉFINITIONS.

3. Il est d'usage de représenter les quantités données par les premières lettres de l'alphabet, et les inconnues par les dernières x, y, z; on emploie aussi, suivant les besoins, des alphabets différents, et même l'alphabet grec.

Dans une même question, les quantités différentes, mais analogues, se représentent par la même lettre à laquelle on donne un ou plusieurs accents; c'est ainsi qu'on écrit a', a'', a''', etc., que l'on appelle *a prime*, *a seconde*, *a tierce*, etc. On fait encore usage, dans les mêmes circonstances, des signes a_1, a_2, a_3, etc., que l'on énonce *a indice* 1, *a indice* 2, *a indice* 3, ou simplement *a* un, *a* deux, *a* trois, etc.

Outre les signes que nous avons indiqués dans les n^os^ 8, 11, 13, 20 et 56 de l'*Arithmétique*, le calcul algébrique en emploie plusieurs autres qu'il importe de faire dès à présent connaître.

Le signe $\times$ de la multiplication se remplace souvent en algèbre par un simple point placé entre les facteurs, ou même par la simple juxtaposition de ceux-ci : en d'autres termes, les trois expressions

$$a \times b, \quad a.b, \quad ab,$$

représentent toutes les trois le produit de a par b.

Il en est de même lorsque les facteurs sont séparément le résultat d'opérations à faire subir préalablement à d'autres quantités, auquel cas ils doivent être placés entre parenthèses, comme dans le produit

$$(a+b-c)(b+c-d+f).$$

Lorsqu'on doit ajouter ensemble des quantités égales $a+a+a+$ etc., on écrit une seule fois la quantité a, et on la fait précéder du nombre qui indique combien de fois elle est répétée; ainsi $a+a+a+a+a$ s'écrit $5a$. Le chiffre 5, dans ce cas, est dit le *coefficient* de a.

Un coefficient peut être fractionnaire, comme dans $\frac{5}{7}b$, ou dans $37{,}4\,c$; nous verrons plus loin qu'il peut encore être algébrique, c'est-à-dire exprimé par le moyen de lettres.

Si l'on veut exprimer par écrit l'inégalité de deux quantités, on les sépare par le signe $>$ dont on dirige la pointe vers la plus petite des deux; ainsi,

$a > b$ veut dire que a est plus grand que b,

$c < d$ veut dire que c est plus petit que d.

Toute expression algébrique composée de *termes* séparés par les signes + ou — s'appelle un *polynome*; chacun de ces termes est un *monome* qui

Digitized by Google

peut contenir l'indication de toutes les opérations arithmétiques, sauf l'addition et la soustraction.

Les expressions

$$7a^3b^2c, \quad \frac{5}{8}a^2b^3, \quad \sqrt[4]{6ab^2c^5}$$

sont des monomes.

On désigne sous les noms de *binomes* et *trinomes* les expressions respectivement composées de deux et trois termes.

De même qu'une lettre ou un nombre sans exposant sont censés avoir l'exposant 1, une lettre sans coefficient est supposée avoir pour coefficient l'unité.

On ne sépare jamais de chaque terme d'un polynome le signe qui le précède; ainsi, dans le polynome $a^3 - 3a^2b + 5ab^3 - c^2$, on distingue les termes a^3, $-3a^2b$, $+5ab^3$ et $-c^2$. Ceux des termes qui ont le signe + sont dits termes *additifs* ou *positifs;* ceux qui ont le signe — sont *soustractifs* ou *négatifs*. Il est entendu que tout terme qui n'a aucun signe est additif, et est censé précédé du signe +.

Dans une expression algébrique, les termes qui sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants sont appelés *termes semblables;* ils ne diffèrent entre eux que par les signes et les coefficients.

En se reportant à la définition du coefficient, on voit que, dans un polynome, s'il y a des termes semblables, il est facile de les réunir dans le but de simplifier l'expression sans en altérer la valeur. Par exemple, si l'on avait le polynome

$$5a^2b + 6b^3 - 7a^2b + 3a^2b - 11b^3 + a^2b,$$

on remarquerait que $5a^2b - 7a^2b + 3a^2b + a^2b$ équivaut à $(5 - 7 + 3 + 1)$ fois a^2b, ou à $2a^2b$, et que $6b^3 - 11b^3$ équivaut à $(6 - 11)$ fois b^3, ou à $-5b^3$; par conséquent l'expression entière se réduit à

$$2a^2b - 5b^3.$$

En général, *pour réduire en un seul plusieurs termes semblables, on fera la somme des coefficients des termes positifs et celle des termes négatifs; on retranchera la plus petite de la plus grande, et l'on donnera au reste le signe de la plus grande; ce reste, avec son signe, sera le coefficient du terme réduit.*

Les quantités qui ne contiennent aucun radical sont appelées *rationnelles;* dans le cas contraire, elles sont dites *irrationnelles.*

Une quantité rationnelle est *entière,* lorsqu'elle ne contient aucun dénominateur numérique ou littéral. Ainsi, $\frac{5}{6}a^2c$, $4b^2 + \frac{3c^4}{d^2}$ sont des quantités rationnelles; $4a^3 - b^2c$ est une quantité entière, et $\sqrt[3]{a^2b} + \frac{4c}{\sqrt{a+b}}$ est une quantité irrationnelle.

Digitized by Google

Quand deux expressions sont réunies par le signe $=$, elles forment une *identité*, une *égalité*, ou une *équation*.

Il y a *identité*, si les deux membres sont les mêmes, sont identiques, comme dans $4+7=4+7$, $a-x=a-x$. Si, sans être manifestement identiques, les deux membres sont susceptibles de le devenir par l'exécution de certaines opérations indiquées dans chacun d'eux, on a une *égalité*; exemples : $7-3=2^2$, $3a^2+b=\frac{2}{3}a^2+b+\frac{7}{3}a^2$. Enfin, on a une *équation*, lorsque les membres renferment une ou plusieurs quantités inconnues dont il faut déterminer les valeurs au moyen même de la relation considérée. C'est ainsi que, dans le problème du n° 2, nous avons posé l'équation $2x+8=36$, qui ne peut se vérifier qu'autant que l'on mettra pour x une certaine valeur propre à rendre les deux membres identiques, valeur que cette condition elle-même sert à déterminer. L'équation est alors dite *résolue*, et la valeur trouvée pour x est la *racine* de l'équation; dans celle qui vient d'être rappelée, la racine est 14.

Ces diverses définitions et notations étant bien comprises, nous allons donner des règles pour effectuer sur les quantités algébriques les opérations fondamentales qui permettent de les combiner; il est bon toutefois d'observer d'avance que les résultats de ces opérations ne seront que des indications de calculs, lesquels ne pourront être réellement effectués qu'après que l'on aura donné aux lettres des valeurs numériques : on n'obtient donc en réalité qu'une transformation des opérations primitivement indiquées en d'autres plus simples et devant produire les mêmes résultats.

ADDITION.

4. *L'addition algébrique a pour objet de trouver un monome ou un polynome dont la valeur numérique soit égale à la somme des valeurs numériques de plusieurs monomes ou polynomes donnés.*

La règle consiste à *écrire les termes de ces monomes ou polynomes les uns à la suite des autres avec leurs signes respectifs.*

Soit, pour exemple, à ajouter $a+2b-3c$ avec $3a-5b+8c$; le résultat sera, d'après la règle posée,

$$a+2b-3c+3a-5b+8c,$$

et, cette somme contenant des termes semblables, il faudra en faire la réduction qui donnera

$$4a-3b+5c.$$

Il est entendu que ce résultat de l'addition peut être aussi bien négatif que positif, suivant les systèmes de valeurs qui seront attribués aux lettres a, b et c.

Avec $a=3$, $b=5$, $c=7$, cette expression est égale à 32;

Avec $a=2$, $b=9$, $c=3$, elle devient égale à -4.

Digitized by Google

Lorsque les polynomes à additionner ont des termes semblables, au lieu de les écrire les uns à la suite des autres, on les dispose quelquefois de manière que les termes semblables se correspondent dans une même colonne verticale, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{rl} & 4a^3b^2 + 3a^2b^2c + 7a^5b^4 - 14a^3bc^2 \\ & -2a^3b^2 \qquad\qquad + 3a^5b^4 + 6a^3bc^2 \\ & +7a^3b^2 - 2a^2b^2c - 8a^5b^4 \\ \hline \text{Somme...} & 9a^3b^2 + a^2b^2c + 2a^5b^4 - 8a^3bc^2 \end{array}$$

SOUSTRACTION.

5. La *soustraction* est l'opération inverse de l'addition; *connaissant la somme de deux quantités et l'une d'elles, on se propose de trouver l'autre à laquelle on donne le nom de* différence *ou* reste.

De cette définition et de la règle donnée pour l'addition, on conclut nécessairement que *pour retrancher d'une expression algébrique une autre quantité de même nature, il faut changer tous les signes du polynome à soustraire, et l'écrire ainsi transformé à la suite du polynome dont on soustrait; on fait ensuite, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.*

Soit, en effet, à retrancher $c - d$ de $a - b$; $a - b$ est une somme, $c - d$ l'une des parties de cette somme, et le reste, ou l'autre partie, doit être tel, que, si l'on y ajoute $c - d$, on retrouve $a - b$; ce reste doit donc d'abord contenir $a - b$, puis c et d avec des signes tels, que l'addition de $c - d$ les fasse disparaître, c'est-à-dire avec des signes contraires à ceux qu'ils ont dans $c - d$.

Donc enfin le reste est

$$a - b - c + d.$$

De même, si de $4a - 3b + 5c$ on retranche $3a - 5b + 8c$, le reste sera

$$4a - 3b + 5c - 3a + 5b - 8c, \quad \text{ou} \quad a + 2b - 3c,$$

résultat qui serait positif avec.... $a = 7,\ b = 2,\ c = 3$,
» nul avec..... $a = 5,\ b = 2,\ c = 3$,
» négatif avec... $a = 3,\ b = 1,\ c = 2$.

La disposition propre à faciliter le calcul, dans le cas où les deux expressions contiennent des termes semblables, s'applique identiquement à la soustraction. Exemple :

$$\begin{array}{rl} & 9a^3b^2 + a^2b^2c + 2a^5b^4 - 8a^3bc^2 \\ & 7a^3b^2 - 2a^2b^2c + 2a^5b^4 \qquad\qquad - 6abc^2 \\ \hline \text{Reste...} & 2a^3b^2 - a^2b^2c \qquad - 8a^3bc^2 + 6abc^2 \end{array}$$

Digitized by Google

MULTIPLICATION.

6. *La multiplication de deux facteurs algébriques a pour objet de trouver une troisième quantité qui ait pour valeur numérique le produit de celles du multiplicande et du multiplicateur, quelles que soient les valeurs numériques des lettres qui entrent dans les deux facteurs.*

Soit, en premier lieu, à multiplier l'un par l'autre les deux monomes $5a^3b^2c$ et $9a^2c^3d$.

Il faudra, pour effectuer cette opération, multiplier le multiplicande successivement par chacun des facteurs du multiplicateur; le produit se présentera donc ainsi :

$$5 . a^3 . b^2 . c . 9 . a^2 . c^3 . d,$$

ou, en intervertissant l'ordre des facteurs,

$$5 . 9 . a^3 . a^2 . b^2 . c . c^3 . d,$$

ou encore

$$5 . 9 . a . a . a . a . a . b . b . c . c . c . c . d,$$

ou enfin, d'après la notation connue,

$$45a^5b^2c^4d.$$

7. Lorsque les deux monomes à multiplier sont tous deux positifs, ou que le multiplicateur au moins a le signe $+$, la multiplication conserve absolument le même sens qu'en arithmétique; car multiplier $\pm a$ par b, c'est répéter la quantité $\pm a$ un nombre de fois exprimé par b, et le produit dans le premier cas est $+ab$; il est $-ab$ dans le second, et cela indépendamment de la valeur numérique de b qui peut être entier ou fractionnaire.

Mais si le multiplicateur est négatif, le produit cherché ne peut plus avoir qu'une signification tout à fait algébrique que l'on a déterminée en observant que, lorsque le multiplicateur est positif, le produit a le même signe que le multiplicande, et en convenant rationnellement que, quand le multiplicateur serait négatif, le produit aurait un signe contraire à celui du multiplicande.

C'est cette règle que l'on formule elliptiquement comme il suit :

$$+ \times + = +,$$
$$- \times + = -,$$
$$+ \times - = -,$$
$$- \times - = +.$$

8. De là la règle générale suivante pour la multiplication de deux monomes : *Effectuer le produit des coefficients; écrire ensuite toutes les lettres différentes des facteurs en donnant à chacune d'elles un exposant*

Digitized by Google

égal à la somme de ceux qu'elle a dans le multiplicande et le multiplicateur; affecter ce résultat du signe + ou du signe —, selon que les deux facteurs ont le même signe ou des signes contraires.

Il est évident que cette règle s'applique identiquement quel que soit le nombre des monomes à multiplier; on voit sans peine que *si le nombre des facteurs négatifs est nul ou pair, le produit aura le signe +, et que le produit aura le signe —, si ce nombre est impair.*

Remarque I. — Quand on change à la fois les signes de deux des facteurs d'un produit, on ne change pas le signe de ce produit.

Remarque II. — Les puissances paires d'une quantité quelconque, positive ou négative, sont positives; les puissances impaires ont le même signe que cette quantité.

9. Passons maintenant à la multiplication des polynomes.

S'il s'agit de multiplier un polynome par un monome, on devra multiplier successivement chacun des termes du polynome par le monome, en observant, pour les signes des divers termes du produit, la règle donnée plus haut pour la multiplication des monomes entre eux. Ainsi,

$$(a-b+c-d)m = am - bm + cm - dm.$$

Si l'on doit multiplier un monome par un polynome, ces deux facteurs représentant des nombres peuvent être intervertis, et l'on rentre dans le cas précédent.

Enfin, pour multiplier un polynome par un autre polynome, on multiplie séparément les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, selon la règle donnée pour la multiplication des monomes. Soit, par exemple, à multiplier $a-b$ par $c-d$,

$$\begin{array}{r} a-b \\ c-d \\ \hline \text{Produit...} \quad ac-bc-ad+bd \end{array}$$

10. En général, pour multiplier deux polynomes l'un par l'autre, on dispose les calculs comme en arithmétique, mais on commence ordinairement l'opération par la gauche des deux facteurs, bien que rien n'en fasse une loi rigoureuse. Il est également très-commode, dans une opération qui peut parfois avoir un grand développement, de disposer les termes des facteurs dans un ordre déterminé qui permette d'embrasser facilement tout l'ensemble, et d'obtenir le produit pareillement disposé; on arrive à ce résulat en *ordonnant*, s'il y a lieu, le multiplicande et le multiplicateur par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre qui s'appelle alors *lettre ordonnatrice*, et le produit est lui-même ordonné par rapport à la même lettre. Cette disposition, nous le répétons, dirige et rend facile la marche du calcul; elle prévient les er-

Digitized by Google

reurs, ou tout au moins elle fait facilement découvrir celles qui auraient pu se glisser.

Comme exemple de cette méthode, nous multiplierons

$$\begin{array}{rl} & 2x^3 - 5ax^2 + 3a^2x - a^3 \\ \text{par} & x^2 - 6ax - 4a^2 \\ \hline \text{Produit par } x^2 \ldots\ldots & 2x^5 - 5ax^4 + 3a^2x^3 - a^3x^2 \\ \text{Produit par } -6ax. & \quad - 12ax^4 + 30a^2x^3 - 18a^3x^2 + 6a^4x \\ \text{Produit par } -4a^2. & \quad\quad - 8a^2x^3 + 20a^3x^2 - 12a^4x + 4a^5 \\ \hline \text{Produit total} \ldots & 2x^5 - 17ax^4 + 25a^2x^3 + a^3x^2 - 6a^4x + 4a^5 \end{array}$$

11. Le multiplicande, comme le multiplicateur dans l'exemple ci-dessus, a tous ses termes du même degré, c'est-à-dire que la somme des exposants des facteurs littéraux est constante dans chacun d'eux; ils sont *homogènes*, l'un du troisième degré, l'autre du deuxième. Le produit ne pouvant avoir que des termes formés par le produit d'un terme du multiplicande par un terme du multiplicateur, est lui-même forcément homogène et d'un degré égal à la somme des degrés des polynomes facteurs; il est ici du cinquième degré.

De plus, il est facile de voir que, lorsque deux polynomes ont été ordonnés l'un et l'autre suivant les puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre, les termes extrêmes du produit sont, sans réduction possible, les produits des termes extrêmes des polynomes facteurs. En effet, le premier terme du multiplicande contient la lettre ordonnatrice avec le plus haut exposant qu'elle a au multiplicande; le premier terme du multiplicateur la contient avec le plus haut exposant qu'elle a dans ce facteur; or, le produit d'un terme du multiplicande par un terme du multiplicateur contenant la somme des exposants de cette lettre, il est clair que le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur contiendra cette lettre avec un exposant plus fort que tous les autres produits. Le raisonnement serait le même pour le produit des derniers termes qui donneraient le terme contenant la lettre ordonnatrice avec le plus faible exposant.

12. Lorsqu'on ordonne un polynome par rapport à une lettre, il peut arriver que cette lettre entre dans plusieurs termes avec le même exposant; il est alors commode d'écrire les termes dont il s'agit en plaçant dans une colonne verticale, en avant de la lettre ordonnatrice, les divers coefficients numériques ou littéraux de cette lettre.

Ainsi, le polynome

$$a^3 + 2b^3x^2 - 7b^2x^3 - 5a^2b^3x + 4abx^3 + b^4x - 2b^5$$

s'écrirait

$$\begin{array}{l|l|l} -7b^2 & x^3 + 2b^3x^2 - 5a^2b^2 & x + a^3 \\ +4ab & + b^4 & - 2b^5 \end{array};$$

Digitized by Google

et, s'il devait être multiplié par un autre de même forme, on aurait à effectuer à part les multiplications des coefficients de la lettre principale, coefficients qui sont ici de véritables polynomes, et qui peuvent être également ordonnés eux-mêmes par rapport à une autre lettre. Nous ne nous appesantirons pas davantage sur les détails de cette opération qui ne présente aucune difficulté, et qui ne demande que de l'ordre et de la clarté pour s'exécuter sans erreur.

13. Nous terminons ce qui a rapport à la multiplication algébrique, en indiquant les multiplications suivantes qui offrent des résultats remarquables :

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

La première de ces trois égalités montre que *le carré de la somme de deux quantités est égal à la somme de leurs carrés, augmentée du double produit de ces quantités.*

La seconde, que *le carré de la différence de deux quantités est égal à la somme des carrés de ces quantités, diminuée de leur double produit.*

Enfin la troisième, que *le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces quantités.*

DIVISION.

14. La division algébrique est, comme en arithmétique, l'inverse de la multiplication; elle a pour but, *étant donnés un produit et l'un de ses facteurs, de retrouver l'autre facteur.*

En ce qui concerne la division de deux monomes, les règles indiquées pour la multiplication donnent immédiatement celles qui conviennent à cette opération inverse de la première. Le coefficient du quotient sera évidemment le quotient de ceux du dividende et du diviseur; l'exposant d'une lettre quelconque devra figurer au quotient avec un exposant égal à la différence de ceux qu'elle a dans le dividende et le diviseur; enfin, quant aux signes, ils seront encore fournis par cette considération que, le quotient multiplié par le diviseur devant reproduire le dividende, le signe du quotient sera le même que celui du diviseur, si le dividende a le signe +; il sera contraire à celui du diviseur quand le dividende aura le signe —.

Cette règle des signes peut également se présenter comme il suit :

$$+ : + = +,$$
$$+ : - = -,$$
$$- : + = -,$$
$$- : - = +:$$

Digitized by Google

elle est identique à celle de la multiplication, et on l'exprime en disant que, *si le dividende et le diviseur sont de mêmes signes, le quotient est positif*, et que *le quotient est négatif, si le dividende et le diviseur sont de signes contraires.*

Nous nous proposerons comme exemple de diviser $45a^6b^3c^3d$ par $9a^4b^2c$, et le quotient sera $5a^2bcd$.

15. Il peut se faire que la division ne soit pas toujours complétement possible, soit parce que le coefficient du dividende n'est pas divisible par celui du diviseur, soit parce que le diviseur contient des lettres qui n'entrent pas dans le dividende, ou qui y entrent avec un exposant moindre. Le mieux est alors de mettre le quotient sous la forme d'une fraction que l'on simplifie, autant que possible, par l'enlèvement des facteurs communs à ses deux termes.

Ainsi, le quotient de $45a^6b^3c^3d$ par $25a^4b^4c^3d^5e$ équivaut évidemment à la fraction

$$\frac{45a^6b^3c^3d}{25a^4b^4c^3d^5e},$$

que nous simplifierons comme il vient d'être dit, et qui se trouvera réduite à

$$\frac{9a^2}{5bd^4e}.$$

16. Rien ne s'oppose toutefois à ce que l'on conserve à la partie littérale de ce quotient la forme entière, en introduisant pour la lettre d, par exemple, un *exposant négatif* égal à -4, et résultant de ce que de l'exposant 1 de cette lettre au dividende on a dû retrancher l'exposant 5 de la même lettre au diviseur.

Au moyen de cette observation, le quotient de la division ci-dessus serait

$$\frac{9}{5}a^2b^{-1}d^{-4}e^{-1}.$$

Le rapprochement de ces deux formes du quotient permet de conclure : 1° que *toute quantité affectée d'un exposant négatif équivaut à l'unité divisée par la même quantité affectée du même exposant pris positivement*; 2° que *toute quantité affectée symboliquement de l'exposant* 0 *équivaut à l'unité*. Car, en général,

$$\frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \times a^p} = \frac{1}{a^p} = a^{m-m-p} = a^{-p};$$

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 = a^{m-m} = a^0.$$

17. Quand on voudra diviser un polynome par un monome, le quotient, qui sera d'ailleurs nécessairement un polynome, s'obtiendra par la divi-

Digitized by Google

sion successive de tous les termes du dividende, et il aura la forme entière si chacun des termes du dividende est exactement divisible par le diviseur.

Soit à diviser $15a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x$ par $5a^2x$; le quotient sera $3x^2 - 2ax + a^2$ et, le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, on aura

$$15a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x = 5a^2x(3x^2 - 2ax + a^2).$$

Le second membre de cette égalité n'est, à vrai dire, qu'une seconde forme du polynome dividende dans lequel on a mis en évidence le *facteur commun* à tous les termes. En général, *pour mettre une quantité en facteur commun dans un polynome, on divise le polynome par cette quantité que l'on écrit comme multiplicateur du quotient placé lui-même entre parenthèses.*

18. Passons maintenant à la division de deux polynomes, et supposons d'abord que le dividende soit le produit exact du diviseur par le quotient, c'est-à-dire que l'opération donne lieu à un quotient entier sans reste.

Si le diviseur et le quotient ont été ordonnés suivant les puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre, le produit sera pareillement ordonné, et le premier terme de ce produit sera, (11) le produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient. Si donc nous divisons le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, nous obtiendrons le premier terme du quotient. Nous multiplierons ensuite tout le diviseur par ce premier terme du quotient, et nous retrancherons ce produit du dividende pour avoir un reste qui sera le produit du diviseur par les autres termes du quotient; nous diviserons donc le premier terme de ce reste par le premier terme du diviseur et nous aurons le second terme du quotient. En opérant ainsi de suite sur chacun des restes successifs, nous arriverons nécessairement à un reste nul, puisque nous aurons retranché du dividende les produits du diviseur par tous les termes du quotient. Exemple :

Dividende $12x^5 - 17ax^4 - 16a^2x^3 + 44a^3x^2 - 31a^4x + 6a^5$ | $4x^3 - 7ax^2 + 5a^2x - a^3$ divis.

$-12x^5 + 21ax^4 - 15a^2x^3 + 3a^3x^2$ | $3x^2 + ax - 6a^2$ quot.

$4ax^4 - 31a^2x^3 + 47a^3x^2$

$-4ax^4 + 7a^2x^3 - 5a^3x^2 + a^4x$

$-24a^2x^3 + 42a^3x^2 - 30a^4x$

$+24a^2x^3 - 42a^3x^2 + 30a^4x - 6a^5$

Reste..... 0.

Pour faciliter la soustraction des produits du diviseur par les divers termes du quotient, nous avons changé les signes des termes de ces pro-

Digitized by Google

duits, avant de les écrire sous les dividendes partiels; de cette façon, la soustraction s'est transformée en addition. Cette pratique est commode, en ce qu'elle dispense de songer constamment à soustraire au lieu d'additionner; elle est, du reste, généralement adoptée.

19. Dans le cas où le quotient ne serait pas entier, ce que l'on ignore avant d'avoir fait l'opération, on agit comme si ce quotient devait être entier, et l'on arrive à un dividende partiel ou reste dont le premier terme n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur. On complète alors le quotient par une fraction qui a pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur.

Exemple : le quotient de $x^7 - 3a^2x^5 - 2a^3x^4 + a^4x^3 + 7a^5x^2$ par $x^3 - 5a^2x + a^3$ donne pour quotient complet

$$x^4 + 2a^2x^2 - 3a^3x + 11a^4 + \frac{-10a^5x^2 + 58a^6x - 11a^7}{x^3 - 5a^2x + a^3}.$$

20. Lorsque le dividende et le diviseur, ou seulement l'un d'eux, renferment plusieurs termes contenant la lettre ordonnatrice avec le même exposant, on dispose alors, comme nous l'avons dit (12) pour la multiplication, les divers termes des coefficients sur des colonnes verticales; on est alors généralement amené à faire des divisions partielles de polynomes pour obtenir les coefficients des termes du quotient; toutefois, ces divisions partielles sont nécessairement plus simples que l'opération principale; l'essentiel est toujours d'éviter la confusion des quantités entre elles, et l'on y parvient aisément, les principes précédemment posés étant généraux et ne laissant d'incertitude dans aucun cas.

21. Divisons $x^m - a^m$ par $x - a$.

Cette opération conduira toujours à un quotient entier, car les dividendes partiels successifs seront, ainsi qu'on peut s'en assurer en essayant l'opération,

$$x^m - a^m,\quad ax^{m-1} - a^m,\quad a^2x^{m-2} - a^m,\quad a^3x^{m-3} - a^m,\ldots,$$
$$-a^{m-2}x^2 - a^m,\quad a^{m-1}x - a^m,\quad a^m - a^m \text{ ou zéro};$$

le quotient sera d'ailleurs

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots\ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

Il en résulte que *la différence entre les puissances semblables de deux quantités est toujours exactement divisible par la différence de ces quantités.*

Exemple :

$$x^7 - a^7 = (x - a)(x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6).$$

Il est facile de voir que, si l'on avait divisé $x^m + a^m$ par $x - a$, les

Digitized by Google

dividendes partiels eussent respectivement différé des précédents par le signe de a^m, et le dernier eût été $a^m + a^m$ ou $2a^m$.

On conclut donc aussi que *la somme des puissances semblables de deux quantités n'est jamais exactement divisible par la différence de ces quantités.*

ÉQUATIONS.

GÉNÉRALITÉS.

22. Nous avons traité, dès le début de l'algèbre, un problème qui nous a fourni un premier exemple d'équations, et plus loin (5) nous avons dit que deux quantités séparées par le signe = formaient une équation, quand dans leur expression il entrait une ou plusieurs lettres représentant des inconnues à déterminer par cette relation même. *Résoudre* une équation, c'est précisément chercher les valeurs numériques ou algébriques qui, mises à la place des inconnues, ramènent l'équation à une égalité; ces valeurs numériques ou algébriques sont appelées les *racines* de l'équation.

Dans les calculs relatifs à la détermination des racines, il y a à considérer le nombre des inconnues et le degré de l'équation. Si une équation ne contient pas d'inconnues en dénominateur ou sous un radical, son degré est marqué par la somme des exposants des inconnues prise dans le terme où cette somme est la plus forte.

Ainsi

$$ax = b$$

est une équation du premier degré à une seule inconnue;

$$4y^3 - 7x^2 + 2 = 3xy - x^3 \quad \text{et} \quad x^2y = m^3$$

sont des équations du troisième degré à deux inconnues.

Si l'inconnue entrait en dénominateur, ou se trouvait engagée sous un radical, on ne pourrait déterminer le degré de l'équation qu'après avoir fait subir à celle-ci des transformations propres à faire disparaître soit le dénominateur, soit le radical contenant l'inconnue.

23. La résolution des équations repose sur le principe suivant, qui n'a pas besoin de démonstration :

On peut, sans altérer les valeurs des inconnues, 1° *ajouter ou retrancher aux deux membres d'une équation une même quantité;* 2° *multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par une même quantité, pourvu que, dans ce second cas, la quantité dont il s'agit soit indépendante des inconnues et différente de zéro.*

Il résulte de là que : 1°. *Si une équation contient dans tous ses termes un facteur commun, on peut le faire disparaître en divisant tous les*

Digitized by Google

termes par ce facteur; car alors on divise les deux membres par une même quantité, ce qui n'altère pas l'égalité;

2°. *Lorsqu'une équation contient des termes fractionnaires, on la ramène à la forme entière en réduisant tous les termes à des fractions de même dénominateur, et multipliant ensuite les deux membres par ce dénominateur commun;*

3°. *Après la suppression des facteurs communs et la disparition des dénominateurs, une équation ne se compose plus que de termes entiers contenant ou ne contenant pas l'inconnue, et réunis par les signes + et —.*

Pour arriver à connaître les valeurs des inconnues, il est nécessaire de grouper d'une manière déterminée les divers termes entre eux, et pour cela de savoir faire passer un terme quelconque d'un membre dans l'autre. Cette opération se fait en transposant ce terme avec un signe contraire à celui qu'il avait précédemment; on comprend en effet que, dans l'équation

$$ax - b = cx + d,$$

si l'on veut faire passer cx dans le premier membre, on atteindra ce but en retranchant cx aux deux membres de l'équation qui deviendra alors

$$ax - cx - b = d.$$

Pour faire passer b dans le second membre, on ajouterait b de part et d'autre, et il viendrait enfin

$$ax - cx = b + d.$$

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

24. Appliquées à l'équation du premier degré à une seule inconnue, les généralités qui précèdent conduisent à la règle suivante :

Pour résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue, on chasse d'abord les dénominateurs, s'il y en a; on transpose dans le premier membre tous les termes contenant l'inconnue, et dans le second tous les termes connus; on effectue les calculs indiqués en ayant soin, si l'équation est algébrique, de mettre l'inconnue en facteur commun. La valeur de cette dernière s'obtient ensuite en divisant le membre tout connu par le coefficient de l'inconnue.

Premier exemple. — Soit à résoudre l'équation

$$3x - \frac{2}{15} - 74 + \frac{5}{6}x = \frac{8}{15} - 4 - 2x - \frac{2}{3}.$$

Pour chasser les dénominateurs, nous remarquerons que (Arith., **27**) le nombre 30 est à la fois divisible par 3, 6 et 15; nous multiplierons donc

Digitized by Google

tous les termes de l'équation par 30, et nous aurons

$$90x - \frac{60}{15} - 2220 + \frac{150x}{6} = \frac{240}{15} - 120 - 60x - \frac{60}{3},$$

ou, en réduisant,

$$90x - 4 - 2220 + 25x = 16 - 120 - 60x - 20,$$

puis transposant,

$$90x + 25x + 60x = 16 - 120 - 20 + 4 + 2220,$$

ou encore

$$175x = 2100,$$

et enfin

$$x = \frac{2100}{175} = 12.$$

Deuxième exemple. — Soit l'équation algébrique

$$\frac{ax}{a+b} - 3x + \frac{a^3}{a^2-b^2} = 2a - \frac{7bx}{a-b}.$$

En multipliant tous les termes par $a^2 - b^2$, qui est divisible par $a+b$ et par $a-b$, nous ferons disparaître les dénominateurs, et nous aurons, après les premières simplifications,

$$a(a-b)x - 3(a^2-b^2)x + a^3 = 2a(a^2-b^2) - 7b(a+b)x;$$

transposant

$$a(a-b)x - 3(a^2-b^2)x + 7b(a+b)x = 2a(a^2-b^2) - a^3,$$

et réduisant

$$(-2a^2+6ab+10b^2)x = a(a^2-2b^2),$$

nous trouvons enfin

$$x = \frac{a(a^2-2b^2)}{-2a^2+6ab+10b^2}.$$

Troisième exemple. — Résolvons l'équation

$$\frac{3}{x-2} - \frac{4}{x} = \frac{5}{x}.$$

Nous commencerons par la mettre sans forme entière, en chassant les dénominateurs, et nous aurons

$$3x - 4(x-2) = 5(x-2),$$

ou, en développant,

$$3x - 4x + 8 = 5x - 10.$$

Digitized by Google

La transposition des termes donne

$$3x - 4x - 5x = -10 - 8, \quad \text{ou} \quad -6x = -18.$$

Or on peut toujours, dans une équation quelconque, changer à la fois tous les signes, puisque cette opération revient évidemment à transposer tous les termes de chaque membre dans l'autre; il viendra donc

$$6x = 18,$$

d'où

$$x = 3.$$

Il est facile, du reste, de vérifier que la valeur ainsi trouvée pour l'inconnue satisfait bien à l'équation proposée, qui donne alors

$$\frac{3}{3-2} - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}, \quad \text{ou} \quad 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}.$$

25. Nous avons dit (22) qu'il était permis de multiplier les deux membres d'une équation par une même quantité, pourvu que cette quantité, d'ailleurs différente de zéro, ne contînt pas l'inconnue. Si l'on n'avait pas égard à cette restriction, on introduirait, en effet, de nouvelles racines qui seraient étrangères à l'équation primitive. Ainsi, pour n'en donner qu'un exemple fort simple, l'équation

$$x + 2 = 5$$

est vérifiée par la racine

$$x = 3.$$

Si l'on multipliait ses deux membres par $x - 7$, on aurait

$$(x + 2)(x - 7) = 5(x - 7),$$

et cette nouvelle équation admettrait évidemment les deux racines $x = 3$ et $x = 7$.

Le contraire aurait lieu si l'on supprimait dans une équation un facteur commun qui ne fût pas indépendant de l'inconnue; on ferait disparaître dans ce cas des racines qui appartenaient à l'équation proposée.

Il est inutile d'ailleurs d'ajouter que la multiplication ou la division par une quantité nulle d'elle-même ne peut avoir aucun avantage et ne saurait présenter un sens digne de fixer l'attention.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

26. Une équation à deux inconnues admet une infinité de racines; car, pour chaque valeur donnée arbitrairement à l'une des inconnues, l'équation détermine la valeur correspondante de l'autre.

Digitized by Google

Ainsi l'équation

$$4x - 3y = 7,$$

résolue par rapport à x, d'après la méthode précédente, donnerait

$$x = \frac{3y + 7}{4}.$$

Or, pour chaque valeur attribuée à y, on trouverait une valeur correspondante pour x, et l'on verrait ainsi que cette équation serait satisfaite entre autres par les couples de valeurs suivants :

$$\left\{\begin{matrix} y = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} y = -1 \\ x = 1 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} y = 0 \\ x = \frac{7}{4} \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} y = 3 \\ x = 4 \end{matrix}\right\}, \text{ etc.}$$

Mais, si à cette équation on en joint une autre entre les mêmes inconnues, et que l'on se propose de trouver des valeurs de x et de y satisfaisant à la fois à ces deux équations, le problème est alors tout à fait déterminé, et la marche à suivre pour le résoudre consiste invariablement à déduire des deux équations proposées un autre système de deux équations qui admettent les mêmes racines que les premières, et dont l'une ne contienne qu'une seule inconnue. Cette opération s'appelle *éliminer* l'une des inconnues.

Cette élimination peut se faire de différentes manières que nous allons successivement indiquer, en les appliquant exclusivement à des équations ramenées à la forme entière, c'est-à-dire comprenant, sans dénominateurs numériques ou littéraux, un terme en x, un autre en y, et un terme tout connu; c'est en effet à cette forme qu'il est possible et qu'il convient toujours de ramener les équations avant de les résoudre.

27. Soient donc les deux équations coexistantes

$$\left\{\begin{matrix} 2x + 3y = 13, \\ 5x + 4y = 22. \end{matrix}\right.$$

PREMIÈRE MÉTHODE. — *Élimination par substitution.* — On tire de la première équation

$$y = \frac{13 - 2x}{3},$$

et cette valeur de y, substituée dans la seconde équation, donne

$$5x + \frac{4(13 - 2x)}{3} = 22.$$

Cette dernière n'a plus qu'une seule inconnue, que l'on déterminera comme il a été dit plus haut; cette résolution donnera

$$x = 2.$$

Digitized by Google

et cette valeur de x, mise dans celle de y, fournit enfin

$$y = 3.$$

DEUXIÈME MÉTHODE. — *Élimination par comparaison.* — On tire de chacune des équations proposées l'expression de l'une des deux inconnues, de y par exemple; ces deux expressions contiennent x : l'une est, comme plus haut, $\frac{13 - 2x}{3}$; l'autre est $\frac{22 - 5x}{4}$.

La *comparaison* de ces deux expressions de y conduit nécessairement à conclure qu'elles sont égales pour une même valeur de x, et fournit l'équation à une seule inconnue

$$\frac{13 - 2x}{3} = \frac{22 - 5x}{4},$$

laquelle donne encore

$$x = 2.$$

Cette valeur mise dans l'une quelconque des expressions de y donne de son côté

$$y = 3.$$

TROISIÈME MÉTHODE. — *Élimination par addition et soustraction.* — Pour éliminer y, par exemple, on observe que, si l'on pouvait déduire des deux équations proposées deux autres équations en x et y, dans lesquelles les coefficients de y fussent égaux, il suffirait, pour faire disparaître cette inconnue, d'*additionner* ou de *soustraire* membre à membre ces deux nouvelles équations, selon que les coefficients de y seraient de signes contraires ou de même signe.

Or, il est facile de voir qu'on parviendra aux deux équations demandées en multipliant tous les termes de chacune des deux premières par le coefficient de y dans l'autre. Multiplions donc dans la première par 4, et dans la seconde par 3, il viendra

$$\begin{cases} 8x + 12y = 52, \\ 15x + 12y = 66. \end{cases}$$

En retranchant la première de la deuxième, on trouve

$$7x = 14,$$

d'où

$$x = 2.$$

De même pour éliminer x, on multiplie tous les termes de la première équation par 5, et ceux de la deuxième par 2, ce qui donne

$$\begin{cases} 10x + 15y = 65, \\ 10x + 8y + 44. \end{cases}$$

On retranche ces deux nouvelles équations l'une de l'autre, et l'on

Digitized by Google

trouve

$$7y = 21,$$

d'où

$$y = 3.$$

28. Pour résoudre trois équations du premier degré entre trois inconnues, on élimine d'abord une des inconnues par l'une quelconque des méthodes précédentes; ce calcul conduit à deux équations ne renfermant plus que deux des inconnues que l'on détermine par les procédés qui viennent d'être indiqués, et la substitution de ces valeurs dans l'une quelconque des équations qui renferment les trois inconnues conduit à la valeur de la troisième de ces inconnues.

Appliquons ces principes au système suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} 5x - 6y + 4z = 15, \\ 7x + 4y - 3z = 19, \\ 2x + y + 6z = 46. \end{cases}$$

Prenant la valeur de x dans la troisième équation, on a

$$x = \frac{46 - y - 6z}{2},$$

et substituant cette valeur de x en y et z dans les deux premières équations, on remplace le système proposé par l'ensemble des trois équations

$$\begin{cases} 5\left(\frac{46 - y - 6z}{2}\right) - 6y + 4z = 15, \\ 7\left(\frac{46 - y - 6z}{2}\right) + 4y - 3z = 19, \\ x = \frac{46 - y - 6z}{2}, \end{cases}$$

lesquelles, après que l'on a effectué les calculs, chassé les dénominateurs et transposé les termes, deviennent

$$(2) \qquad \begin{cases} 17y + 22z = 200, \\ -y + 48z = 284, \\ x = \frac{46 - y - 6z}{2}. \end{cases}$$

Il faut maintenant éliminer y ou z entre les deux premières équations de ce nouveau système; la seconde donne

$$y = 48z - 284,$$

et cette valeur de y portée dans la première, donne une nouvelle équation qui ne contient plus d'inconnue autre que z, en sorte que le système (2) est lui-même remplacé, après que les calculs sont effectués, par

Digitized by Google

le suivant :

$$(3)\qquad \begin{cases} 838z = 5028, \\ y = 48z - 284, \\ x = \dfrac{46 - y - 6z}{2}. \end{cases}$$

La première de ces trois équations fournit enfin

$$z = \frac{4028}{838} = 6.$$

Portée dans la seconde, cette valeur de z conduit à celle de y,

$$y = 48 \times 6 - 284 = 288 - 284 = 4,$$

et ces deux valeurs de z et y, portées dans la troisième, donnent

$$x = \frac{46 - 4 - 36}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

29. Pour résoudre quatre équations entre quatre inconnues, on ramène ce cas au précédent en éliminant une des inconnues ; on obtient ainsi trois équations entre trois inconnues dont on trouve les valeurs comme il vient d'être dit, et en substituant ces valeurs dans l'une quelconque des équations qui renferment la quatrième inconnue, on en déduit la valeur de cette quantité.

Des raisonnements analogues donnent le moyen de résoudre un nombre quelconque d'équations du premier degré, lorsqu'il y a autant d'équations que d'inconnues. Cette dernière condition est essentielle pour que le problème soit déterminé ; une équation de moins que d'inconnues suffirait en effet pour assigner au système une infinité de solutions, puisque toute valeur arbitrairement donnée à l'une des inconnues ramènerait la question à résoudre des équations en nombre égal à celui des inconnues, et par suite fournirait une valeur déterminée pour chacune de ces dernières.

30. Nous n'examinerons plus qu'un seul cas : c'est celui où toutes les inconnues n'entrent pas dans chacune des équations. La méthode générale ne change pas pour cela ; seulement, il faut examiner avec soin de quelle manière les inconnues sont liées entre elles, afin de pouvoir les déduire aussi simplement que possible les unes des autres.

Soient, par exemple, à résoudre les quatre équations suivantes :

$$\begin{cases} x - z = 2, \\ x - y - z = 0, \\ x + y = 5, \\ 2z + t = 4. \end{cases}$$

Digitized by Google

Les trois premières ne renfermant que les inconnues x, y et z, déterminent ces inconnues. En effet, ces trois équations donnent

$$x = 2 + z,$$
$$x = y + z,$$
$$x = 5 - y.$$

Or, en égalant les deux premières valeurs de x, on trouve $y = 2$, et la substitution de cette valeur dans la troisième donne $x = 3$. Faisant ensuite $x = 3$ dans $x = 2 + z$, on trouve $z = 1$; enfin, on fait $z = 1$ dans $2z + t = 4$, et il vient $t = 2$.

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que les valeurs

$$x = 3,$$
$$y = 2,$$
$$z = 1,$$
$$t = 2,$$

satisfont aux équations proposées.

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

31. La résolution d'un problème algébrique comprend deux parties distinctes : 1° la *mise en équations ;* 2° la *résolution des équations posées.* On obtient les équations qui servent à déterminer les inconnues d'un problème, en indiquant, à l'aide des signes algébriques, les opérations qu'il faudrait exécuter sur les quantités inconnues, si elles étaient connues, pour s'assurer qu'elles satisfont bien aux diverses conditions de la question.

Quelques exemples serviront mieux que tout ce que nous pourrions ajouter pour montrer la marche qu'il convient de suivre dans cette délicate opération.

PROBLÈME I. — *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : Mon âge est le triple de celui de mon fils, et il y a dix ans qu'il en était le quintuple. On demande l'âge du fils.*

Représentons par x l'âge cherché du fils; puisque l'âge de son père est triple, il est $3x$. Mais il y a dix ans, le père avait $3x - 10$, et le fils $x - 10$; or, à cette époque, l'âge du père était égal à 5 fois celui du fils; nous avons donc la relation

$$3x - 10 = 5(x - 10),$$

Digitized by Google

c'est l'équation du problème, et sa résolution donne

$$x = 20.$$

Le fils a donc 20 ans, le père en a 60; il y a dix ans, le père en avait 50, c'est-à-dire 5 fois plus que son fils qui n'avait que 10 ans.

PROBLÈME II. — *Un renard poursuivi par un lévrier a* 60 *sauts d'avance; il en fait* 9 *pendant que le lévrier n'en fait que* 6; *mais* 3 *sauts du lévrier en valent* 7 *du renard. Combien le lévrier fera-t-il de sauts pour atteindre le renard?*

Soit désigné par x le nombre des sauts cherché; puisque le renard fait 9 sauts pendant que le lévrier n'en fait que 6, il en fait $\frac{9}{6}$ ou $\frac{3}{2}$ pendant que celui-ci en fait 1, et il en fera $\frac{3}{2}x$ pendant que ce dernier en fera x. Mais 3 sauts du lévrier en valent 7 du renard; donc, 1 saut du lévrier vaut $\frac{7}{3}$ de sauts du renard, et par conséquent x sauts du lévrier en valent $\frac{7}{3}x$ du renard.

Maintenant, le chemin à parcourir par le lévrier pour atteindre le renard se compose des 60 sauts que celui-ci a d'avance sur lui, plus le chemin qu'il parcourt encore à partir du moment où le lévrier se lance à sa poursuite; nous aurons donc à égaler les x sauts du lévrier, ou plutôt les $\frac{7}{3}x$ sauts qu'eût faits le renard, aux 60 sauts d'avance plus les $\frac{3}{2}x$ qu'il effectue réellement.

De là l'équation

$$\frac{7}{3}x = 60 + \frac{3}{2}x,$$

qui donne

$$x = 72.$$

Le lévrier fera donc 72 sauts pour atteindre le renard; dans le même temps, le renard en fera $\frac{3}{2} \times 72$ ou 108 qui, ajoutés aux 60 d'avance, font 168; et les 168 sauts de renard sont bien équivalents aux 72 du levrier : car $\frac{7}{3} \times 72 = 168$.

PROBLÈME III. — *Une marchande apporte des œufs au marché. A une première personne, elle vend la moitié de ce qu'elle a, plus la moitié d'un œuf; à une seconde la moitié du reste plus la moitié d'un; enfin, à une troisième personne, la moitié de son second reste plus encore la moitié d'un. Après cette troisième vente, il ne lui reste plus rien; combien avait-elle apporté d'œufs?*

Digitized by Google

Soit x le nombre cherché; au premier acquéreur, la marchande vend

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}; \quad \text{il lui reste alors} \quad x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{x-1}{2};$$

à la deuxième personne, elle vend

$$\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}; \quad \text{il lui en reste} \quad \frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{x-3}{4};$$

à la troisième personne, elle vend

$$\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}; \quad \text{il lui en reste} \quad \frac{x-3}{4}-\frac{x-3}{8}-\frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{x-7}{8}.$$

Or, d'après l'énoncé, ce dernier reste est nul; on a donc l'équation

$$\frac{x-7}{8}=0, \quad \text{d'où} \quad x=7.$$

On peut en effet vérifier que, avec 7 œufs, la marchande en vend d'abord 3 $\frac{1}{2}$, plus $\frac{1}{2}$, ou 4; il lui en reste 3, dont elle vend à la seconde personne 1 $\frac{1}{2}$, plus $\frac{1}{2}$ ou 2; enfin, au troisième acquéreur, elle vend la moitié de celui qui lui reste, plus $\frac{1}{2}$, et il ne lui reste plus rien.

On voit de plus que ces 3 ventes ont pu se faire sans que les conditions de l'énoncé aient forcé de partager des œufs.

Cette question est très-propre à faire ressortir les avantages des méthodes algébriques pour simplifier la résolution des problèmes. Voici, en effet, comment il eût fallu raisonner pour arriver péniblement au résultat par la simple spéculation arithmétique :

A la troisième vente, la marchande vend la moitié de son second reste, plus $\frac{1}{2}$, et il ne lui reste rien; donc ce demi-œuf est précisément égal à la moitié du reste, et ce reste est égal à 1.

A la deuxième vente, elle a vendu la moitié du premier reste, plus un demi-œuf, et il lui en est resté 1; donc, si elle n'avait vendu que la moitié du premier reste, il lui en serait resté 1 $\frac{1}{2}$, qui eût été nécessairement égal à la moitié vendue du premier reste. Ce premier reste eût par conséquent été égal à 3.

Enfin, à la première vente, elle vend la moitié de ce qu'elle a apporté, plus $\frac{1}{2}$, et il lui en reste 3; donc, si elle n'eût vendu que la moitié de sa provision, il lui en serait resté 3 $\frac{1}{2}$ qui eussent été égaux à la moitié vendue, et par suite son apport eût été le double de 3 $\frac{1}{2}$, ou 7.

PROBLÈME IV. — *On a des pièces de 2 et de 5 francs, et l'on veut payer 26 francs en donnant en tout 10 pièces; combien doit-on en donner de chaque espèce?*

Digitized by Google

Soient x le nombre des pièces de 2 francs, et y celui des pièces de 5 francs; la valeur des premières sera $2x$, celle des secondes $5y$, et le tout vaudra 26 francs. De plus, le nombre des $x+y$ pièces est égal à 10; nous aurons donc, pour déterminer x et y, les deux équations

$$\begin{cases} 2x+5y=26, \\ x+y=10, \end{cases}$$

qui sont satisfaites par

$$\begin{cases} x=8, \\ y=2. \end{cases}$$

On vérifie en effet que, avec 8 pièces de 2 francs on fait 16 francs, et avec 2 pièces de 5 francs on a 10 francs; en tout 26 francs.

Remarque. — On aurait pu résoudre ce problème en ne mettant en évidence qu'une seule inconnue; car, si x est le nombre des pièces de 2 francs, celui des pièces de 5 francs sera $10-x$, et l'on aura, comme ci-dessus, la relation

$$2x+5(10-x)=26,$$

d'où

$$x=8 \quad \text{et} \quad 10-x=2.$$

PROBLÈME V. — *Un nombre est composé de trois chiffres dont la somme est* 11; *le chiffre des unités est double de celui des centaines, et si l'on ajoute* 297 *au nombre cherché, on obtient ce nombre renversé. On demande quel est ce nombre?*

Appelons x, y, z dans leur ordre les chiffres du nombre cherché; ce nombre sera représenté algébriquement par $100x+10y+z$, et le nombre renversé par $100z+10y+x$. Les trois équations du problème sont dès lors faciles à établir d'après les trois conditions de l'énoncé.

Ce sont :

$$\begin{cases} x+y+z=11, \\ z=2x, \\ 100x+10y+z+297=100z+10y+x; \end{cases}$$

ou, après réduction,

$$\begin{cases} x+y+z=11, \\ z=2x, \\ x+3=z. \end{cases}$$

Des deux dernières on tire sans difficulté $x=3$ et $z=6$; ces valeurs mises dans la première donnent $y=2$; le nombre cherché est donc 326.

32. Dans les problèmes qui viennent d'être résolus, nous n'avons trouvé que des *valeurs positives* des inconnues; ces valeurs ont été des réponses aux questions, dans le sens même de leur énoncé, et il en est

Digitized by Google

généralement ainsi; mais on rencontre toutefois des cas où toutes les valeurs positives des inconnues ne sont pas admissibles, ainsi qu'il arrive lorsque le problème contient certaines conditions qui n'ont pu être introduites dans les équations: il est clair, en effet, que le Problème V n'eût pas été résolu, si les équations eussent mis en évidence des valeurs fractionnaires pour les inconnues, puisque les chiffres d'un nombre doivent nécessairement exprimer des entiers.

Quand on trouve, et cela arrive souvent, des *valeurs négatives* pour les inconnues d'un problème, on est généralement averti que la mise en équations, qui est la traduction algébrique de l'énoncé, est entachée d'un vice en ce qui concerne le *sens* de telle ou telle condition. Ces valeurs négatives, abstraction faite de leur signe, peuvent être regardées comme la réponse à un problème dont l'énoncé ne différerait de celui du problème proposé qu'en ce que certaines quantités, d'*additives* qu'elles étaient, deviendraient *soustractives*, et réciproquement. Nous allons donner un exemple de ce genre d'interprétation.

PROBLÈME VI. — *Un père a* 53 *ans et son fils* 31; *dans combien d'années le père aura-t-il un âge double de celui de son fils?*

Soit x le nombre d'années cherché; le père aura alors $53+x$ années, le fils $31+x$, et l'équation du problème sera

$$53+x=2(31+x),$$

laquelle est satisfaite algébriquement par

$$x=-9.$$

Cette réponse paraît tout d'abord dénuée de sens; mais remarquons que, si dans l'équation nous eussions remplacé x par $-x$, nous eussions obtenu la nouvelle relation

$$53-x=2(31-x),$$

laquelle eût évidemment admis pour racine

$$x=9,$$

et qui n'est autre que celle que fournirait l'énoncé primitif, si l'on y demandait à quelle époque l'âge du père a été double de celui du fils, et non plus à quelle époque future cette circonstance aura lieu.

33. Quelquefois l'équation d'un problème, ou l'équation résultant de l'élimination des inconnues, se présente sous la forme étrange

$$0\times x=b,$$

d'où

$$x=\frac{b}{0}.$$

Digitized by Google

Elle ne peut évidemment être satisfaite par aucun nombre déterminé ; mais si nous remarquons que la valeur du quotient $\frac{b}{a}$ augmente indéfiniment à mesure que l'on suppose que a diminue, b restant constant, on comprendra que, quand a est devenu nul, la valeur du quotient $\frac{b}{a}$ a pris son accroissement limite. C'est cette valeur extrême que l'on appelle l'*infini*, et que l'on représente par le signe ∞.

Une telle circonstance indique toujours une *impossibilité* manifeste du problème posé, en tant qu'il ne peut s'accommoder que de solutions finies; la question suivante en offre un exemple.

PROBLÈME VII. — *Trouver un nombre dont la moitié, plus le tiers, plus le quart et plus* 3, *fassent une somme égale à ses* $\frac{13}{12}$ *plus* 5.

En désignant ce nombre par x, nous aurons pour équation à résoudre

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+3=\frac{13}{12}x+5,$$

ou

$$6x+4x+3x+36=13x+60,$$

ou enfin

$$(13-13)x=24,$$

c'est-à-dire

$$0\times x=24, \quad \text{ou} \quad x=\frac{24}{0}=\infty.$$

Remarque. — Nous venons de poser la formule symbolique

$$\frac{b}{0}=\infty;$$

elle peut aussi se transformer en celle-ci

$$\frac{b}{\infty}=0.$$

En langage ordinaire, toutes deux se traduisent ainsi : *Le quotient d'une quantité finie quelconque par zéro est l'infini, et le quotient d'une quantité finie par l'infini est zéro.*

34. Enfin il peut arriver que, l'équation finale se présentant sous la forme

$$0\times x=0,$$

elle soit par conséquent satisfaite par toutes les valeurs finies de l'inconnue; dans ce cas, l'équation et le problème lui-même sont dits *indéterminés;* tel est le caractère général des questions dans lesquelles l'inconnue ressort avec la forme

$$x=\frac{0}{0}.$$

Digitized by Google

PROBLÈME VIII. — *Trouver un nombre dont la moitié, le tiers et le quart plus* 5, *fassent une somme égale à ses* $\frac{13}{12}$ *augmentés de la même quantité* 5.

Nous aurons, comme dans le Problème VII,

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+5=\frac{13}{12}x+5,$$

équation qui devient

$$6x+4x+3x+60=13x+60,$$

et donne

$$(13-13)x=60-60$$

ou

$$0\times x=0.$$

Un nombre quelconque satisfait donc à cette équation qui est essentiellement indéterminée; et cette indétermination se retrouve dans l'énoncé, si l'on remarque que la somme des trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ étant précisément égale à $\frac{13}{12}$, l'équation du problème revenait à l'identité

$$\frac{13}{12}x+5=\frac{13}{12}x+5,$$

qui met en évidence l'indétermination, aussi bien que l'impossibilité du problème précédent eût été manifestée par la relation

$$\frac{13}{12}x+3=\frac{13}{12}x+5.$$

38. Toutefois, la valeur de x peut souvent prendre la forme $\frac{0}{0}$, sans qu'il y ait indétermination réelle; cela arrivera notamment lorsqu'on aura laissé subsister au numérateur et au dénominateur de cette inconnue un facteur commun susceptible de s'annuler.

Supposons en effet que, par la résolution des équations d'un problème, on soit arrivé à une expression de la forme

$$x=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}.$$

Si l'on vient à donner à a et à b des valeurs égales, celle de x se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais, en remarquant que les deux termes de cette fraction sont divisibles par $a-b$, on pourra supprimer ce facteur commun, et alors l'inconnue deviendra

$$x=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

Digitized by Google

L'hypothèse $a = b$ n'y donne plus la valeur singulière $\frac{0}{0}$, mais la quantité parfaitement déterminée $\frac{3a}{2}$.

Au lieu de l'expression précédente, on aurait pu avoir

$$x = \frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{(a-b)^2}{a^2 - b^2},$$

qui toutes deux deviennent $\frac{0}{0}$ quand on y suppose $a = b$. Mais la suppression du facteur commun $a - b$ les ramène respectivement à

$$x = \frac{a+b}{a-b}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{a-b}{a+b},$$

et celles-ci, pour $a = b$, deviennent

$$x = \frac{2a}{0}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{0}{2a}.$$

De ce qui précède on peut conclure que le symbole $\frac{0}{0}$, qui annonce généralement l'indétermination, indique quelquefois la présence d'un facteur commun par la suppression duquel l'expression peut prendre une valeur *finie*, *infinie* ou *nulle*.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

36. Toute équation du second degré à une inconnue peut se ramener à la forme générale

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

a, b et c étant des nombres connus, et a étant toujours positif, puisqu'il suffirait, au besoin, de changer (24) les signes de tous les termes de l'équation, pour que le coefficient de x^2 prît le signe $+$.

Si nous multiplions tous les termes de cette équation par $4a$; puis, qu'après avoir fait passer le terme tout connu dans le second membre, nous ajoutions b^2 aux deux membres, nous aurons, sans que les racines de l'équation aient pu être altérées,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

ou

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Il s'agit maintenant d'extraire la racine carrée des deux membres de cette relation; celle du premier sera tout naturellement $2ax + b$; mais, pour obtenir celle du second, il faut remarquer que $b^2 - 4ac$ est aussi bien le carré de $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ que celui de $+\sqrt{b^2 - 4ac}$; nous devrons en consé-

Digitized by Google

quence affecter ce radical du double signe ±, pour ne laisser de côté aucune des solutions de l'équation.

Nous écrirons donc

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

d'où

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De là cette règle générale : *Dans une équation du second degré, la valeur de l'inconnue est égale au coefficient du second terme pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du carré de ce coefficient diminué de quatre fois le produit du terme tout connu par le coefficient du premier terme; le tout divisé par le double de ce dernier coefficient.*

Cette règle se simplifie encore dans le cas où le coefficient b est pair et égal à $2b'$; car alors, au lieu de multiplier l'équation par $4a$, on ne la multipliera que par a, et il viendra

$$a^2x^2 + 2ab'x + ac = 0,$$
$$a^2x^2 + 2ab'x + b'^2 = b'^2 - ac,$$
$$(ax + b')^2 = b'^2 - ac,$$
$$ax + b' = \pm\sqrt{b'^2 - ac},$$
$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Par conséquent, *dans une équation du second degré dont le coefficient du terme en x est pair, la valeur de l'inconnue est égale à la moitié de ce coefficient pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du carré de ladite moitié diminué du produit du terme tout connu par le coefficient du premier terme; le tout divisé par ce dernier coefficient.*

37. La formule générale ci-dessus établie montre que toute équation du second degré a deux racines, et n'en peut avoir que deux. Ces deux racines sont :

l'une

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

l'autre

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si nous les ajoutons l'une avec l'autre, les deuxièmes termes se détruiront, et il restera

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Digitized by Google

En en faisant le produit, nous aurons à multiplier la somme de $-\frac{b}{2a}$ et de $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ par la différence de ces mêmes quantités, et le produit sera égal à la différence de leurs carrés; il viendra donc

$$x'x'' = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

On voit donc que *dans une équation du second degré, 1° la somme des racines est égale au coefficient du second terme pris en signe contraire et divisé par celui du premier; 2° le produit des racines est égal au terme tout connu divisé par le coefficient du premier terme.*

Remarque. — Si le premier terme de l'équation a pour coefficient l'unité, le coefficient du second terme, pris en signe contraire, représente la somme des racines, et le terme tout connu leur produit.

38. Résolvons, comme exemples, quelques équations :

1°. $$x^2 - 10x + 21 = 0;$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-21}}{1} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2,$$

$$x' = 7, \quad x'' = 3;$$

$$x' + x'' = 10, \quad x'x'' = 21.$$

2°. $$10x^2 + 17x - 63 = 0;$$

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 + 4 \times 10 \times 63}}{20} = \frac{-17 \pm \sqrt{2809}}{20} = \frac{-17 \pm 53}{20},$$

$$x' = \frac{9}{5}, \quad x'' = -\frac{7}{2};$$

$$x' + x'' = \frac{9}{5} - \frac{7}{2} = \frac{18-35}{10} = -\frac{17}{10}, \quad x'x'' = \frac{9}{5} \times -\frac{7}{2} = -\frac{63}{10}.$$

3°. $$x^2 - 14x + 49 = 0;$$

$$x = 7 \pm \sqrt{49-49} = 7 \pm 0;$$

$$x' = x'' = 7.$$

4°. $$x^2 - 4x + 29 = 0;$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-29} = 2 \pm \sqrt{-25} = 2 \pm \sqrt{25 \times -1}$$

$$= 2 \pm \sqrt{25} \times \sqrt{-1} = 2 \pm 5\sqrt{-1},$$

$$x' = 2 + 5\sqrt{-1}, \quad x'' = 2 - 5\sqrt{-1}.$$

$$x' + x'' = 4, \quad x'x'' = 4 + 25 = 29.$$

Digitized by Google

39. Ces quatre exemples résument les principaux cas que peut présenter la résolution d'une équation du second degré. La première a ses deux racines entières et de même signe; la seconde a ses deux racines fractionnaires, l'une positive, l'autre négative, que l'on interprétera, dans le problème à résoudre, comme nous l'avons indiqué (32) pour le premier degré; la troisième équation n'a plus qu'une racine, ou plutôt ses deux racines sont devenues égales, parce que la quantité sous le radical est devenue égale à zéro. Cette circonstance correspond, dans l'équation générale, à la relation

$$b^2 - 4ac = 0,$$

ou

$$c = \frac{b^2}{4a}.$$

En mettant pour c cette valeur dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, elle devient

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0,$$

ou

$$\left(\sqrt{a} \times x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = 0,$$

et ne peut être satisfaite qu'autant que l'on a

$$\sqrt{a} \times x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{b}{2a},$$

comme le donne bien dans ce cas l'expression générale des racines.

Notre équation $x^2 - 14x + 49 = 0$ n'est, du reste, autre chose que $(x - 7)^2 = 0$, qui donne uniquement $x = 7$.

La quatrième équation résolue a donné sous le radical une quantité négative; ce radical ne peut avoir aucune valeur réelle, puisqu'il n'y a pas de quantité dont le carré soit négatif; il a été appelé *imaginaire*, et les racines elles-mêmes sont dites imaginaires; elles ne peuvent être considérées que comme des symboles algébriques qui, mis à la place de x dans l'équation, ont la propriété de rendre nul son premier membre.

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

40. Problème I. — *La somme de deux nombres est* 24, *leur produit est* 68; *quels sont ces deux nombres?*

Si nous désignons par x l'un de ces nombres, l'autre sera $24 - x$, et,

Digitized by Google

leur produit étant 63, nous pourrons écrire

$$x(24 - x) = 63,$$

d'où

$$24x - x^2 = 63,$$

ou enfin

$$x^2 - 24x + 63 = 0.$$

La résolution de cette équation donne

$$x = 12 \pm \sqrt{144 - 63} = 12 \pm \sqrt{81} = 12 \pm 9,$$

et ses deux racines sont

$$x' = 21, \quad x'' = 3.$$

Ces deux valeurs de x sont les deux nombres cherchés; elles devaient, en effet, être fournies par la même équation, puisque nous avons désigné par x l'un quelconque des deux nombres, sans spécifier l'un plutôt que l'autre. La propriété du n° 37 nous permettait d'ailleurs aussi de conclure que les nombres cherchés seraient les deux racines d'une équation du second degré ayant pour coefficients à ses trois termes 1, — 24 et 63; nous aurions donc pu poser tout d'abord l'équation

$$x^2 - 24x + 63 = 0.$$

PROBLÈME II. — *Un ouvrier reçoit* 96 *francs pour salaire; un autre, qui a travaillé* 6 *jours de moins, reçoit* 54 *francs; si le premier avait au contraire manqué pendant* 6 *jours, et que le second eût travaillé tous les jours, ils eussent reçu tous les deux la même somme. On demande pendant combien de jours chacun a travaillé, et le prix de leur journée?*

Soit x le nombre de jours de travail du premier ouvrier; puisqu'il a reçu 96 francs pour x journées, le prix de sa journée était $\frac{96}{x}$. De même, le second ouvrier, qui n'a travaillé que pendant $x - 6$ jours, et qui a reçu 54 francs, gagnait $\frac{54}{x-6}$ par jour.

Si le premier ouvrier n'eût travaillé que pendant $x - 6$ jours, il n'eût reçu que $x - 6$ fois $\frac{96}{x}$ ou $\frac{96(x-6)}{x}$; si le second eût, au contraire, travaillé pendant x jours, il eût reçu x fois $\frac{54}{x-6}$ ou $\frac{54x}{x-6}$; et, puisque ces deux sommes eussent été égales, nous devons poser l'équation

$$\frac{96(x-6)}{x} = \frac{54x}{x-6},$$

dont la résolution donne les deux racines

$$x' = 24, \quad x'' = \frac{24}{7}.$$

Digitized by Google

La première de ces deux solutions se vérifie parfaitement ; le premier ouvrier a travaillé 24 jours, et a gagné $\frac{96}{24}$ ou 4 francs par jour; le second, qui n'a travaillé que 18 jours, a gagné $\frac{54}{18}$ ou 3 francs par jour. Si le premier eût travaillé seulement 18 jours, il eût gagné 72 francs, justement autant que le second, s'il eût travaillé 24 jours.

La seconde solution ne saurait convenir à la question, puisqu'elle conduirait à conclure que le second ouvrier a travaillé pendant $\left(\frac{24}{7} - 6\right)$ journées, ou $-\frac{18}{7}$ jours; cette circonstance tient à ce que nous n'avons pu introduire dans l'équation la condition essentielle qui résulte de ce que le premier ouvrier a travaillé pendant au moins 6 jours, puisque le second a travaillé 6 jours de moins que lui.

PROBLÈME III. — *Deux personnes ont acheté chacune pour* 240 *francs de drap; mais la seconde, qui en a* 3 *mètres de moins, paye le sien* 4 *francs de plus par mètre. Combien de mètres de drap chaque personne a-t-elle achetés?*

Appelons x le nombre de mètres achetés par la première personne, la seconde en aura acheté $x - 3$; la première aura donc payé son drap $\frac{240^{fr}}{x}$ et la deuxième $\frac{240^{fr}}{x-3}$. Or, le premier de ces deux prix est inférieur à l'autre de 4 francs; nous aurons donc entre eux la relation

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x-3} - 4;$$

d'où l'on tire

$$x^2 - 3x - 180 = 0,$$

et, en résolvant,

$$x' = 15, \quad x'' = -12.$$

La première racine répond directement à la question; la première personne a acheté 15 mètres de drap à $\frac{240}{15}$ ou 16 francs le mètre; la seconde en a acheté 12, à raison de $\frac{240}{12}$ ou 20 francs, et ce dernier prix surpasse bien de 4 francs le premier.

Quant à la seconde racine, $x'' = -12$, elle ne peut répondre à la question posée que moyennant une certaine interprétation (32) qui y modifie le sens de quelque condition. Ici l'idée d'*achat* se transforme naturellement en celle de *vente*, qui lui est opposée, et cette modifica-

Digitized by Google

tion doit nécessairement se traduire algébriquement par un changement de signe de la quantité achetée; l'énoncé primitif peut donc se remplacer, à ce point de vue, par le suivant :

Deux personnes ont vendu chacune pour 240 *francs de drap; mais la seconde, qui en a vendu* 3 *mètres de plus, a reçu* 4 *francs de moins par mètre. Combien de mètres de drap chaque personne a-t-elle vendus?*

L'équation de ce nouveau problème sera

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x+3} + 4, \quad \text{ou} \quad x^2 + 3x - 180 = 0,$$

qui n'est autre chose que la première, dans laquelle on changerait x en $-x$, et qui, résolue, donnerait

$$x' = 12, \quad x'' = -15.$$

Comme on devait s'y attendre, ces racines sont les mêmes que précédemment, mais avec des signes contraires; la première satisfait directement au nouvel énoncé; la seconde nous ramène au problème primitif, au moyen d'une interprétation pareille à celle qui vient de nous occuper.

Digitized by Google

Digitized by Google

GÉOMÉTRIE.

PRÉLIMINAIRES.

1. La *Géométrie* est la science qui traite des propriétés et de la mesure de l'*étendue*.

Un corps, quelque petit qu'il soit, présente de l'étendue dans tous les sens; toutefois, on est le plus souvent conduit à ne considérer cette étendue que dans trois sens principaux, que l'on appelle *dimensions*, et que l'on désigne sous les noms de *longueur, largeur, hauteur*. Au lieu de hauteur on dit souvent, selon les cas, *profondeur* ou *épaisseur*.

2. Les limites par lesquelles les corps se manifestent à nos sens sont des *surfaces*. Une surface n'étant qu'une enveloppe idéale, dépourvue d'épaisseur, ne peut avoir que deux dimensions, la longueur et la largeur.

Quand un corps présente plusieurs faces, les lieux de leurs intersections sont des *lignes* qui n'ont plus qu'une seule dimension, la longueur.

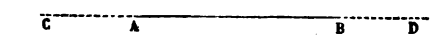
Enfin on appelle *point* le lieu de la rencontre de deux lignes; le point n'a d'étendue dans aucun sens; il n'a par conséquent aucune dimension, il n'a non plus aucune forme.

Les surfaces, les lignes et les points peuvent se concevoir et s'étudier indépendamment des corps sur lesquels ils se trouvent situés, c'est-à-dire, abstraction faite d'une ou de deux des dimensions de ces corps. C'est par cet effort du raisonnement que nous considérerons tantôt des surfaces ou des lignes indéfinies, tantôt des lignes et des points isolés des surfaces ou des lignes auxquelles ils doivent naissance.

3. L'étude de la Géométrie élémentaire commencera donc rationnellement par les lignes, ou du moins par celles des lignes les plus simples qui sont nécessaires au but que nous nous proposons; viendront ensuite quelques surfaces; puis les *volumes*, c'est-à-dire les corps eux-mêmes ou la portion de l'espace que renferme leur surface. Le point ne trouve pas place en tête de cette nomenclature par la raison que, dénué de dimension et de forme, il ne possède isolément aucune propriété qui puisse motiver un examen spécial.

4. Parmi les lignes, celle qui s'offre la première est la *ligne droite*, que l'on peut concevoir aisément comme décrite par un point A qui serait mû de manière à tendre constamment vers un autre point B fixe et déterminé.

Fig. 1.



Digitized by Google

La principale conséquence de cette génération de la ligne droite la constitue comme le chemin le plus court pour aller du point A au point B, et, par suite, comme devant être naturellement choisie pour mesurer la *distance* de ces deux points.

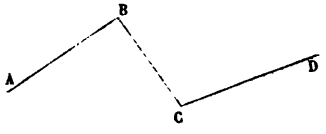
La ligne droite AB peut être indéfiniment prolongée dans les deux sens au delà des points A et B vers les points C et D, et l'ensemble ne forme nécessairement encore qu'une seule et même droite. La direction d'une ligne droite est donc déterminée par deux points, et deux droites ne peuvent avoir deux points communs ou une partie commune, sans coïncider dans toute leur étendue.

5. Si l'on imagine que, contrairement à ce qui a été dit pour la ligne droite, le point décrivant change à chaque instant de direction, par degrés insensibles et suivant une loi de variation quelconque, on aura l'idée d'une *ligne courbe;* la figure ci-contre présente une ligne AB de cette espèce.

Fig. 2.

Il ressort clairement de ce qui précède que, entre deux points A et B, on ne peut mener qu'une seule ligne droite, mais que l'on peut faire passer par ces deux points une infinité de courbes différentes.

Fig. 3.



6. Une ligne est dite *brisée*, comme celle que montre la *fig.* 3, lorsqu'elle est formée de plusieurs portions de ligne droite.

7. On distingue de même plusieurs espèces de surfaces, parmi lesquelles se présente tout d'abord la *surface plane*, ou le *plan*. Cette surface se caractérise par une propriété exclusive qui consiste en ce que l'on peut, dans tous les sens, y appliquer exactement ou y tracer une ligne droite.

De même qu'il ne peut y avoir qu'une seule sorte de ligne droite, on ne saurait imaginer qu'une seule espèce de plan.

Par une autre analogie avec la ligne droite, le plan peut être prolongé par la pensée indéfiniment et dans tous les sens; l'ensemble ne forme toujours qu'un seul et même plan.

Conformément au programme et à la logique, nous nous occuperons d'abord des propriétés de l'étendue dans un seul et même plan; en d'autres termes, nous étudierons en premier lieu la *Géométrie plane*.

8. Pour plus de clarté, nous rappellerons ici que l'on nomme en Géométrie, comme dans tout autre ordre d'idées:

Théorème, une vérité qui devient évidente au moyen d'une démonstra-

Digitized by Google

tion : l'énoncé d'un théorème s'appuie toujours sur une *hypothèse* ou supposition, et se termine par une *conclusion* ;

Problème, une question qui exige une solution : son énoncé comporte également une hypothèse ou *donnée*, et une conclusion qui est l'objet du problème ;

Réciproque, une proposition inverse d'un théorème ou d'un problème, dans l'énoncé de laquelle la supposition primitive prend la place de la conclusion, et la conclusion celle de la supposition ;

Corollaire, une conséquence qui découle d'une ou plusieurs propositions démontrées.

GÉOMÉTRIE PLANE.

NOTIONS SUR LA LIGNE DROITE ET LES ANGLES.

9. On mesure la distance de deux points, ou la longueur d'une droite donnée, en cherchant le rapport de cette droite à une autre prise pour unité.

Deux droites sont dans le même rapport que deux nombres, 7 et 13 par exemple, quand une troisième droite est contenue 7 fois dans la première et 13 fois dans la seconde ; cette troisième droite est alors une *mesure commune* aux deux autres. On voit donc que, pour déterminer le rapport de deux lignes, il faut chercher une mesure commune à ces deux lignes, et diviser l'un par l'autre les nombres qui expriment combien de fois chacune des deux lignes contient la commune mesure.

10. Deux droites qui ont une commune mesure sont dites *commensurables* entre elles ; elles sont dites *incommensurables* dans le cas contraire. Toutefois, on comprend aisément que, en descendant suffisamment dans l'échelle des grandeurs, il doit toujours être possible d'atteindre une ligne assez petite pour qu'elle soit contenue exactement à la fois dans deux lignes données quelconques, ou autrement, pour que les différences, s'il y en a, arrivent à un tel degré de petitesse qu'elles échappent complétement à nos sens. Ce n'est donc que théoriquement que certaines lignes peuvent se présenter comme incommensurables, et nous regarderons, dans ce qui va suivre, deux lignes ou deux grandeurs quelconques comme ayant toujours une commune mesure, quelque petite qu'elle soit ; par suite de ce principe, une vérité démontrée pour deux quantités commensurables entre elles, sera toujours considérée comme nécessairement établie pour le cas général de deux quantités quelconques, même théoriquement considérées comme incommensurables.

11. Sauf un cas exceptionnel qui sera l'objet d'un examen tout spécial,

Digitized by Google

deux droites BD et EF se rencontrent toujours en un point A. Chacune des quatre portions dans lesquelles est partagé le plan s'appelle un *angle;* le point A est le *sommet* commun, et les quatre portions de droites sont les côtés de ces angles.

Fig. 4.

On désigne ordinairement un angle par trois lettres en mettant au milieu celle qui occupe le sommet; c'est ainsi que la figure ci-contre nous offre les quatre angles BAE, EAD, DAF et FAB. S'il n'y avait qu'un seul angle au même point, on pourrait le désigner sans confusion par la seule lettre du sommet.

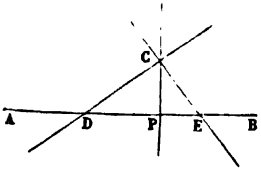
Les quatre angles de la *fig.* 4 sont deux à deux *adjacents* ou *opposés par le sommet;* les angles BAE et EAD, par exemple, qui ont le même sommet et un côté commun, sont adjacents; les angles BAE et DAF, qui ont leurs côtés se prolongeant les uns les autres, sont opposés par le sommet.

La grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés, mais seulement de leur écartement. Deux angles sont égaux lorsque, étant posés l'un sur l'autre, ils se recouvrent parfaitement, indépendamment de la longueur relative de leurs côtés, qui sont toujours censés pouvoir être prolongés indéfiniment.

DROITES PERPENDICULAIRES.

12. Pour étudier commodément les diverses positions relatives que deux droites peuvent occuper l'une par rapport à l'autre, nous considérerons l'une d'elles AB comme fixe, et nous supposerons que l'autre CD tourne d'un mouvement continu autour de l'un quelconque C des points de sa direction.

Fig. 5.



Dans la position CD, la droite mobile fait avec AB deux angles adjacents ADC, BDC qui sont visiblement inégaux; ADC > BDC.

Si le mouvement a lieu de telle sorte que le point de croisement se rapproche du point B, il arrive nécessairement une position CP où les deux angles adjacents APC et BPC sont égaux, puisque la suite du mouvement amène forcément aussi la position CE dans laquelle AEC < BEC.

Dans cette position remarquable et *unique* que nous avions en vue de mettre en relief, et dans laquelle les deux angles adjacents sont égaux, la droite CP est dite *perpendiculaire* sur AB.

Nous pouvons donc dès à présent conclure de cette analyse que, *par un point donné, on peut toujours imaginer une droite perpendiculaire sur une autre droite, mais on n'en peut imaginer qu'une.*

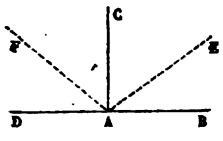
Digitized by Google

Chacun des angles adjacents égaux formés par une droite perpendiculaire à une autre s'appelle un angle *droit;* les angles inégaux situés de chaque côté d'une droite non perpendiculaire ou *oblique* sur une autre, sont l'un *aigu*, l'autre *obtus*. Ainsi, l'angle BDC, qui est moindre qu'un droit, est aigu; ADC, qui est supérieur à un droit, est un angle obtus.

13. On a vu que, dans le mouvement de la droite CD autour du point C, il n'y a qu'un seul moment où les deux angles adjacents soient égaux; les angles aigus ou obtus sont donc en nombre infini; mais l'angle droit est unique; il est le même en quelque point de la droite AB qu'il soit formé; il est aussi le même quelle que soit la droite sur laquelle on le considère; bref, *tous les angles droits sont égaux entre eux.*

14. Si le point autour duquel on fait tourner la droite mobile était situé sur la droite fixe elle-même, comme le point A dans la *fig.* 6, on verrait : 1° que la somme des deux angles adjacents DAF et FAB est constante pour toutes les positions de la droite mobile; 2° que cette somme est égale à celle des deux angles droits CAD, CAB. De là ce principe que *la somme de tous les angles formés autour d'un point et d'un même côté d'une droite est toujours égale à deux angles droits.*

Fig. 6.



Deux angles, tels que BAE et EAC, dont la somme fait un angle droit, sont dits *complémentaires;* l'un est le *complément* de l'autre.

Deux angles, tels que BAE et EAD, dont la somme fait deux angles droits, sont dits *supplémentaires;* l'un est le *supplément* de l'autre.

15. *Les angles opposés par le sommet sont égaux entre eux.* Il résulte, en effet, du numéro précédent, que la somme (*fig.* 4) des angles BAE et DAE placés du même côté de la droite BD est égale à deux droits, ainsi que celle des deux angles DAE et DAF situés du même côté de la droite EF. On a donc

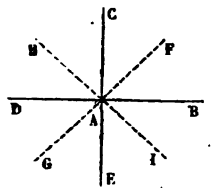
$$BAE + DAE = DAE + DAF,$$

égalité qui entraîne nécessairement la suivante :

$$BAE = DAF.$$

On prouverait de la même manière que l'angle DAE est égal à BAF.

Fig. 7.



Corollaire. — Si l'on prolonge au-dessous de AB la droite AC qui fait avec BD deux angles droits CAB et CAD, les angles BAE et DAE formés par le prolongement AE seront respectivement égaux aux deux premiers qui leur sont opposés par le sommet; or, ceux-ci étant droits, les angles BAE et DAE seront aussi droits, et l'on devra conclure que, CE étant perpendiculaire sur BD, BD est également perpendiculaire sur CE.

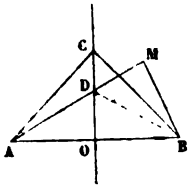
Digitized by Google

Les quatre angles égaux formés autour du point A sont droits ; si l'on mène par ce point autant de droites AF, AH, etc., que l'on voudra, la somme de tous les angles égaux ou inégaux BAF, FAC, CAH, etc., que ces droites formeront entre elles, sera visiblement constante et égale à quatre angles droits.

16. *Tout point de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est à égale distance des extrémités de cette droite, et tout point pris hors de cette perpendiculaire est à des distances inégales des mêmes extrémités.*

Pour prouver la première partie de ce théorème, nous plierons le plan de la figure selon la perpendiculaire CO, pour rabattre la partie de gauche sur celle de droite. A cause de l'égalité des deux angles droits, OA tombera sur OB, et par suite la droite CA s'appliquera sur CB ; donc CA = CB. On montre aussi facilement que MB est plus petit que MA, en joignant le point D au point B par une droite BD qui, d'après ce que l'on vient de voir, est égale à AD. La figure MBD donne alors (4)

Fig. 8.



$$MB < MD + BD,$$

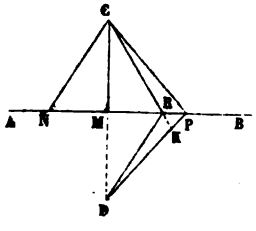
c'est-à-dire

$$MB < MD + DA, \quad \text{ou} \quad < MA.$$

COROLLAIRE. — *Toute droite dont deux points sont également distants des extrémités d'une autre droite, est perpendiculaire sur le milieu de celle-ci ;* car ces deux points appartiennent à ladite perpendiculaire, laquelle, ayant deux points communs avec la proposée, se confond avec elle.

17. *Si d'un point pris hors d'une droite, on mène à cette droite la perpendiculaire et plusieurs obliques : 1° la perpendiculaire sera plus courte que toute oblique ; 2° deux obliques également écartées du pied de la perpendiculaire seront égales ; 3° de deux obliques inégalement écartées, la plus écartée sera la plus longue.*

Fig. 9.



Pour établir cette triple propriété, nous prolongerons la perpendiculaire CM d'une quantité MD égale à elle-même ; puis, nous joindrons les points R et P au point D.

1°. Le point M étant le milieu de la droite CD, les points R et P de la perpendiculaire AB sont également distants (16) des extrémités C et D ; par conséquent, CR = DR, et CP = DP.

Digitized by Google

Maintenant, de C en D le plus court chemin est la droite CD, et l'on a

$$CM + MD < CR + DR,$$

ou

$$2CM < 2CR,$$

ou enfin,

$$CM < CR.$$

2°. Le point M étant le milieu de NR, le point C est également distant de N et de R, et l'on a (16)

$$CN = CR.$$

3°. En prolongeant CR en K, et considérant encore que de C en K le plus court chemin est CK, de même que de R en D le plus court chemin est RD, on posera successivement :

$$CK \quad \text{ou} \quad CR + RK < CP + PK,$$

$$RD < RK + KD.$$

La somme de ces deux inégalités membre à membre donnera, après suppression du terme commun RK,

$$CR + RD < CP + PK + KD, \quad \text{ou} \quad < CP + PD,$$

c'est-à-dire

$$2CR < 2CP, \quad \text{ou} \quad CR < CP.$$

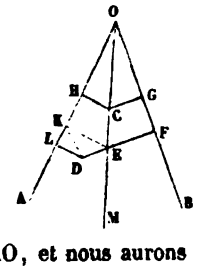
Corollaire I. — La perpendiculaire CM est la plus courte de toutes les droites que l'on peut mener du point C sur la droite AB; elle est, par conséquent, la mesure naturelle de la *distance de ce point à cette droite.*

Corollaire II. — *D'un point à une droite on ne peut mener plus de deux droites égales.*

18. *Tout point situé sur la droite qui partage un angle en deux parties égales*, en un mot, *sur la bissectrice de cet angle, est également distant des deux côtés dudit angle, et tout point situé hors de cette bissectrice est inégalement distant des mêmes côtés.*

En pliant la figure suivant la bissectrice OM, le côté OA se rabat nécessairement sur OB, puisque les angles AOM et BOM sont égaux; le point C n'ayant d'ailleurs pas bougé dans ce mouvement, la perpendiculaire CH ne pourra tomber que sur CG, sans quoi l'on pourrait avoir deux perpendiculaires tirées du même point C sur la même droite OB; par conséquent, le point H tombe en G, et CH = CG.

Fig. 10.



Pour établir maintenant que DL est plus petit que DF, nous mènerons EK perpendiculaire sur AO, et nous aurons EK égal à EF, puisque le point E est sur la bissectrice; nous tirerons ensuite DK.

Digitized by Google

Or la perpendiculaire DL est plus petite que l'oblique DK; d'un autre côté, le plus court chemin de K en D étant la droite DK, cette droite DK est elle-même plus petite que DE + EK, ou DE + EF, ou DF; par conséquent et à plus forte raison, nous avons

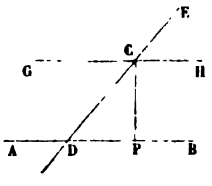
$$DL < DF.$$

DROITES PARALLÈLES.

19. Nous avons vu (12) que, lorsque l'on considère une droite et un point situé au dehors de cette droite, on peut toujours abaisser une perpendiculaire du point sur la droite, et que cette perpendiculaire est unique.

Supposons donc abaissée du point C sur AB cette perpendiculaire unique CP avec laquelle la droite mobile CD fait deux angles adjacents inégaux DCP et ECP. Si maintenant nous concevons que la droite CD s'infléchisse de manière que son point de rencontre D avec AB s'éloigne du point P, l'angle DCP augmentera, tandis que son supplémentaire ECP diminuera d'autant; il arrivera enfin un moment où les deux angles supplémentaires dont il s'agit seront égaux, tels que GCP et HCP, et la droite GH sera alors aussi perpendiculaire à CP. A ce moment unique, le point de rencontre D se sera éloigné jusqu'à l'infini, ce qui veut dire que les deux droites ne se rencontreront plus du tout; car, si elles se coupaient en un certain point, on verrait partir de ce point deux perpendiculaires à la droite CP, ce qui (12) est impossible. Ce point de rencontre ne saurait d'ailleurs exister d'un côté de la perpendiculaire CP, sans que, à cause de la symétrie de la figure par rapport à cette droite, on ne doive en concevoir un second pareillement situé de l'autre côté, auquel cas les deux droites AB et GH, ayant deux points communs, se confondraient.

Fig. 11.



Deux droites qui, comme AB et GH, ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge, sont appelées *droites parallèles*. Il faut toutefois ne pas donner à cette définition un sens trop absolu, et se rappeler que nous ne nous occupons ici que des propriétés de lignes contenues dans un seul et même plan; plus tard nous verrons que, dans l'espace, deux droites peuvent ne pas se rencontrer, sans être pour cela parallèles.

20. Les conséquences immédiates de ce qui précède sont les suivantes :

1°. *Par un point extérieur à une droite on peut toujours imaginer une autre droite parallèle à la première; mais on n'en peut imaginer qu'une.*

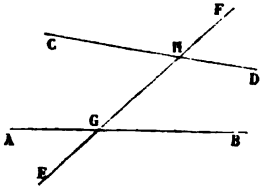
2°. *Deux droites en même temps perpendiculaires ou parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Digitized by Google

3°. *Quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire sur l'une d'elles est également perpendiculaire sur l'autre;* sans quoi la perpendiculaire à CP (*fig.* 11), menée au point C, serait nécessairement aussi parallèle à AB, et l'on aurait par le point C deux droites parallèles à AB, ce qui est impossible.

21. Lorsque deux droites quelconques sont coupées par une troisième, elles forment avec celle-ci huit angles qui sont égaux deux à deux comme opposés par le sommet.

Fig. 12.



Considérés par rapport aux deux premières droites, quatre de ces angles sont intérieurs ou *internes;* les quatre autres sont extérieurs ou *externes.* Par rapport à la sécante et pris deux à deux, ces angles sont du même côté, ou de côtés différents, c'est-à-dire *alternes.*

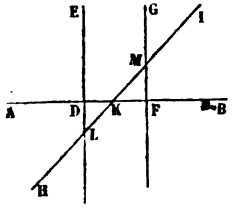
Accouplés d'une manière quelconque, les mêmes angles sont :

Alternes-internes, tels que, par exemple, CHG et BGH, AGH et DHG ;
ou *alternes-externes,* tels que CHF et BGE, DHF et AGE ;
ou *internes d'un même côté,* tels que CHG et AGH, BGH et DHG ;
ou *externes d'un même côté,* tels que FHD et BGE, FHC et AGE ;
ou enfin *internes-externes,* autrement dit *correspondants,* tels sont CHF et AGH, BGH et DHF, etc.

22. *Lorsque deux parallèles sont traversées par une troisième droite, deux angles alternes-internes sont égaux.*

En effet, si par le point K, milieu de LM, nous menons la perpendiculaire DF commune aux deux parallèles DE et FG, et si nous faisons tourner par la pensée autour du point K la partie gauche de la figure pour la placer sur la partie de droite, nous amènerons KL sur son égal KM. Les angles DKL et FKM étant égaux comme opposés par le sommet (15), la droite KA prend nécessairement la direction KB ; alors, puisque du point M on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire sur KB, la droite LD perpendiculaire sur KA tombera sur MF, qui est perpendiculaire à KB, et les deux angles alternes-internes KLD et KMF étant superposés sont égaux, comme il fallait le démontrer.

Fig. 13.



23. L'égalité des angles alternes-internes conduit à cette conséquence que les huit angles formés autour des points L et M par les deux parallèles et la sécante sont égaux deux à deux ou supplémentaires ; il est par con-

Digitized by Google

séquent établi que *les angles alternes-externes sont égaux ; que les angles internes ou externes d'un même côté sont supplémentaires ; que les angles correspondants sont égaux.*

24. La réciproque de l'importante proposition du n° 22 se démontre également sans difficulté ; elle exprime que *si les angles alternes-internes sont égaux, les deux droites coupées sont parallèles.*

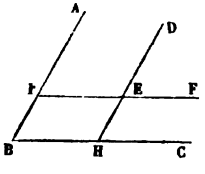
Pour démontrer cette vérité, nous ferons tourner la partie ELMG de la *fig.* 13 autour du milieu K de la transversale, et nous amènerons le point L en M, et le point M en L. L'angle ELM étant égal par hypothèse à l'angle KMF, la droite LE prendra la direction MF, et par la même raison MG tombera sur la direction DL. On voit par là que, si les droites DE et FG se coupaient d'un côté de la sécante AB, elles se couperaient aussi nécessairement de l'autre côté de cette ligne, et, par suite, devraient se confondre ensemble.

Remarque. — L'égalité des angles alternes-internes étant une conséquence immédiate de l'une quelconque des relations énoncées au n° 23, la réciproque qui nous occupe est également établie pour ces divers cas.

25. *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires ; ils sont égaux, si leurs côtés sont dirigés à la fois dans le même sens ou dans des sens contraires ; ils sont supplémentaires, lorsque cette condition n'est pas remplie.*

On voit, en effet, que les angles DEF et ABC sont tous deux correspondants de l'angle DHC auquel ils sont par conséquent égaux ; ils sont donc aussi égaux entre eux.

Fig. 14.



Il en est de même des angles ABC et IEH dont les côtés sont dirigés à la fois dans des sens contraires.

Si l'on considère maintenant les angles ABC et DEI dont les côtés sont, deux dans le même sens, et deux en sens contraires, on voit que le premier est correspondant et égal à AIE, lequel est lui-même supplémentaire de DEI, ces deux derniers étant internes et d'un même côté par rapport aux deux parallèles AB et DH coupées par la droite IF.

Corollaire. — Lorsque deux droites, sur un plan, sont trop écartées pour que l'on puisse les prolonger jusqu'à leur rencontre, il est néanmoins facile de tracer l'angle qu'elles font entre elles, en leur menant par un point quelconque deux parallèles qui font nécessairement, comme on vient de le voir, le même angle que les droites proposées elles-mêmes.

26. *Deux angles dont les côtés sont deux à deux perpendiculaires, sont égaux ou supplémentaires.*

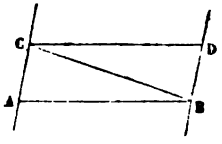
Digitized by Google

Pour s'en rendre compte, il suffit de faire tourner simultanément d'un angle droit et dans le même sens les deux côtés du premier angle autour de son sommet; cet angle ne changera pas de grandeur, mais ses côtés deviendront parallèles à ceux du second, et le théorème énoncé résultera directement alors de celui du n° 25.

27. *Les portions de parallèles comprises entre parallèles ont des longueurs égales.*

Pour prouver que AC = BD, tirons BC et supposons que, la figure ABC restant immobile, la portion BDC fasse une demi-révolution autour du point milieu de BC, en sorte que le point B vienne en C, et le point C en B.

Fig. 15.



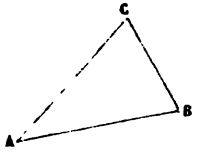
L'angle ACB étant égal à son alterne-interne DBC, la droite BD prendra la direction CA, et le point D tombera sur CA ou sur son prolongement : par une raison analogue, CD prendra la direction BA, et le point D tombera aussi sur BA ou sur son prolongement. Devant être à la fois sur les directions CA et BA, le point D ne peut tomber qu'au point d'intersection A, et par conséquent BD coïncide exactement avec AC; ces deux lignes sont donc égales.

Corollaire. — *Deux parallèles sont partout également distantes*, car les perpendiculaires communes qui mesurent les distances des deux lignes en leurs divers points sont toutes parallèles, et, par suite, égales entre elles.

TRIANGLES.

28. Un triangle est la portion limitée d'un plan qu'interceptent trois portions de droites qui ont deux à deux une extrémité commune.

Fig. 16.

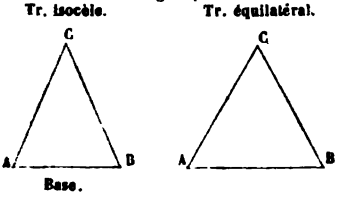


Tout triangle ABC a six éléments principaux : ses trois *côtés* AB, BC, CA, et ses trois *angles* qui sont A, B et C.

Les points A, B, C de jonction des côtés entre eux sont les *sommets* du triangle.

Au point de vue des côtés, on distingue particulièrement le triangle *isocèle*, qui a deux côtés égaux, le troisième côté étant généralement appelé la *base* du triangle; et le triangle *équilatéral*, dont les trois côtés sont égaux entre eux.

Fig. 17.



Digitized by Google

29. Quoi qu'il en soit, *dans un triangle, l'un quelconque des côtés est toujours plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

En effet (*fig.* 16 et 17), le plus court chemin du point A au point B étant la droite AB, on a d'abord

$$AB < AC + CB.$$

Par la même raison on a

$$AB + BC > AC,$$

et si l'on retranche de part et d'autre BC, il viendra

$$AB > AC - BC.$$ C. Q. F. D.

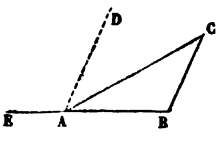
30. Un angle de triangle peut être aigu, droit ou obtus.

Dans le cas d'un angle droit, le triangle est dit *rectangle*, et le côté opposé à l'angle droit est l'*hypoténuse* du triangle.

Quelle que soit la nature des angles d'un triangle, leur somme est constante et toujours égale à deux angles droits.

On le prouve en menant par le sommet A du triangle ABC une parallèle au côté opposé BC, et prolongeant le côté AB. Il est évident que l'angle CAE, extérieur au triangle, se trouve ainsi partagé en deux autres respectivement égaux aux deux angles intérieurs opposés B et C, savoir: DAE égal à B comme lui étant correspondant par rapport aux parallèles AD et BC coupées par EB; CAD égal à C comme étant alterne-interne avec lui par rapport aux mêmes parallèles et à la sécante AC.

Fig. 18.



Les trois angles du triangle sont donc respectivement égaux à ceux qui sont assemblés en A d'un même côté de la droite EB; par suite (14) ces trois angles valent ensemble deux angles droits.

COROLLAIRE I. — *Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit, et à plus forte raison qu'un seul angle obtus.*

COROLLAIRE II. — *Dans un triangle rectangle, les deux angles autres que l'angle droit sont aigus et complémentaires.*

COROLLAIRE III. — *Quand deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un est aussi égal au troisième angle de l'autre.*

COROLLAIRE IV. — *L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés.*

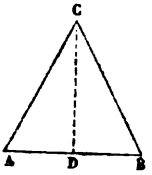
31. *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit le côté AC égal au côté BC; prouvons que l'angle A est égal à

Digitized by Google

l'angle B. En effet, si nous joignons le point C au milieu D de la base, la droite CD ayant deux points C et D également éloignés des extrémités de AB, sera perpendiculaire (16, Coroll.) sur cette ligne; si donc nous rabattons la moitié ACD de la figure sur l'autre moitié BCD, le point A tombera en B, et, par suite, AC couvrira CB; donc aussi l'angle A sera superposé à l'angle B, et ces deux angles seront égaux.

Fig. 19.



COROLLAIRE I. — Les deux angles ACD et BCD sont aussi superposés et, par suite, égaux. La ligne CD est donc la bissectrice de l'angle ACB, et il est établi que *dans tout triangle isocèle, la droite menée du sommet au milieu de la base, 1° est perpendiculaire sur cette base; 2° partage l'angle du sommet en deux parties égales.*

COROLLAIRE II. — *Un triangle équilatéral a ses trois angles égaux;* ce que l'on prouve en le considérant comme isocèle par rapport à deux côtés successivement pris pour base. L'angle d'un pareil triangle équivaut par conséquent (30) au tiers de deux angles droits, ou aux deux tiers d'un angle droit.

32. Réciproquement, *si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont aussi égaux, et le triangle est isocèle.*

Supposons (*fig.* 19) l'angle A égal à l'angle B; menons la bissectrice CD de l'angle au sommet C. Cette bissectrice sera nécessairement perpendiculaire sur la base AB; car les deux triangles ABC, BDC ayant deux angles respectivement égaux (30, Coroll. III), les troisièmes angles sont aussi égaux; or ces deux angles égaux ADC, BDC étant adjacents, sont droits.

Rabattons donc encore autour de CD la demi-figure de gauche sur celle de droite; le côté CA prendra la direction CB, et le point A tombera sur CB ou sur son prolongement; de même DA s'abattra sur DB, et le point A tombera aussi sur DB ou sur son prolongement, et ce point A, qui doit se trouver à la fois sur CB et sur DB, ne pourra tomber qu'au point B, commun à ces deux lignes.

Par conséquent, le côté CA couvrira exactement CB auquel il sera égal, ainsi qu'il fallait le démontrer.

COROLLAIRE. — *Un triangle qui a ses trois angles égaux est aussi équilatéral.*

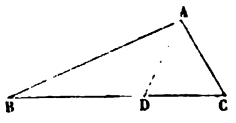
33. Dans un triangle quelconque, si deux angles sont inégaux, les côtés opposés sont nécessairement inégaux, en vertu de ce qui vient d'être démontré pour la réciprocité du cas d'égalité des angles et des côtés. Il y

Digitized by Google

a plus : *à un plus petit angle est opposé un plus petit côté, et à un plus petit côté correspond un plus petit angle.*

Supposons en effet l'angle C plus petit que l'angle BAC, et menons AD de telle sorte que l'angle DAC soit égal à l'angle C. Le triangle ADC sera isocèle et fournira

Fig. 20.



$$AD = DC.$$

Maintenant considérons le triangle ABD ; nous aurons

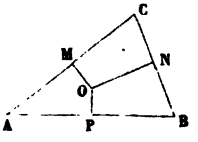
$$AB < BD + AD, \quad \text{ou} \quad < BD + DC, \quad \text{ou} \quad < BC.$$

Soit, pour démontrer la réciproque, le côté AB plus petit que le côté BC. Si l'angle BAC était égal à l'angle C, on aurait (32) le côté BC égal à AB ; si l'angle BAC était plus petit que ce même angle C, on vient de voir que le côté BC serait aussi plus petit que le côté AB. Or ces deux conclusions sont contraires à l'hypothèse ; donc l'angle C est plus petit que l'angle BAC.

34. *Les perpendiculaires tirées sur les milieux des trois côtés d'un triangle concourent au même point.*

Si nous menons en effet les deux droites OP et OM respectivement perpendiculaires aux côtés AB et AC en leurs milieux, le point de rencontre O de ces deux droites sera à des distances égales des trois sommets du triangle ; il appartient donc (16) à la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté BC, et cette perpendiculaire passe par le point O.

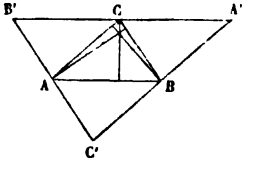
Fig. 21.



35. *Les perpendiculaires tirées des trois sommets d'un triangle sur les côtés opposés concourent au même point.*

Pour démontrer ce théorème menons, par les trois sommets du triangle ABC, des parallèles B'C', C'A', A'B' aux côtés opposés ; ces trois parallèles formeront le triangle A'B'C'.

Fig. 22.

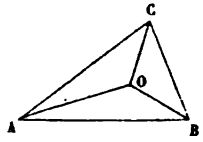


Puisque les parallèles comprises entre parallèles sont égales (27), nous aurons $AB' = BC = AC'$; le point A est donc le milieu de B'C'. Par la même raison, les points B et C sont les milieux des côtés A'C' et A'B'. De plus, les perpendiculaires aux côtés du triangle ABC ne sont autre chose que les perpendiculaires aux milieux de ceux du triangle A'B'C', lesquelles concourent au même point, d'après la proposition précédente.

Digitized by Google

36. *Les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent au même point.*

Fig. 23.



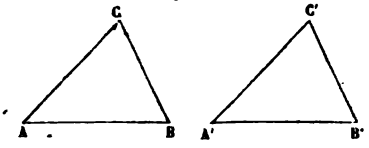
Tirons les bissectrices AO et BO des deux angles BAC et ABC du triangle ABC; leur point de rencontre O sera également distant des trois côtés du triangle, il appartiendra donc (18) à la bissectrice de l'angle ACB qui ne sera autre que CO.

TRIANGLES ÉGAUX.

37. *Deux triangles quelconques sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', dans lesquels le côté AB est égal à A'B', l'angle A à l'angle A', et l'angle B à l'angle B'. Transportons le second triangle sur le premier, de manière à faire coïncider le côté A'B' avec son égal AB.

Fig. 24.



A cause de l'égalité des angles sus-énoncés, le côté A'C' tombera sur AC et le point C' sur ce même côté AC ou sur son prolongement; par la même raison, le côté B'C' se dirigera suivant BC, et son point C devra encore tomber sur BC ou sur son prolongement. Par conséquent, le point C' devant se trouver en même temps sur les deux directions AC et BC, il ne pourra tomber qu'à l'intersection C de ces deux droites, et les triangles coïncideront alors dans toute leur étendue; ils seront donc égaux.

Remarque. — Quand deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, le troisième est aussi égal de part et d'autre, puisque la somme des trois angles est constante et égale à deux droits (30); on peut donc dire que, généralement, *deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux, chacun à chacun.*

38. *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun.*

Supposons maintenant (*fig.* 24) que l'angle A soit égal à l'angle A', le côté AB égal à A'B', et AC à A'C'; transportons encore le second triangle sur le premier, de manière à superposer les deux angles égaux A et A', A'B' couvrant exactement son égal AB, et A'C' couvrant également AC. Le troisième côté B'C' ne peut évidemment manquer de coïncider de même avec BC, et les deux triangles sont par suite égaux.

Remarque. — Il est bon d'observer que les côtés égaux ou ceux qui se confondent lorsque les deux figures sont superposées, se trouvent opposés à des angles égaux dans chacun des triangles; ainsi A'B', qui se confond

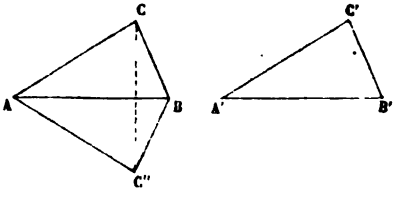
Digitized by Google

avec AB, est opposé à l'angle C' égal à l'angle C. Cette remarque, applicable aux deux propositions précédentes, l'est également aux deux suivantes.

39. *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux, chacun à chacun.*

Considérons les deux triangles ABC, A'B'C' dans lesquels AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'; et transportons le second de manière à faire tomber A'B' sur son égal AB. Rabattons ensuite ce même triangle A'B'C' au-dessous du premier en ABC''; puis, tirons CC''. Puisque AC = AC'', le triangle ACC'' est isocèle et l'angle ACC'' est égal à l'angle AC''C. Par la même raison, l'angle BCC'' est égal à BC''C, et la somme ACC'' + BCC'' est égale à la somme AC''C + BC''C; donc le triangle ABC et le triangle AC''B, ou son égal A'B'C', sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun (38).

Fig. 25.



Remarque. — Un triangle est déterminé : 1° par un côté et deux angles; 2° par deux côtés et l'angle qu'ils comprennent; 3° par les trois côtés. Toutefois, un triangle n'est pas déterminé par la connaissance des trois angles; on se rend parfaitement compte de cette circonstance en observant que, si l'on mène trois droites respectivement parallèles aux côtés d'un triangle quelconque, le nouveau triangle ainsi formé aura ses trois angles respectivement égaux (25) à ceux du premier duquel il pourra néanmoins différer notablement.

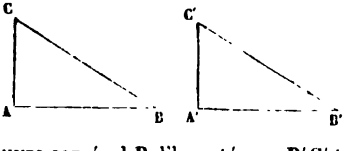
40. Outre les cas généraux d'égalité que nous venons d'examiner, la condition d'avoir un angle droit donne naissance à deux nouveaux cas spéciaux aux triangles rectangles.

Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, chacun à chacun.

L'égalité de l'un des angles aigus entraîne nécessairement celle de l'autre qui est (30, Coroll. II) complémentaire du premier; les deux triangles rentrent alors dans le cas général d'un côté égal adjacent à deux angles égaux.

On obtient d'ailleurs une démonstration directe par la superposition.

Fig. 26.



Supposons en effet que, dans les triangles rectangles ABC, A'B'C', on ait l'hypoténuse BC égale à B'C', et l'angle B égal à B'. Si l'on porte le triangle A'B'C' sur ABC de manière que l'angle B' couvre son égal B, l'hypoténuse B'C' tombera exactement sur son égale BC;

Digitized by Google

le côté A'B' se placera dans la direction de AB; et alors le troisième côté C'A', dont l'extrémité C' se trouve en C, s'appliquera exactement sur CA, puisque l'on ne peut abaisser du point C qu'une seule perpendiculaire sur AB.

41. *Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, chacun à chacun.*

Soit dans les mêmes triangles ABC, A'B'C' (*fig.* 26), l'hypoténuse BC égale à B'C', et le côté AC égal à A'C'; en posant l'un de ces triangles sur l'autre, de manière que A'C' tombe sur AC, le côté A'B' se placera sur son égal AB à cause de l'angle droit qui est égal de part et d'autre; alors les hypoténuses seront, par rapport à la perpendiculaire CA, deux obliques égales qui, étant situées du même côté de la perpendiculaire, s'en écarteront également (17), et tomberont par conséquent l'une sur l'autre.

Remarque. — Un triangle rectangle est déterminé soit par son hypoténuse et un angle aigu, soit par son hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit.

POLYGONES.

42. Les surfaces planes terminées par un assemblage quelconque de lignes droites se nomment *polygones*. Le plus simple de tous est le *triangle;* les polygones de quatre côtés s'appellent, en général, *quadrilatères;* pour cinq côtés, on dit *pentagone;* pour six, *hexagone;* pour sept, *heptagone;* pour huit, *octogone;* pour neuf, *ennéagone;* pour dix, *décagone*, etc.

Au delà du polygone de dix côtés, cette nomenclature ne s'applique guère qu'à celui de douze côtés, ou *dodécagone*, et à celui de quinze côtés, ou *pentédécagone*.

Fig. 27.

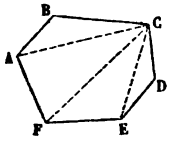
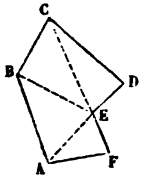


Fig. 28.



La *fig.* 27 ci-contre représente un hexagone dont tous les angles sont *saillants*, c'est-à-dire ont leur ouverture en dedans du polygone; dans la *fig.* 28, l'angle DEF a son ouverture tournée vers l'extérieur; c'est un angle *rentrant*. Le premier est dit *convexe* pour ce motif; un côté quelconque, prolongé dans les deux sens, ne peut rencontrer le *périmètre* ou la ligne brisée qui termine le polygone. Cette condition n'est pas remplie par le polygone à angle rentrant, notamment en ce qui concerne les côtés DE et EF.

43. Les droites telles que CA, CF, CE (*fig.* 27) qui joignent les sommets d'angles non adjacents au même côté, se nomment *diagonales*.

Un triangle n'a pas de diagonales; un quadrilatère en a deux, un pentagone cinq, un hexagone neuf, un décagone trente-cinq, etc. En général,

Digitized by Google

un polygone de n côtés a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales, attendu que, d'une part, chacun des n sommets donne naissance à $n-3$ diagonales, lesquelles, d'autre part, seraient comptées deux fois dans cette supputation comme appartenant à chacun des deux sommets auxquels elles aboutissent. Au moyen de cette formule on calcule, par exemple, que le polygone de 100 côtés aurait 4850 diagonales.

Remarque. — Ce qui précède ne s'applique en apparence qu'aux polygones convexes, tels que celui de la *fig.* 27. Dans l'hexagone de la *fig.* 28, si l'on considère les diagonales issues du point C, on voit que la diagonale qui joint le sommet C au sommet E est sensiblement dans la même direction que le côté EF, et, par suite, peut se confondre avec la diagonale CF. Sous cette réserve, et en observant que la diagonale AD serait en partie hors du polygone, et la diagonale DF tout à fait extérieure, on retrouverait encore ici les neuf diagonales de l'hexagone.

Dans tout ce qui va suivre, nous nous occuperons exclusivement des polygones convexes.

44. *La somme de tous les angles intérieurs de tout polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux.*

Pour le prouver, on trace (*fig.* 27) toutes les diagonales issues d'un même sommet, et l'on décompose ainsi le polygone en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux; car, à l'exception des deux côtés qui aboutissent au sommet commun, chacun des autres côtés fournit un triangle. Or les trois angles de chacun de ces triangles valant deux droits (30), la somme de tous les angles du polygone vaudra autant de fois deux droits qu'il y a de triangles, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a de côtés moins deux.

C. Q. F. D.

Corollaire. — La somme des angles intérieurs d'un polygone de n côtés est égale à un nombre d'angles droits marqué par 2 fois le nombre des côtés diminué de 2, ou par $2(n-2)$.

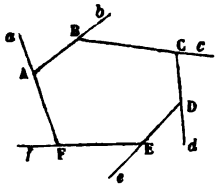
Ainsi, le triangle présente une somme d'angles égale à 2 droits; dans le quadrilatère, cette somme est égale à 4; dans le pentagone à 6; dans l'hexagone à 8, etc. La somme des angles d'un polygone de 100 côtés vaudrait 2×98 ou 196 angles droits.

45. *Si l'on prolonge dans le même sens tous les côtés d'un polygone, la somme des angles extérieurs formés par chaque côté et par le prolongement du côté voisin, sera égale à quatre angles droits, quel que soit le nombre des côtés.*

On se rend facilement compte de cette propriété, en remarquant que chaque angle extérieur aAB joint à l'intérieur BAF auquel il est adjacent, forme une somme égale à deux droits et qui se trouve répétée autant de

Digitized by Google

Fig. 29.



fois qu'il y a d'angles ou de côtés dans le polygone. La somme des angles extérieurs et intérieurs vaudra donc autant de fois deux droits qu'il y a de côtés; si nous ôtons de cette somme celle des angles intérieurs qui (44) vaut autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux, il restera deux fois deux droits ou quatre droits pour la somme des angles extérieurs.

Cette même propriété deviendrait d'ailleurs manifeste si, par un point quelconque du plan, on menait une parallèle à chacun des côtés; chaque angle extérieur se trouverait ainsi transporté au point commun, et la somme de tous ces angles serait visiblement égale (15, Coroll.) à quatre droits.

COROLLAIRE. — *Tout polygone a au plus trois angles aigus.*

46. Parmi les quadrilatères ou polygones de quatre côtés, on désigne particulièrement sous le nom de *parallélogramme* celui dont les côtés opposés sont parallèles; tel est celui que représente la *fig.* 30.

Fig. 30.

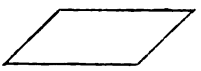
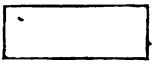
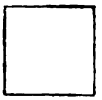


Fig. 31.



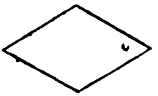
On nomme *parallélogramme rectangle*, ou simplement *rectangle* (*fig.* 31), le parallélogramme dont les angles sont droits.

Fig. 32.



On donne le nom de *carré* au rectangle dont les côtés sont égaux (*fig.* 32).

Fig. 33.



Enfin, un losange est un parallélogramme dont les côtés sont égaux (*fig.* 33) sans que les angles soient égaux et droits.

47. Les propriétés des parallèles mettent d'abord en évidence les propositions suivantes relatives aux parallélogrammes :

1°. *Les angles opposés sont égaux*, car ils ont les côtés parallèles et dirigés en sens contraires (25);

2°. *Les angles adjacents au même côté sont supplémentaires* parce qu'ils sont intérieurs d'un même côté entre deux parallèles et un sécante (23);

3°. *Les côtés opposés sont égaux*, comme parallèles comprises entre parallèles (27);

Digitized by Google

4°. *Une diagonale d'un parallélogramme le partage en deux triangles égaux.* En se reportant, en effet, à la *fig.* 15, page 135, on voit que les deux triangles ABC, BCD, dans lesquels est partagé le parallélogramme ABCD, sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

48. Il est utile, pour ce qui suivra, de démontrer que réciproquement *un quadrilatère est un parallélogramme:* 1° *si ses angles opposés sont égaux;* 2° *si ses angles adjacents sont supplémentaires;* 3° *si ses côtés opposés sont égaux;* 4° *si deux côtés opposés sont égaux et parallèles.*

1°. Si les angles opposés sont égaux, la somme de deux angles adjacents vaudra la moitié de la somme totale, ou la moitié de quatre droits, ou deux droits; et ces angles adjacents étant dans la position d'internes du même côté (24), les côtés correspondants sont parallèles deux à deux.

2°. Si les angles adjacents sont supplémentaires, on rentre dans le cas précédent.

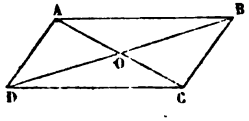
3°. Si les côtés opposés sont égaux, les deux triangles formés par une diagonale sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et, par suite, les angles opposés du parallélogramme sont égaux: on est donc encore dans le premier cas.

4°. Si AB est égal et parallèle à CD (*fig.* 15), les deux triangles ABC, BCD seront égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et la démonstration s'achèvera comme dans le cas précédent.

49. *Dans un parallélogramme, les deux diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Les triangles AOD et BOC sont égaux (37); car les côtés AD et BC sont égaux par hypothèse, les angles OAD, OCB sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AD, BC, et les angles ODA, OBC le sont aussi comme alternes-internes par rapport aux mêmes parallèles coupées par BD; par conséquent, on a

Fig. 34.



$$AO = OC \quad \text{et} \quad DO = OB.$$

50. *Dans un rectangle, les diagonales sont égales; dans un losange, les diagonales se coupent à angle droit.*

Après ce que nous venons de dire, la démonstration de ces vérités ne saurait offrir aucune difficulté.

Corollaire. — Un carré étant à la fois un rectangle et un losange, ses diagonales sont égales et se coupent rectangulairement.

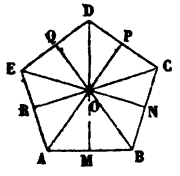
51. Un polygone est *régulier* lorsque ses côtés sont égaux entre eux, ainsi que ses angles. Le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers.

Digitized by Google

Dans un polygone régulier, 1° *les bissectrices des angles et les perpendiculaires tirées sur les milieux des côtés concourent en un même point;* 2° *ce point est à égale distance de tous les sommets, et à égale distance de tous les côtés.*

Menons la bissectrice de l'angle EAB et élevons sur le milieu M de AB une perpendiculaire; soit O le point de rencontre de ces deux lignes; joignons ce point O à tous les autres sommets et au milieu de tous les autres côtés.

Fig. 35.



Les deux triangles AMO et BMO sont égaux; car ils sont tous deux rectangles en M; MO leur est commun, et AM = MB. Il résulte de l'égalité de ces deux triangles que l'angle MBO est égal à l'angle MAO; or, comme l'angle total EAB du polygone régulier est égal à l'angle ABC, et comme l'angle MAO est la moitié de EAB, on voit que l'angle MBO est aussi la moitié de ABC, et BO est la bissectrice de cet angle ABC.

Les triangles MBO et BNO sont aussi égaux; car OB leur est commun, l'angle MBO est égal à NBO, et le demi-côté MB est égal au demi-côté NB. Il en résulte que l'angle BNO, égal à BMO qui est droit, est droit lui-même et, par suite, la ligne NO mesure la distance du point O au côté BC.

On démontrerait encore de proche en proche que OC est la bissectrice de l'angle BCD, et que OP est perpendiculaire sur CD, et ainsi de suite; on voit donc que, 1° les droites OA, OB, OC, etc., issues du point O, sont respectivement bissectrices des angles A, B, C, etc., du polygone régulier; les droites OM, ON, OP, etc., sont respectivement perpendiculaires sur les milieux des côtés AB, BC, CD, etc.; 2° à cause de l'égalité de tous les triangles de la figure, on a d'une part

$$OA = OB = OC = \ldots,$$

d'autre part

$$OM = ON = OP = \ldots.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque I. — Le point O est le *centre* du polygone régulier; les distances égales du centre aux divers sommets sont les *rayons;* les distances égales du centre aux divers côtés sont les *apothèmes*, et l'on appelle *angles au centre* les angles égaux que forment entre eux les rayons consécutifs.

Remarque II. — *L'angle au centre d'un polygone régulier est égal à quatre angles droits divisés par le nombre des côtés.*

Ainsi, dans un triangle équilatéral, l'angle au centre vaut $\frac{3}{4}$ d'angle

Digitized by Google

droit; dans le carré, $\frac{4}{4}$ ou 1 droit; dans le pentagone régulier, $\frac{4}{5}$ de droit; dans l'hexagone, $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ de droit; dans l'octogone, $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$ droit, etc.... En général, dans un polygone régulier de n côtés, l'angle au centre est exprimé par $\frac{4}{n}$ droits.

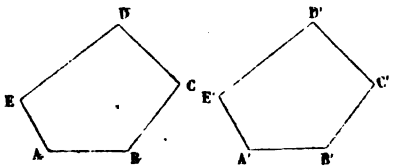
POLYGONES ÉGAUX.

52. Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et pareillement assemblés; il est clair en effet que, placés l'un sur l'autre, ces polygones se couvriront exactement.

En dehors de cette décomposition en triangles, on peut encore dire que *deux polygones de même espèce sont égaux lorsque, abstraction faite d'un côté et des deux angles adjacents, tous les autres angles et côtés sont égaux chacun à chacun.*

Supposons que, dans les deux polygones de la figure ci-contre, les

Fig. 36.



angles A, B et C soient respectivement égaux aux angles A', B' et C'; les côtés AE, AB, BC et CD aux côtés A'E', A'B', B'C' et C'D', de telle sorte que tout, angles et côtés, soit égal de part et d'autre, à l'exception du côté DE et des deux angles adjacents D et E. Plaçons le second polygone sur le premier, de manière que A'E' tombe sur son égal AE; puisque l'angle A' est égal à l'angle A, le côté A'B' tombera sur son égal AB et le couvrira exactement; de même B'C' tombera sur CB, et C'D' sur CD. Il faudra bien alors que D'E' coïncide avec DE, et les deux polygones seront entièrement superposés; ils sont donc égaux.

COROLLAIRE I. — Un polygone de n côtés est déterminé par $2n - 3$ conditions, savoir : par $n - 1$ côtés et les $n - 2$ angles qu'ils forment entre eux, en tout $2n - 3$. Ainsi un triangle est déterminé par 3 conditions, un quadrilatère par 5, un pentagone par 7, etc.

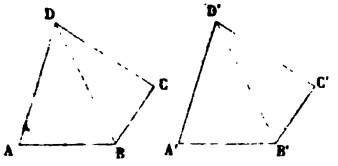
COROLLAIRE II. — *Deux polygones réguliers de même espèce sont égaux quand ils ont un côté égal;* car ils ont nécessairement alors tous leurs côtés et tous leurs angles égaux. Par conséquent, *un polygone régulier est déterminé par son côté.*

53. *Deux quadrilatères sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal et leurs quatre côtés égaux, chacun à chacun.*

Digitized by Google

Soit l'angle A égal à l'angle A', et de plus AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D' et DA = D'A'; tirons les diagonales BD et B'D'.

Fig. 37.



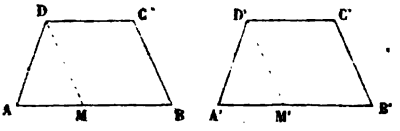
Les triangles BAD, B'A'D' sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, et, par suite, BD = B'D'. Les triangles BCD, B'C'D' sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et les deux quadrilatères sont égaux (52) comme composés de deux triangles égaux chacun à chacun et pareillement assemblés.

54. Lorsqu'un quadrilatère a deux de ses côtés parallèles, on lui donne le nom de *trapèze*.

Deux trapèzes sont égaux quand ils ont leurs quatre côtés égaux, chacun à chacun.

Si l'on tire, en effet, DM parallèle à BC et D'M' parallèle à B'C', on aura les deux triangles AMD, A'M'D', qui sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; savoir AD = A'D'; DM = D'M', comme étant respectivement égaux aux côtés égaux BC, B'C'; AM = A'M', comme étant respectivement égaux aux différences égales AB — MB ou AB — CD, A'B' — M'B' ou A'B' — C'D'.

Fig. 38.



L'égalité des triangles AMD, A'M'D' donne l'angle A égal à l'angle A', et les deux trapèzes rentrent dans le cas général d'égalité des quadrilatères.

55. *Sont égaux :* 1° *deux parallélogrammes qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun;* 2° *deux losanges qui ont un côté égal et un angle égal;* 3° *deux rectangles qui ont deux côtés adjacents égaux, chacun à chacun;* 4° *deux carrés qui ont leur côté égal.*

Les démonstrations de ces théorèmes sont trop simples pour que nous ayons besoin de les développer.

Remarque. — Un quadrilatère est généralement déterminé (52, Corollaire I) par 5 conditions; mais, en particulier, un trapèze est déterminé par 4 éléments, un parallélogramme par 3, un losange et un rectangle par 2, et un carré par un seul.

Digitized by Google

LIGNES PROPORTIONNELLES ET POLYGONES SEMBLABLES.

LIGNES PROPORTIONNELLES.

36. On appelle *commune mesure* de deux lignes droites, ainsi que nous l'avons déjà dit (9 et 10), toute ligne qui est contenue dans l'une et dans l'autre un nombre exact de fois; une commune mesure prend le nom de *plus grande commune mesure*, s'il n'en existe pas de plus grande qu'elle.

Quand on cherche, par une méthode que nous n'exposerons pas ici, la plus grande commune mesure de deux lignes, il peut se faire, nous y revenons à dessein, que l'on finisse par arriver à une longueur tellement petite, qu'elle échappe à nos sens et que l'on ne puisse plus en tenir compte. On démontre même en géométrie, par des moyens autres que le mesurage direct, qu'il est des lignes dont le rapport est le même que celui qui existe en arithmétique entre l'unité et certaines quantités dites *incommensurables*, telles que $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, etc., dont on ne peut obtenir une expression finie exacte, mais dont on peut approcher autant qu'on le veut.

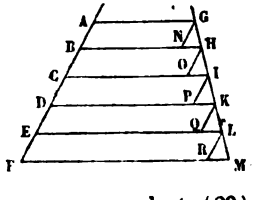
Dans la comparaison de pareilles lignes, la commune mesure, à proprement parler, n'existe plus; mais il est toujours permis de considérer les quantités incommensurables comme les limites des quantités commensurables variables dont la commune mesure a atteint la valeur zéro.

Au moyen de cette extension parfaitement conforme au sentiment de la continuité mathématique, toutes les propriétés des quantités commensurables qui dépendront de l'existence, mais non de la grandeur de la commune mesure, seront par cela seul applicables aux quantités incommensurables, puisqu'elles seront rigoureusement établies pour des quantités dont la commune mesure diffère de zéro d'aussi peu que l'on voudra.

37. *Deux droites étant données, si par des points également espacés sur l'une d'elles, on mène un système quelconque de lignes parallèles, ces dernières intercepteront des longueurs égales sur la seconde droite.*

Soit AB = BC = CD, etc.; par les points G, H, I, etc., menons les droites GN, HO, IP, etc., parallèles à AF.

Fig. 39.



Nous formerons ainsi les triangles GNH, HOI, IPK, etc., dans lesquels les côtés GN, HO, IP, etc., sont respectivement égaux à AB, BC, CD, etc., comme parallèles comprises entre parallèles, et sont par conséquent égaux entre eux. Les angles NGH, OHI, IPK, etc., sont égaux comme correspondants (23), et enfin les angles GNH, HOI, IPK, etc.,

Digitized by Google

sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens (25).

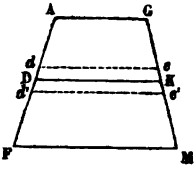
Les triangles sus-indiqués ont donc un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux; ce qui donne, ainsi qu'on l'avait annoncé,

$$CH = HI = IK = \text{etc.}$$

58. *Trois parallèles interceptent toujours sur deux droites quelconques des longueurs proportionnelles.*

Supposons que la plus grande commune mesure entre AD et AF soit Dd, et que cette dernière soit contenue dans AD 7 fois, et dans AF 13 fois; la droite AF étant divisée en 13 parties égales, AD en contiendra 7 et DF 6. Menons ensuite par toutes les divisions des parallèles de, $d'e'$, etc., à FM; nous diviserons la droite GM (57) en 13 parties égales, dont 7 dans GK et 6 dans KM.

Fig. 40.



Nous aurons donc d'une part,

$$\frac{AD}{DF} = \frac{7}{6};$$

d'autre part aussi

$$\frac{GK}{KM} = \frac{7}{6};$$

de là nous tirons

$$\frac{AD}{DF} = \frac{GK}{KM},$$

conformément à l'énoncé.

Remarque. — Nous pourrions également écrire

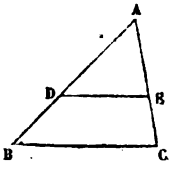
$$\frac{AD}{AF} = \frac{7}{13}, \quad \frac{GK}{GM} = \frac{7}{13},$$

et, par suite,

$$\frac{AD}{AF} = \frac{GK}{GM}.$$

59. La proposition qui vient d'être démontrée est vraie quelle que soit la longueur AG; elle subsiste donc aussi quand le point G se confond avec le point A. De là ce théorème important:

Fig. 41.



Dans un triangle, toute parallèle à l'un des côtés divise les deux autres en parties proportionnelles.

Cet énoncé se traduit algébriquement par la proportion

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}.$$

Digitized by Google

La remarque du n° 58 donne aussi

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

ou, si l'on aime mieux,

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC},$$

et l'on conclut de ces égalités que *les parties des côtés sont également proportionnelles aux côtés eux-mêmes.*

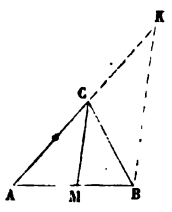
60. Réciproquement, *toute droite qui divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles est parallèle au troisième côté.*

En effet (*fig.* 41), une parallèle à BC menée par le point D couperait AC en parties proportionnelles à AD et à DB, et passerait par conséquent au point E; donc cette parallèle se confond avec DE.

61. *Dans un triangle, la bissectrice d'un angle partage le côté opposé en deux parties proportionnelles aux côtés adjacents.*

Soient, en effet, le triangle ABC et la bissectrice CM de l'angle ACB; menons BK parallèlement à CM jusqu'à la rencontre en K du prolongement de AC.

Fig. 42.



Puisque, dans le triangle ABK, CM est parallèle à BK, nous avons (52)

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{CK}.$$

Mais le triangle BCK est isocèle; car l'angle CBK est égal à BCM comme alterne-interne avec lui, et les angles BKC et ACM sont aussi égaux comme correspondants. Or, à cause de la bissectrice, les angles ACM et BCM sont égaux; donc les angles CBK et BKC le sont aussi, et CK est égal à CB; donc, enfin,

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC}.$$ C. Q. F. D.

Corollaire. — Réciproquement, *toute droite qui passe par le sommet d'un angle d'un triangle, et qui divise le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents, est la bissectrice de cet angle.*

Ceci résulte évidemment de ce que, la bissectrice (*fig.* 42) de l'angle ACB devant partager le côté AB en parties proportionnelles aux côtés adjacents, cette bissectrice passe nécessairement par le point M qui est supposé réaliser cette division proportionnelle, et coïncide par conséquent avec la droite CM elle-même.

Digitized by Google

POLYGONES SEMBLABLES.

62. On nomme *polygones semblables* ceux dont les angles sont égaux chacun à chacun, et dont les côtés *homologues* (semblablement placés) sont proportionnels.

Le rapport de deux côtés homologues est dit *rapport de similitude*.

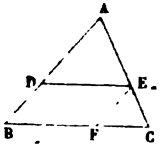
Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables; car ils ont tous leurs angles égaux et les côtés nécessairement proportionnels.

Quand il s'agit de triangles, les deux conditions relatives aux angles et aux côtés sont, comme nous allons le voir, la conséquence forcée l'une de l'autre, en sorte qu'il suffirait de dire que deux triangles semblables sont ceux dont les angles sont égaux chacun à chacun, ou encore dont les côtés sont proportionnels.

63. *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine un second triangle semblable au précédent.*

Les deux triangles ABC, ADE ont d'abord leurs angles égaux chacun à chacun, savoir : A commun ; ADE = B comme correspondants ; AED = C par la même raison.

Fig. 43.



Nous avons ensuite (59)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Si nous menons maintenant EF parallèlement à AB, nous aurons aussi

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}.$$

Or BF = DE comme parallèles comprises entre parallèles ; donc

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

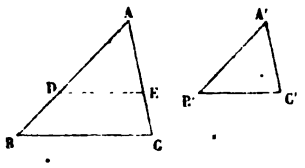
et, par suite,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Ainsi les deux triangles ont leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels ; ils sont donc semblables.

64. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables.*

Fig. 44.



A cause de l'égalité des angles A et A', le triangle A'B'C' pourra se transporter en ADE sur le triangle ABC, et, par suite de la proportionnalité des côtés, la ligne DE (60) sera parallèle à BC. Donc,

Digitized by Google

en vertu du théorème précédent, le triangle ADE ou son égal A'B'C' est semblable au triangle ABC.

63. *Deux triangles qui ont leurs angles égaux chacun à chacun sont semblables.*

Prenons (*fig.* 44) sur AB une longueur AD égale à A'B', et menons DE parallèle à BC. L'angle ADE, qui est égal à l'angle B comme correspondant, sera aussi égal à B', puisque les angles B et B' sont égaux par hypothèse. Il en résulte que les deux triangles A'B'C' et ADE sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Mais le triangle ADE est semblable à ABC (63); donc il en est de même de A'B'C'.

Remarque. — *Deux triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun sont semblables.* Il en est de même de deux triangles rectangles qui ont un angle aigu égal.

66. *Deux triangles qui ont les côtés parallèles, ou qui les ont perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables.*

Cela résulte de ce que, dans chacun de ces deux cas, les deux triangles ont leurs angles égaux (25 et 26). Un facile examen des conditions de la question, basé sur la propriété de la somme des angles d'un triangle (30), fait d'ailleurs voir clairement que deux angles homologues des deux triangles ne peuvent être supplémentaires.

Remarque. — Les côtés homologues des deux triangles sont ceux qui sont parallèles ou perpendiculaires.

67. *Deux triangles qui ont les côtés proportionnels sont semblables.*

Supposons, en effet (*fig.* 44), que l'on ait

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

La même construction étant faite que dans le n° 65, les triangles semblables ABC et ADE donnent

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{DC}{DE};$$

mais, puisque AD = A'B', tous les rapports ci-dessus sont égaux entre eux, et l'on tire de cette égalité

$$AE = A'C', \quad DE = B'C'.$$

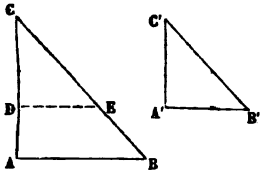
Il suit de là que le triangle A'B'C' est égal au triangle ADE et, par conséquent, semblable au triangle ABC; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Dans deux triangles semblables, les côtés proportionnels ou homologues sont opposés aux angles égaux.

68. *Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse et un côté proportionnels sont semblables.*

Digitized by Google

Fig. 45.



Soit

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Prenons $CD = C'A'$ et $CE = C'B'$; tirons DE. Nous aurons alors

$$\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{DC},$$

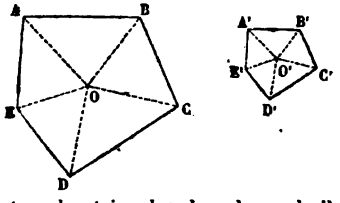
et, par suite, DE étant (60) parallèle à AB, l'angle CDE sera droit.

Les deux triangles rectangles CDE et A'B'C' sont donc égaux, puisqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal; par conséquent, la similitude des deux triangles ABC et CDE (63) entraîne celle des triangles ABC et A'B'C'.

69. *Deux polygones semblables peuvent se décomposer d'une infinité de manières en triangles semblables chacun à chacun et pareillement assemblés.*

Il suffit, pour cela, de choisir un point O quelconque que l'on joint à tous les sommets du premier polygone. Aux sommets A' et B' du second, on mène deux droites faisant avec A'B' des angles respectivement égaux aux angles OAB et OBA; ces deux droites se coupent en un point O' que l'on joint à tous les sommets du second polygone, et tous les triangles dans lesquels il se trouve ainsi décomposé sont respectivement semblables à ceux du premier. En effet, les deux triangles OAB, O'A'B' sont semblables, puisqu'ils ont (65) deux angles égaux chacun à chacun; il en résulte

Fig. 46.



$$\frac{OB}{O'B'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Mais, d'après l'hypothèse, on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

donc

$$\frac{OB}{O'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

De plus, OBC, différence des deux angles ABC et OBA, est égal à O'B'C', différence des deux angles A'B'C' et O'B'A' respectivement égaux aux premiers. Les deux triangles OBC et O'B'C' sont donc semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

On démontrerait de même la similitude des triangles ODC et O'D'C', ODE et O'D'E', etc.

Digitized by Google

70. Réciproquement, *deux polygones composés de triangles semblables pareillement assemblés sont semblables.*

D'abord, il est évident (*fig.* 46) que les angles des deux polygones seront égaux deux à deux, comme étant composés d'angles homologues dans des triangles semblables. On voit de plus que leurs côtés sont proportionnels, et que l'on a, par exemple,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

puisque la similitude des triangles OAB et O'A'B', OBC et O'B'C', donne d'une part

$$\frac{OB}{O'B'} = \frac{AB}{A'B'},$$

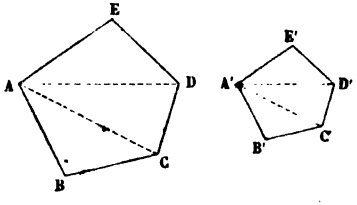
d'autre part

$$\frac{OB}{O'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Remarque. — Les points O et O' sont dits *points homologues.*

71. Si le point O était précisément l'un des sommets A du premier polygone, le point O' ne serait autre chose que le sommet homologue A' du second. Les lignes de division seraient dans ce cas les diagonales du polygone, et l'on peut dire que les diagonales issues de deux sommets homologues, dans deux polygones semblables, partagent ceux-ci en triangles semblables et pareillement assemblés.

Fig. 47.



La réciproque de cette proposition est, du reste, également vraie.

Remarque. — Les diagonales homologues de deux polygones semblables sont entre elles dans le même rapport que les côtés homologues.

72. *Les périmètres de deux polygones semblables sont entre eux dans le même rapport que les côtés homologues.*

Les polygones ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 47) étant semblables, on a la suite des rapports égaux

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Or, la propriété fondamentale d'une pareille suite (*Arith.* 25) nous donne

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AB}{A'B'};$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

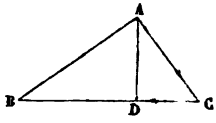
Digitized by Google

COROLLAIRE. — *Les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre eux comme leurs rayons et leurs apothèmes;* car ces lignes sont elles-mêmes dans le rapport des côtés.

Remarque. — Nous verrons plus loin (125) que *les aires des polygones semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.*

73. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, cette perpendiculaire partage le triangle en deux autres qui lui sont semblables et qui le sont par suite entre eux.*

Fig. 48.



En effet, les deux triangles rectangles ABC, DAB ont l'angle B commun; ils sont donc semblables (65, Remarque).

Par la même raison, le triangle DAC est semblable au triangle ABC, et, par suite, aussi semblable à DAB.

74. *La perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux parties ou* SEGMENTS *du diamètre;* car, les deux triangles DAB, DAC étant semblables (*fig.* 48), on peut écrire, en se rappelant que les côtés homologues sont ceux qui sont opposés à des angles égaux,

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}, \quad \text{ou} \quad \overline{AD}^2 = BD \times DC.$$

75. *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et le segment adjacent.*

Ceci résulte encore de la similitude des trois triangles de la *fig.* 48; les triangles ABC et DAB donnent

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}, \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2 = BC \times BD,$$

et des triangles ABC et DAC on tire

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}, \quad \text{ou} \quad \overline{AC}^2 = BC \times DC.$$

COROLLAIRE. — La somme des deux égalités qui viennent d'être obtenues est

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC\,(BD + DC) = BC \times BC = \overline{BC}^2;$$

elle montre que *le carré du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés.*

Ce résultat permet de calculer l'un des côtés d'un triangle rectangle, quand les deux autres sont connus. Si, par exemple, AB = 5, AC = 12,

Digitized by Google

on aura

$$\overline{BC}^2 = 25 + 144 = 169,$$

d'où

$$BC = \sqrt{169} = 13.$$

Si l'on avait encore BC = 5 et AC = 3, on poserait

$$\overline{AB}^2 = 25 - 9 = 16,$$

d'où

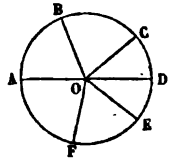
$$AB = \sqrt{16} = 4.$$

CIRCONFÉRENCE DU CERCLE.

76. La *circonférence du cercle* est une ligne courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur appelé *centre*.

Le *cercle* est la portion de plan terminée à la circonférence.

Fig. 49.



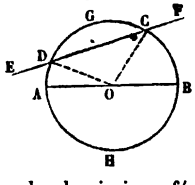
Dans la figure ci-contre, ABCDEFA est une circonférence de cercle dont le centre est en O. Les droites AO, BO, CO, etc., qui mesurent la distance des points A, B, C, etc., de cette ligne au centre O, et qui sont toutes égales, se nomment les *rayons* du cercle.

Une partie quelconque de la circonférence d'un cercle est un *arc de cercle*.

77. Puisque (17, Coroll. II) on ne peut mener d'un point à une droite donnée plus de deux droites égales, une droite et une circonférence de cercle ne peuvent se couper en plus de deux points.

Toute droite qui coupe la circonférence d'un cercle se nomme *sécante*; EF est une sécante. La partie de cette droite comprise dans le cercle s'appelle *corde*.

Fig. 50.



La corde CD qui passe par les extrémités d'un arc quelconque CGD *sous-tend* cet arc; la même droite est aussi la corde de l'arc CHD lequel, joint à CGD, compose la circonférence entière. Il est visible que, si le premier de ces arcs est moindre que la demi-circonférence, le second sera nécessairement plus grand.

Lorsqu'une corde passe par le centre du cercle, comme AB, on l'appelle *diamètre*.

Tous les diamètres du cercle sont égaux, puisqu'ils sont composés de deux rayons.

Le diamètre est la plus grande des droites que l'on peut tirer dans la circonférence du cercle, puisque toute autre corde CD est moindre que la somme des deux rayons menés par ses extrémités.

Digitized by Google

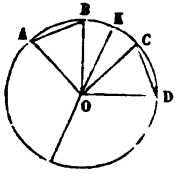
78. *Le diamètre partage la circonférence en deux parties égales;* car, si l'on plie la *fig.* 50 le long de la droite AB, la partie AGB de la circonférence doit se confondre avec AHB, sans quoi tous les points de l'une et de l'autre ne seraient pas également éloignés du centre O.

Le même raisonnement prouve aussi que deux cercles décrits du même rayon sont égaux; car il en résulte que, si l'on place le centre de l'un de ces cercles sur celui de l'autre, leurs deux circonférences se confondront.

COROLLAIRE. — *Deux arcs d'une même circonférence, ou de deux circonférences décrites avec le même rayon, sont superposables et peuvent se mesurer l'un par l'autre, comme s'il s'agissait de deux portions de ligne droite.*

79. *Dans le même cercle, ou dans deux cercles décrits du même rayon, les arcs égaux ont des cordes égales.*

Fig. 51.



Par le point K milieu de BC, menons le diamètre OK autour duquel nous rabattrons la demi-circonférence KCD sur la demi-circonférence KBA.

Puisque le point K est le milieu de BC, le point C tombera sur le point B; et puisque les deux arcs AB et CD sont égaux, le point D tombera sur le point A; par conséquent, les deux cordes coïncideront et seront égales.

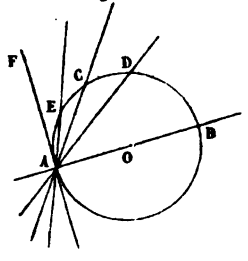
80. Réciproquement, *à des cordes égales correspondent des arcs égaux.*

En menant (*fig.* 51) les quatre rayons OA, OB, OC, OD, on forme deux triangles AOB, COD qui sont égaux comme ayant trois côtés égaux chacun à chacun; par conséquent, les angles AOB, COD sont égaux. Si donc on effectue le même rabattement que plus haut, les deux rayons OC et OD tomberont respectivement sur OB et OA; les deux cordes seront superposées, et il en sera de même des arcs qui seront égaux.

Remarque. — La réciproque qui vient d'être démontrée n'est exacte qu'autant que les arcs considérés sont moindres tous deux, ou qu'ils sont tous les deux plus grands qu'une demi-circonférence.

81. Considérons maintenant une circonférence et une sécante AC issue d'un point quelconque A de cette circonférence.

Fig. 52.



Si nous supposons que, tournant autour du point A, la droite AC s'infléchisse vers la position AD, il est visible que la portion AC comprise dans le cercle augmentera d'une manière continue jusqu'à ce que, le mouvement continuant, la sécante atteigne la position AB. A ce moment, la

Digitized by Google

corde AB est devenue un diamètre; c'est la plus grande corde possible (77).

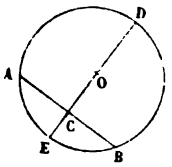
Si, au contraire, la sécante AC s'était transportée dans la direction AE, la corde AC aurait progressivement diminué, et cette diminution n'aurait eu d'autre limite que zéro.

Il est clair, en outre, que ces diverses phases se reproduiraient symétriquement au-dessous du diamètre AB, mais dans un ordre inverse, et l'on peut conclure de cet ensemble : 1° que, *pour des arcs inférieurs à une demi-circonférence, à un plus grand arc correspond une plus grande corde;* 2° que, *quand les arcs sont supérieurs à la demi-circonférence,* le contraire a lieu, et *à un plus grand arc correspond une plus petite corde.*

82. *Tout diamètre perpendiculaire sur une corde divise en deux parties égales cette corde et chacun des deux arcs sous-tendus.*

Rabattons, en effet, la demi-circonférence de gauche sur celle de droite autour du diamètre DE; AC perpendiculaire à DE se dirigera sur CB, et le point A tombera en B, puisque les deux demi-circonférences doivent coïncider (78).

Fig. 53.



On aura, par conséquent,

$$AC = BC, \quad \text{arc } AE = \text{arc } BE, \quad \text{arc } AD = \text{arc } BD.$$

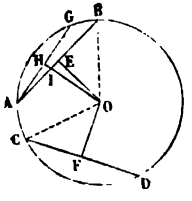
Corollaire I. — Puisque deux points suffisent pour déterminer la position d'une droite, et que le milieu d'une corde, le centre du cercle et les milieux des deux arcs sous-tendus sont toujours sur la même droite, il en résulte que, lorsqu'on sait qu'une droite passe par deux de ces points, on doit en conclure qu'elle passe nécessairement par les deux autres.

Corollaire II. — La droite CE qui joint le milieu d'une corde au milieu de l'arc sous-tendu est dite la *flèche* de cet arc; *la flèche d'un arc est perpendiculaire à la corde et passe par le centre.*

Corollaire III. — *Toute perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre.*

83. *Deux cordes égales sont également distantes du centre; de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre.*

Fig. 54.



Considérons d'abord les deux cordes égales AB et CD dont les distances au centre sont respectivement OE et OF; tirons les rayons OB et OC. Les deux triangles rectangles OEB, OFC sont égaux, puisqu'ils ont OB = OC comme rayons et BE = CF comme moitiés de cordes égales; il en résulte OE = OF.

Soient ensuite deux cordes inégales AB et AG

Digitized by Google

auxquelles nous pourrons supposer une extrémité commune, attendu que la distance d'une corde au centre ne dépend pas de la position qu'elle occupe. Il est clair qu'alors la distance OH de la plus petite corde AG est plus grande que OF, puisque sa partie OI est déjà plus longue, comme oblique, que la perpendiculaire OE.

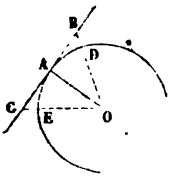
COROLLAIRE. — La réciproque de cette proposition est nécessairement vraie; il en résulte que *deux cordes également éloignées du centre sont égales*, et que, *de deux cordes inégalement éloignées, la plus éloignée est la plus petite*.

84. Nous avons vu (81) que, dans le mouvement de la sécante AC autour du point A (*fig.* 52), il y avait un sens dans lequel, la corde AC diminuant d'une manière continue, le point C se rapprochait sans cesse du point A jusqu'à ce que ces deux points fussent confondus en un seul. Dans cette position limite, la sécante prend le nom spécial de *tangente* au cercle, avec lequel elle n'a plus qu'un seul point commun et qu'elle ne fait plus que *toucher*.

On pourrait déjà conclure que la tangente est nécessairement perpendiculaire au rayon AB; car la ligne AC aurait pu parvenir à la même position FAG par un mouvement inverse qui eût reproduit de l'autre côté du diamètre AB les mêmes circonstances; à cause de cette parité des deux moitiés de la figure, les deux angles BAF et BAG doivent être égaux et par conséquent droits. D'ailleurs, la proposition du n° 82 a été établie indépendamment de la grandeur de la corde et quelque petite que soit celle-ci, et il est clair que la tangente peut être aussi considérée comme la limite d'un système de sécantes parallèles entre elles et perpendiculaires au rayon qui passe par leurs milieux.

Nous allons toutefois démontrer directement que *toute droite perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est une tangente au cercle*.

Fig. 55.



Il est clair en effet que la ligne AB, perpendiculaire sur AO, a tous ses points, sauf le point A, plus éloignés du centre O que ne l'est le point A, puisque les droites OB, OC, menées d'un côté ou de l'autre, sont des obliques nécessairement plus longues que AO. Les points B et C sont donc hors du cercle et la ligne AB est une tangente, puisqu'elle n'a qu'un seul point commun avec la circonférence.

85. *Réciproquement, toute tangente à la circonférence est perpendiculaire sur le rayon du point de contact*. Car, si la ligne AB (*fig.* 55) a tous ses points, sauf le point A, au dehors de la circonférence, et par suite plus éloignés du centre que ce dernier, le rayon OA est la plus courte ligne que l'on puisse mener du centre sur la tangente; c'est donc la perpendiculaire à cette tangente.

Digitized by Google

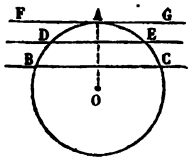
COROLLAIRE I. — *Il n'existe qu'une seule tangente en chacun des points d'une circonférence.*

COROLLAIRE II. — *Les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles*, comme étant perpendiculaires à une même droite.

COROLLAIRE III. — *Toutes les droites également distantes d'un point donné touchent une circonférence dont ce point est le centre.*

86. *Deux parallèles interceptent sur une circonférence des arcs égaux.* Soient BC et DE ces deux parallèles, et soit mené le rayon OA qui leur est perpendiculaire; les arcs AB et AC sont égaux, ainsi que AD et AE.

Fig. 56.



On a donc

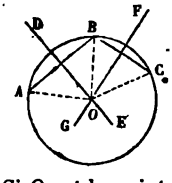
$$AB - AD \quad \text{ou} \quad BD = AC - AE \quad \text{ou} \quad CE.$$

Si l'une des sécantes parallèles devenait la tangente AF, la propriété énoncée aurait évidemment encore lieu dans ce cas. Il en serait de même encore (85, Coroll. II), si les deux parallèles étaient tangentes; car alors elles passeraient aux extrémités d'un même diamètre qui leur serait perpendiculaire, et les deux arcs égaux seraient les deux moitiés de la circonférence.

87. *Par trois points donnés non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence; mais il n'en peut passer qu'une.*

Soient A, B et C les trois points donnés; traçons les deux droites AB et BC; puis menons DE perpendiculaire au milieu de AB, et FG perpendiculaire au milieu de BC. Ces deux perpendiculaires se rencontrent nécessairement; car, si elles étaient parallèles, BA, perpendiculaire à l'une d'elles DE, le serait également à sa parallèle FG, et du point B partiraient alors deux droites BA et BC perpendiculaires à FG.

Fig. 57.



Si O est le point de rencontre des deux perpendiculaires DE et FG, ce point sera également distant des trois points A, B et C; on pourra donc décrire une circonférence du point O comme centre avec un rayon égal à OA, et cette circonférence passera en A, en B, et en C.

Il est d'ailleurs facile de voir que le centre de toute circonférence passant par les points A et B est nécessairement sur la perpendiculaire DE; de même toute circonférence passant en B et en C a son centre sur FG. Ces deux droites DE, FG ne pouvant se rencontrer qu'en un seul point, le centre d'une circonférence passant en A, B et C ne peut se trouver qu'en ce point O, et, par suite, cette circonférence est unique.

COROLLAIRE I. — Deux circonférences ne peuvent avoir trois points communs sans se confondre; *deux circonférences distinctes ne peuvent donc avoir plus de deux points communs.*

Digitized by Google

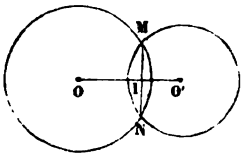
COROLLAIRE II. — *Le point de rencontre des trois perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle* (34) *est le centre d'une circonférence passant par les trois sommets.*

CONTACT ET INTERSECTION DES CERCLES.

88. Nous venons de voir que deux circonférences ne peuvent se couper en plus de deux points. Dans ce cas, *la ligne qui joint les deux centres est perpendiculaire à la corde commune, et divise cette droite en deux parties égales.*

On sait, en effet, que la perpendiculaire menée par le point I milieu de la corde MN (82, Coroll. II) passe par le centre de chaque cercle et se confond, par conséquent, avec la ligne des centres.

Fig. 58.

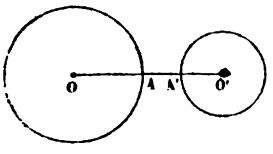


COROLLAIRE. — *Lorsque deux circonférences n'ont qu'un seul point commun*, auquel cas elles sont dites tangentes, *ce point est sur la ligne des centres.* Car deux circonférences, qui n'ont qu'un point commun, peuvent être considérées comme limites de deux circonférences se coupant d'abord en deux points situés de part et d'autre de la ligne des centres, et que l'on aurait écartées en faisant glisser les centres sur leur ligne primitive, jusqu'à ce que les deux points d'intersection se fussent réduits à un seul. Or, comme ces points sont toujours à des distances égales de la ligne des centres, il est évident qu'ils ne peuvent se réunir que sur cette ligne.

89. Deux circonférences situées dans le même plan ne peuvent occuper, l'une par rapport à l'autre, que cinq positions distinctes; elles peuvent être : 1° *extérieures l'une à l'autre* (*fig.* 59); 2° ou *tangentes extérieurement* (*fig.* 60); 3° ou *sécantes* et se coupant par conséquent en deux points (*fig.* 61); 4° ou *tangentes intérieurement* (*fig.* 62); 5° ou *intérieures l'une à l'autre* (*fig.* 63).

Dans ces divers cas, la distance des centres jouit des propriétés caractéristiques suivantes :

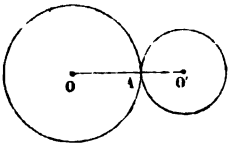
Fig. 59.



1°. *Quand deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons;* car il est clair que cette distance se compose des deux rayons OA, O'A', et de la partie AA' comprise entre les deux circonférences.

Digitized by Google

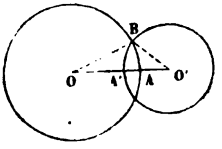
Fig. 60.



2°. *Lorsque deux circonférences se touchent extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons;* car la ligne des centres passant par le point de contact A (88, Coroll.), on a évidemment

$$OO' = OA + O'A.$$

Fig. 61.



3°. *Lorsque deux circonférences se coupent, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence.*

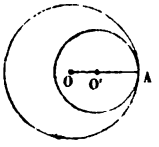
En effet, les trois points O, O' et B n'étant pas en ligne droite, forment un triangle dans lequel on a (29)

$$OO' < OB + O'B,$$

et

$$OO' > OB - O'B.$$

Fig. 62.

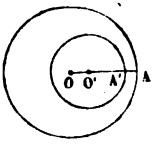


4°. *Quand deux circonférences se touchent intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons.*

La ligne des centres passe en effet (88, Coroll.) par le point de contact, et l'on a visiblement

$$OO' = OA - O'A.$$

Fig. 63.



5°. *Lorsque les deux circonférences sont intérieures l'une à l'autre, la distance des centres est moindre que la différence des rayons.*

En effet, la *fig.* 63 montre que

$$OO' + AA' = OA - O'A';$$

OO' n'est donc qu'une partie de la différence des rayons.

90. Les relations qui viennent d'être posées entre la distance des centres et la somme ou la différence des rayons sont incompatibles deux à deux, et constituent, par conséquent, autant de caractères propres à chacune des cinq positions relatives de deux circonférences; il en résulte que les cinq réciproques des propositions ci-dessus sont vraies et s'établissent toutes de la même manière, en montrant que, si de la relation donnée entre la distance des centres et les rayons on concluait à une autre position que celle énoncée, on tomberait sur une incompatibilité produite par l'une des quatre autres propositions directes.

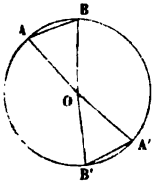
Digitized by Google

MESURE DES ANGLES.

91. *Dans un même cercle ou dans des cercles de même rayon, si deux arcs sont égaux, les angles au centre qui s'appuient sur ces arcs sont égaux.*

Si les arcs AB, A'B' sont égaux, les cordes AB, A'B' de ces arcs seront égales (79); les deux triangles AOB, A'OB' seront donc aussi égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et, par conséquent, l'angle AOB sera égal à l'angle A'OB'.

Fig. 64.

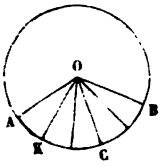


Réciproquement, *si les angles au centre sont égaux, les arcs le seront également,* car les triangles AOB, A'OB' seront encore égaux comme ayant un angle égal entre côtés égaux; par suite les cordes seront égales, puis enfin les arcs seront égaux.

92. *Dans le même cercle ou dans des cercles de même rayon, le rapport de deux angles au centre est le même que celui des arcs compris entre leurs côtés.*

Soient les deux angles au centre AOB et AOC dont les arcs AB et AC ont pour plus grande commune mesure (56) l'arc AK contenu 5 fois dans le premier et 3 fois dans le second, de telle sorte que l'on ait

Fig. 65.



$$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}.$$

Les angles au centre correspondants aux divisions des arcs AB et AC étant égaux entre eux, le petit angle AOK est contenu 5 fois dans AOB, et 3 fois dans AOC. On a donc aussi

$$\frac{AOB}{AOC} = \frac{5}{3},$$

égalité qui, rapprochée de la précédente, donne

$$\frac{AOB}{AOC} = \frac{AB}{AC}.$$ C. Q. F. D.

Corollaire. — Le rapport des arcs AB et AC étant le même que celui des angles AOB et AOC, il en résulte que, si l'on prend AC pour unité d'arc et AOC pour unité d'angle, l'angle AOB contiendra autant d'unités d'angle que l'arc AB contient d'unités d'arc, en sorte qu'il suffira de connaître la mesure de l'une de ces grandeurs pour en déduire celle de l'autre. C'est dans ce sens que l'on dit qu'*un angle a pour mesure l'arc de circonférence décrit de son sommet comme centre et compris entre ses côtés;* et cette locution concise revient à celle-ci : *Tout angle contient autant de fois*

Digitized by Google

l'angle pris pour terme de comparaison des angles ou pour unité d'angle, que l'arc décrit de son sommet comme centre et compris entre ses côtés contient l'arc du même cercle compris entre les côtés de ce second angle et décrit de son sommet comme centre.

93. L'angle qui paraît le plus propre à servir d'unité est l'angle droit; cet angle comprend entre ses côtés le quart de la circonférence ou le *quadrant*. On aura donc la mesure d'un angle en comparant l'arc compris entre ses côtés avec celui qu'intercepte sur la même circonférence l'angle droit ayant son sommet au centre.

Cette manière d'évaluer les angles est cependant moins usitée que la suivante :

On a divisé la circonférence en 360 parties ou *degrés*, chaque degré en 60 *minutes*, chaque minute en 60 *secondes*. Un angle s'évalue alors par le nombre de degrés, minutes et secondes compris dans l'arc intercepté par ses côtés; les mots degrés, minutes, secondes s'appliquent d'ailleurs indifféremment aux arcs ou aux angles qui leur correspondent.

Le degré se désigne ordinairement par le signe °, la minute par ′, la seconde par ″. Ainsi l'arc ou l'angle de 37 degrés 28 minutes 17 secondes s'écrit

$$37° 28′ 17″.$$

94. Les additions et soustractions de degrés, minutes et secondes s'effectuent sans aucune difficulté; on commence par les secondes dans l'un et l'autre cas.

S'il s'agit d'une somme à faire, on fait l'addition des nombres de secondes; si ce total surpasse 60, on en extrait autant de fois 60 secondes ou autant de minutes que cela est possible; on écrit seulement les secondes qui restent et l'on reporte les minutes extraites au total des minutes, que l'on traite de la même manière par rapport aux degrés.

Pour faire une soustraction, on retranche les secondes du nombre à soustraire de celles du nombre duquel il faut soustraire; en cas d'impossibilité, on emprunte une minute de ce dernier pour la convertir en 60 secondes, et l'opération s'achève sans autre difficulté.

Les multiplications et divisions s'exécutent de même suivant les règles ordinaires, en tenant seulement compte de la division sexagésimale des degrés et minutes.

Proposons-nous, pour exercice, de résoudre les deux questions suivantes :

1°. *Deux angles* A *et* B *d'un triangle valent respectivement*

$$A = 21° 34′ 19″,$$
$$B = 83° 17′ 54″.$$

Quelle est la valeur du troisième angle C?

Les trois angles valent deux droits ou 180 degrés; on aura donc C en

Digitized by Google

faisant la somme A + B, et retranchant cette somme de 180 degrés. Ces calculs donnent d'abord

$$A + B = 104°51'73'' \text{ ou } 104°52'13'',$$

puis, en retranchant A + B de 180°, ou de $179°59'60''$,

on trouve $C = 75°\ 7'47''$.

2°. *Évaluer en degrés la somme des angles d'un polygone de 25 côtés.*

La somme des angles d'un polygone de 25 côtés vaut (44) 46 angles droits; or un angle droit vaut le quart de 360° ou 90 degrés; le nombre cherché est donc 4140 degrés.

S'il s'agissait d'un polygone régulier, tous les angles seraient égaux et chacun d'eux vaudrait

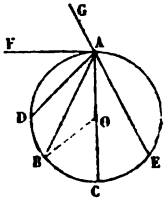
$$\frac{4140°}{25}, \text{ ou } 165°,6, \text{ ou } 165°36'.$$

95. Outre cette division sexagésimale de la circonférence, les auteurs du système métrique ont créé une division *centésimale*, en 400 *grades*, dont chacun vaut 100 minutes de 100 secondes chacune. Mais l'ancien usage a prévalu jusqu'à ce jour, et c'est la première division qui est encore admise; nous l'adopterons exclusivement dans tout le cours de cet ouvrage.

96. *Tout angle dont le sommet est placé sur la circonférence d'un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Plusieurs cas sont à considérer: 1°. *Si l'un des côtés de l'angle proposé passe par le centre*, comme dans l'angle BAC, nous mènerons le rayon OB. L'angle BOC étant extérieur au triangle ABO (30, Coroll. IV), on a

Fig. 66.



$$BOC = BAO + OBA;$$

mais, le triangle ABO étant isocèle, on a aussi

$$BAO = OBA,$$

et, par suite,

$$BOC = 2BAO;$$

donc

$$BAO \text{ ou } BAC = \frac{1}{2} BOC.$$

Or l'angle BOC a pour mesure l'arc BC; l'angle BAC, qui en est la moitié, aura donc pour mesure la moitié de l'arc BC.

2°. Soit maintenant l'angle BAE qui comprend le centre entre ses deux côtés. Cet angle est la somme des deux angles BAC et CAE qui ont respectivement pour mesure la moitié de BC et la moitié de CE; il aura

Digitized by Google

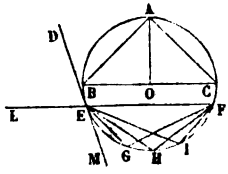
donc pour mesure la somme des deux mesures précédentes, ou la moitié de l'arc total BCE.

3°. Par le même raisonnement, l'angle DAB, dont les côtés ne comprennent pas le centre, aura pour mesure la moitié de l'arc CD moins la moitié de BC, ou la moitié de DB.

4°. Si, le côté AE restant immobile, le côté AB de l'angle BAE tournait autour du sommet A jusqu'à devenir la tangente AF à la circonférence, le nouvel angle EAF aurait encore pour mesure la moitié de l'arc ECBDA compris entre ses côtés, puisque cette propriété est applicable à l'angle variable quelque près qu'il soit de sa valeur limite EAF.

COROLLAIRE I. — Tous les angles qui, comme EIF, EHF, EGF, DEF ont leur sommet à la circonférence et s'appuient sur le même arc, sont égaux entre eux, puisqu'ils ont pour mesure la moitié du même arc EAF compris entre leurs côtés.

Fig. 67.

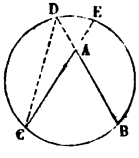


COROLLAIRE II. — L'angle BAC dont le sommet est sur la circonférence et qui s'appuie sur les extrémités d'un diamètre BC, est droit, puisqu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence BHC comprise entre ses côtés, ou le quart de la circonférence entière (93).

COROLLAIRE III. — L'angle G est dit *inscrit* dans l'arc FHE lequel, par contre, est dit *capable* de cet angle. Au moyen de cette locution abrégée, les deux corollaires précédents peuvent s'énoncer ainsi : *Tous les angles inscrits dans le même arc sont égaux*, et *tout angle inscrit dans une demi-circonférence est droit.*

97. *Tout angle dont le sommet est intérieur à la circonférence a pour mesure la demi-somme des deux arcs compris entre ses côtés et entre leurs prolongements.*

Fig. 68.



Soit BAC l'angle en question; prolongeons ses côtés jusqu'à la circonférence en D et en E, et tirons CD.

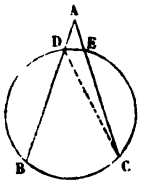
L'angle BAC étant extérieur au triangle ACD est égal à la somme des deux angles intérieurs ACD et ADC, lesquels étant incrits ont pour mesure, l'un la moitié de DE, l'autre la moitié de BC; ledit angle BAC a donc pour mesure lui-même $\frac{BC + DE}{2}$.

98. *Tout angle dont le sommet est extérieur à la circonférence et dont les deux côtés rencontrent cette ligne, a pour mesure la demi-différence des deux arcs compris entre ses côtés.*

Si nous tirons en effet CD, nous formerons encore un triangle ACD, dans

Digitized by Google

Fig. 69.

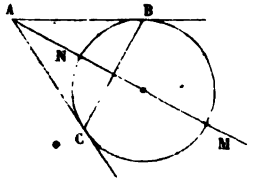


lequel l'angle A est égal à l'angle extérieur BDC diminué de l'autre angle intérieur ACD.

Or, les deux angles incrits BDC et ACD ont pour mesure, l'un la moitié de l'arc BC, l'autre la moitié de DE; par suite, l'angle A a pour mesure la différence de ces deux mesures, ou $\frac{BC - DE}{2}$.

COROLLAIRE I. — Le théorème qui précède étant démontré pour toutes les positions que peuvent avoir les deux côtés de l'angle, tant qu'ils coupent chacun en deux points la circonférence, la même mesure s'applique encore au cas où les deux côtés de l'angle, ou seulement l'un d'eux, deviennent tangents au cercle.

Fig. 70.



Ainsi, l'angle BAC a pour mesure

$$\frac{BMC - BNC}{2}.$$

Cet angle est dit *circonscrit* à la circonférence.

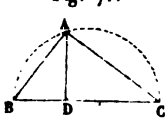
COROLLAIRE II. — Nous avons vu (96, 4°) que l'angle ABC a pour mesure la moitié de l'arc BNC, et que l'angle ACB a la même mesure; ces deux angles sont donc égaux et le triangle ABC est isocèle; par suite AB = AC. De plus, la bissectrice de l'angle BAC est perpendiculaire sur le milieu de la corde BC et passe par le centre. De là cet énoncé :

Les côtés d'un angle circonscrit, limités aux points de contact, sont égaux entre eux, et la bissectrice est un diamètre perpendiculaire sur le milieu de la corde de contact.

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES CORDES, SÉCANTES ET TANGENTES.

99. 1° *La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque d'une circonférence sur un diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diamètre;* 2° *Toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre issu de l'une de ses extrémités et la partie du diamètre comprise entre l'origine commune et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité.*

Fig. 71.



Supposons que du point A de la circonférence nous abaissions AD perpendiculaire sur le diamètre BC, et que nous tirions les deux cordes AB et AC; le triangle ABC sera rec-

Digitized by Google

tangle, et fournira (74 et 75)

$$\overline{AD}^2 = BD \times DC,$$

ainsi que

$$\overline{AB}^2 = BD \times BC.$$

Remarque. — La longueur BD s'appelle la *projection* de la corde AB sur le diamètre BC.

100. *Si d'un point pris dans le plan d'un cercle on mène deux sécantes, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant.*

Soit E le point de départ des sécantes EB et EC, les deux *fig.* 72 et 73 se rapportant, l'une au cas où le point est à l'extérieur, l'autre au cas où il est à l'intérieur de la circonférence; tirons les deux cordes AC et BD. Les deux triangles AEC et BED sont semblables, comme ayant deux angles égaux chacun à chacun (65, Rem.), savoir : l'angle ACD et l'angle ABD qui ont pour mesure la moitié du même arc AD; puis l'angle AEC qui est superposé ou opposé par le sommet à BED. Si donc on compare les côtés homologues, on aura la proportion

Fig. 72.

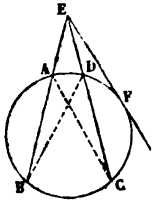
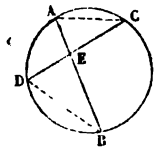


Fig. 73.



$$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE},$$

qui équivaut à $AE \times BE = CE \times DE$, conformément à l'énoncé.

101. Si dans la *fig.* 72 on conçoit que la sécante EC tourne autour du point E en s'avançant vers F pour se dégager du cercle, les points C et D se rapprocheront sans cesse, et la différence entre cette sécante et sa partie extérieure deviendra de plus en plus petite. La proposition ci-dessus aura nécessairement encore lieu quand cette différence sera nulle, c'est-à-dire lorsque EC sera devenue la tangente EF, la partie extérieure étant elle-même égale à la ligne entière.

On aura alors

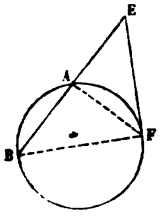
$$\overline{EF}^2 = AE \times BE,$$

ce qui nous apprend que *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

Cette proposition peut du reste se démontrer directement comme il suit :

Digitized by Google

Fig. 74.



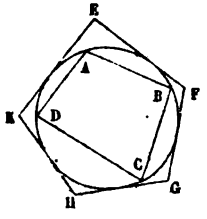
Ayant tiré les cordes AF et BF, on a les triangles AEF et BEF qui sont semblables ; car l'angle E est commun, et les angles EBF et EFA sont égaux, comme ayant pour mesure la moitié du même arc AF ; ces triangles donnent donc, par la comparaison de leurs côtés homologues,

$$\frac{AE}{EF} = \frac{EF}{BE}.$$

POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS AU CERCLE.

102. Un polygone est dit *inscrit* dans une circonférence, lorsque tous ses sommets sont situés sur cette ligne ; la circonférence est alors *circonscrite* au polygone.

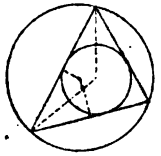
Fig. 75.



Un polygone est *circonscrit* à une circonférence, lorsque tous ses côtés sont tangents à cette ligne qui est alors dite *inscrite* dans le polygone.

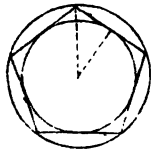
Dans la *fig.* 75 ci-contre, le quadrilatère ABCD est inscrit, et le pentagone EFGHK est circonscrit.

Fig. 76.



Corollaire I. — *Tout triangle est inscriptible à une circonférence* (87, Coroll. II). *Tout triangle est également circonscriptible à une circonférence,* puisque (36) le point de rencontre des bissectrices est à égale distance des trois côtés.

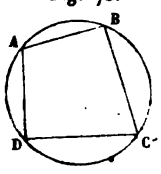
Fig. 77.



Corollaire II. — Il résulte aussi du n° 51 que, à tout polygone régulier correspondent deux circonférences, l'une inscrite et l'autre circonscrite, ayant pour centre commun celui du polygone, et pour rayons respectifs son apothème et son rayon propre.

103. *Dans tout quadrilatère inscriptible, deux angles opposés sont supplémentaires.*

Fig. 78.

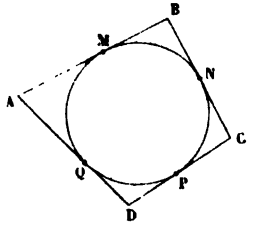


En effet, les angles inscrits A et C étant respectivement mesurés (96) par la moitié de l'arc BCD et la moitié de l'arc BAD, leur somme a pour mesure la moitié de la circonférence entière, ou deux quadrants.

Digitized by Google

104. *Dans tout quadrilatère circonscriptible, les deux sommes des côtés opposés sont égales.*

Fig. 79.



On a en effet (98, Coroll. II)

$$AM = AQ,$$
$$BM = BN,$$
$$DP = DQ,$$
$$CP = CN.$$

d'où l'on tire, en additionnant,

$$AM + BM + DP + CP = AQ + BN + DQ + CN,$$

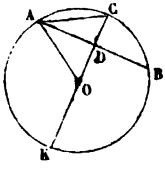
ou

$$AB + CD = BC + AD.$$

105. *Un polygone inscrit dont les sommets partagent la circonférence en parties égales est régulier;* car tous ses côtés sont des cordes égales, et tous ses angles ont des mesures égales.

106. Problème. — *Un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit dans un cercle, calculer la valeur du côté du polygone régulier inscrit dans le même cercle et d'un nombre double de côtés.*

Fig. 80.



Soit AB le côté du premier polygone, AC sera celui du second.

D'après le théorème du n° 99, nous aurons

$$\overline{AC}^2 = CK \times CD = 2CO \times CD = 2CO\,(CO - OD).$$

Mais le triangle rectangle AOD donne (75, Coroll.), à cause de $AO = CO$ et $AD = \frac{AB}{2}$,

$$OD = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{\overline{CO}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}.$$

Reportant cette valeur de OD dans l'expression de $\overline{AC}^2$, nous obtenons

$$\overline{AC}^2 = 2CO\left(CO - \sqrt{\overline{CO}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}\right).$$

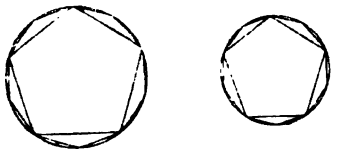
Au moyen de cette relation, nous calculerons aisément le côté AC, quand nous connaîtrons le rayon CO du cercle et le côté AB du premier polygone.

On trouverait de même le côté du polygone régulier inscrit au même cercle et d'un nombre de côtés double de celui qu'on vient de calculer, et ainsi de suite.

Digitized by Google

107. Si deux circonférences sont partagées en un même nombre de parties égales, deux polygones ayant ces points de division pour sommets seront réguliers et semblables (**62**).

Fig. 81.



En doublant le nombre des côtés de ces polygones et de ceux qu'on obtiendra successivement, on formera deux suites de polygones inscrits semblables deux à deux et ayant pour limites les cercles eux-mêmes, dont ils se rapprochent de plus en plus, en même temps que leurs rayons et apothèmes tendent à se confondre dans la valeur unique du rayon de chaque cercle.

Ainsi, *deux cercles peuvent être considérés comme deux polygones réguliers semblables.*

Mais deux polygones réguliers semblables ont leurs périmètres (**72**, Coroll.) dans le même rapport que les rayons et apothèmes; il est donc permis de dire aussi que *deux circonférences sont entre elles dans le même rapport que leurs rayons.*

108. Puisque deux circonférences sont entre elles dans le rapport de leurs rayons R et R', on a

$$\frac{\text{circ. R}}{\text{circ. R'}} = \frac{\text{R}}{\text{R'}} = \frac{2\,\text{R}}{2\,\text{R'}},$$

ou

$$\frac{\text{circ. R}}{2\,\text{R}} = \frac{\text{circ. R'}}{2\,\text{R'}},$$

Ceci montre que le *rapport d'une circonférence à son diamètre* est un nombre constant pour toutes les circonférences; en désignant ce rapport par la lettre grecque π, qui se prononce *pi*, nous aurons

$$\frac{\text{circ. R}}{2\,\text{R}} = \pi, \quad \text{ou} \quad \text{circ. R} = 2\pi\text{R}.$$

Telle est la formule qui donnera la longueur développée d'une circonférence, quand on connaîtra son rayon R et la valeur constante du nombre π que nous allons chercher à déterminer, en nous bornant, bien entendu, à des indications sommaires.

109. Pour simplifier la recherche du nombre constant π, nous emploierons de préférence la circonférence dont le rayon R est égal à $\frac{1}{2}$, et la formule du numéro précédent nous donnera

$$\pi = \frac{\text{circ.}\frac{1}{2}}{1} = \text{circ.}\frac{1}{2}.$$

Digitized by Google

On voit par là qu'on obtiendra π en déterminant la longueur de la circonférence dont le rayon est $\frac{1}{2}$.

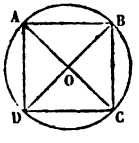
Ne pouvant connaître cette longueur indépendamment de la valeur cherchée de π, nous y suppléerons en y inscrivant d'abord un polygone régulier dont le côté soit facile à calculer, par exemple le carré; puis, en doublant successivement le nombre des côtés et calculant le périmètre au moyen de la formule du n° 106. On comprend aisément qu'il soit possible de pousser assez loin ces opérations pour que, sans erreur sensible, on y puisse prendre le périmètre du dernier polygone obtenu pour la longueur de la circonférence elle-même. Ces calculs conduisent à la valeur

$$\text{circ.}\frac{1}{2} = \pi = 3,1415926535897 9, \text{ etc.}$$

Remarque I. — Archimède avait indiqué pour π la valeur $\frac{22}{7}$, un peu plus forte que celle ci-dessus; un géomètre du nom de Métius cite la valeur $\frac{355}{113}$ qui en approche davantage, et qui a été conservée à cause de la facilité mnémonique qu'elle présente, ses deux termes étant formés par le partage de la suite de chiffres impairs 113355.

Remarque II. — Nous avons dit que le carré était facile à inscrire dans le cercle; il suffit en effet de tracer deux diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre et de joindre deux à deux leurs extrémités.

Fig. 82.



Les angles du quadrilatère sont tous droits, comme inscrits dans une demi-circonférence, et les côtés AB, BC, CD, DA, sont égaux comme hypoténuses de triangles rectangles visiblement égaux entre eux.

On calcule du reste facilement le côté AB du carré, par le moyen du triangle rectangle AOB qui donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{2AO}^2.$$

On tire de là

$$AB = AO\sqrt{2},$$

ou, si le rayon AO est égal à $\frac{1}{2}$,

$$AB = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Digitized by Google

AIRE DES POLYGONES ET DU CERCLE.

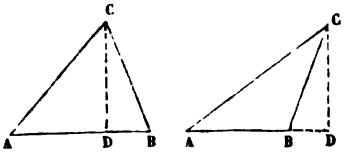
AIRE DES POLYGONES.

110. Mesurer une surface, c'est chercher combien elle contient de fois l'unité superficielle; en d'autres termes, c'est chercher le rapport de son étendue à l'étendue de l'unité de surface. Le nombre qui exprime ce rapport se nomme la *mesure* ou l'*aire* de cette surface.

Il est évident que deux figures de formes très-différentes peuvent renfermer des aires égales; nous les appellerons *équivalentes*, et nous connuerons à nommer *égales* celles qui peuvent être superposées.

111. Dans un triangle, on appelle *hauteur* une perpendiculaire abaissée du sommet de l'un des angles sur la direction du côté opposé, qui prend alors le nom de *base*. Dans les deux triangles de la *fig.* 83, le côté AB est la base, et la hauteur correspondante est CD. On voit que, selon le cas, cette hauteur tombe sur le côté AB lui-même ou sur son prolongement.

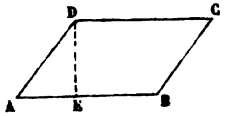
Fig. 83.



Un triangle a trois hauteurs qui se rapportent respectivement à chacun des trois côtés pris pour base.

112. Dans un parallélogramme ABCD, on appelle *bases* deux côtés opposés AB et CD, et *hauteur*, la distance uniforme DE de ces deux parallèles.

Fig. 84.



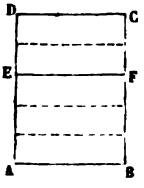
Une pareille figure comporte nécessairement deux hauteurs différentes, relatives chacune à un couple de côtés opposés.

S'il s'agit d'un rectangle, chacun des côtés représente une hauteur relativement aux deux autres côtés opposés pris pour bases.

113. La *hauteur* d'un trapèze est la distance des deux côtés parallèles qui s'appellent exclusivement les *bases* de la figure.

114. *Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Fig. 85.



Soient les deux rectangles ABCD et ABFE, dont les hauteurs respectives sont AD et AE; supposons que la plus grande commune mesure de ces deux hauteurs soit contenue 5 fois dans AD et 3 fois dans AE, de telle sorte que l'on ait $\frac{AD}{AE} = \frac{5}{3}$; par les points de division menons des parallèles à la base, et nous formerons 5 rectangles partiels qui seront

Digitized by Google

tous égaux entre eux, comme ayant (55) deux côtés adjacents égaux chacun à chacun ou, si l'on veut, comme ayant même base et même hauteur.

Le plus grand rectangle ABCD contiendra 5 de ces rectangles partiels, et le plus petit ABFE en contiendra 3 ; on aura donc

$$\frac{\text{ABCD}}{\text{ABFE}} = \frac{5}{3},$$

relation qui, rapprochée de la précédente, donnera

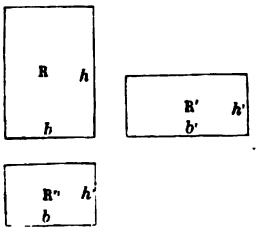
$$\frac{\text{ABCD}}{\text{ABFE}} = \frac{\text{AD}}{\text{ED}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — On peut dire aussi que deux rectangles de même hauteur sont dans le même rapport que leurs bases, puisque l'on pourrait prendre AD et AE pour bases des deux rectangles ayant alors pour hauteur commune AB.

115. *Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur.*

Soient R et R′ les deux rectangles, b et b' leurs bases, h et h' leurs hauteurs. Imaginons un troisième rectangle R″ ayant même base b que le premier, et même hauteur h' que le second.

Fig. 86.



Puisque R et R″ ont une même base, ils sont entre eux comme leurs hauteurs, et l'on a

$$\frac{\text{R}}{\text{R}''} = \frac{h}{h''};$$

puisque R″ et R′ ont même hauteur h', on a

$$\frac{\text{R}''}{\text{R}'} = \frac{b}{b'},$$

et si nous multiplions membre à membre ces deux égalités, nous trouverons

$$\frac{\text{R} \times \text{R}''}{\text{R}'' \times \text{R}'} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{R}}{\text{R}'} = \frac{b \times h}{b' \times h'};$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

116. La mesure des aires ayant pour objet de chercher combien une aire donnée en contient une autre prise pour terme de comparaison ou pour unité, on prend pour ce terme de comparaison un rectangle carré dont le côté est égal à l'unité de longueur. En supposant donc la base b et la hauteur h d'un rectangle rapportées à cette unité de longueur, et exprimées en nombres, on aura

$$\frac{\text{R}}{1} = \frac{b \times h}{1 \times 1}, \quad \text{ou} \quad \text{R} = b \times h;$$

Digitized by Google

Ce qui montre que *le rectangle* R *contient le rectangle unité autant de fois qu'il y a d'unités numériques dans le produit du nombre d'unités linéaires de la base b par le nombre d'unités linéaires de la hauteur h;* c'est dans ce sens que l'on remplace cet énoncé par le suivant, qui est plus abrégé : *L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

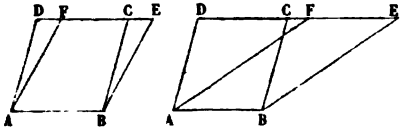
COROLLAIRE. — Si les deux côtés du rectangle devenaient égaux, auquel cas la figure deviendrait un carré, son aire serait mesurée par la seconde puissance de son côté; de là vient qu'on appelle aussi carré d'un nombre la seconde puissance de ce nombre.

117. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Cette proposition sera évidente, si nous établissons que *tout parallélogramme équivaut au rectangle* ou, plus généralement, *à tout parallélogramme de même base et de même hauteur.*

Les deux parallélogrammes ayant même base et même hauteur, on pourra poser la base de l'un sur celle de l'autre, et le côté opposé à la base du premier tombera sur le côté correspondant du second ou sur le prolongement de ce côté, ainsi que le montrent les deux parties de la figure ci-contre.

Fig. 87.



Cela posé, les triangles ADF et BCE sont égaux, parce que les côtés AD et BC, AF et BE sont respectivement égaux comme côtés opposés d'un même parallélogramme, et que les angles DAF, CBE sont égaux comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens.

Or, si du quadrilatère ABDE on retranche, d'une part le triangle ADF, de l'autre le triangle égal BCE, on aura nécessairement deux aires équivalentes, dont l'une sera le parallélogramme ABEF, et l'autre le parallélogramme ABCD.

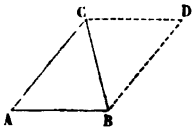
COROLLAIRE. — Ainsi que les rectangles, deux parallélogrammes quelconques sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur, et simplement comme leurs bases si les hauteurs sont égales, ou comme leurs hauteurs s'ils ont des bases égales.

118. *L'aire d'un triangle est mesurée par la moitié du produit de sa base par sa hauteur.* Cette vérité deviendra manifeste quand nous aurons démontré *que tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.*

En effet, si par les sommets B et C du triangle ABC, nous menons les droites BD et CD respectivement parallèles aux côtés AC et AB, la figure ABDC sera un parallélogramme ayant même base et même hauteur

Digitized by Google

Fig. 88.



que le triangle ABC, et dans lequel les triangles ABC et BCD seront égaux. Le triangle ABC est donc la moitié du parallélogramme ABDC.

COROLLAIRE I. — *Deux triangles qui ont même base et même hauteur sont équivalents;* car chacun d'eux est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, et ces deux parallélogrammes sont équivalents.

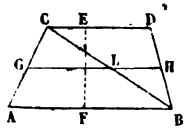
COROLLAIRE II. — Deux triangles quelconques sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur, ou comme leurs bases quand les hauteurs sont égales, ou comme les hauteurs s'ils ont même base.

COROLLAIRE III. — L'aire d'un triangle équilatéral dont le côté est a s'exprime par $\frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ou $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, puisque sa hauteur est

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

119. *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de la demi-somme de ses bases par sa hauteur.*

Fig. 89.



En tirant la diagonale BC, on partage le trapèze ABCD en deux triangles ABC et BCD, dont la hauteur commune est EF, et qui ont respectivement pour bases les deux bases du trapèze.

Or, le triangle ABC a pour mesure $\frac{1}{2}\text{AB} \times \text{EF}$,

et le triangle BCD ..... $\frac{1}{2}\text{CD} \times \text{EF}$.

Par conséquent, le trapèze entier a pour mesure

$$\frac{1}{2}\text{AB} \times \text{EF} + \frac{1}{2}\text{CD} \times \text{EF}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(\text{AB} + \text{CD}) \times \text{EF},$$

comme nous l'avions annoncé.

Remarque. — La droite GH, menée parallèlement à AB par le milieu de AC, et qui passe aussi par le milieu de BD (59), est égale à la demi-somme des bases du trapèze; car, d'un côté, GL est égal à la moitié de AB, à cause de la similitude des triangles ABC et GLC; de l'autre, LH est égal à la moitié de CD, à cause de la similitude des triangles CBD et LHB. On peut donc dire encore qu'*un trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

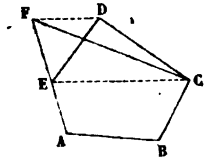
120. Plusieurs moyens se présentent maintenant pour évaluer l'aire d'un polygone quelconque. Nous allons d'abord donner le procédé qui permet

Digitized by Google

de transformer un polygone en un autre polygone équivalent et qui ait un côté de moins que le premier; on pourra alors successivement réduire le nombre des côtés d'un polygone donné, et le ramener à un triangle équivalent que l'on changera facilement lui-même en carré.

121. Pour *transformer un polygone* ABCDE *d'un certain nombre de côtes en un autre qui ait un côté de moins, et qui lui soit équivalent*, nous tirerons la diagonale EC qui détache un triangle EDC; puis, par le sommet D, nous mènerons parallèlement à CE la droite DF, qui déterminera un point F sur le prolongement du côté AE. En joignant ce point au sommet C, on formera un triangle CEF équivalent à EDC, comme ayant même base EC et même hauteur que lui, et dont l'un des côtés EF sera dans la direction de l'un EA des côtés du polygone primitif.

Fig. 90.



Il en résulte que le nouveau polygone ABCF a nécessairement un côté de moins que ABCDE.

122. Par la méthode précédente on peut ramener tout polygone à un triangle équivalent; voici comment on transformerait enfin ce triangle en un carré :

Soient b la base et h la hauteur du triangle; son aire sera représentée par $b \times \frac{h}{2}$. Si nous désignons par x le côté cherché du carré équivalent, la surface de ce carré sera x^2, et l'on devra avoir

$$x^2 = b \times \frac{h}{2}.$$

On aura donc x en construisant une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur du triangle, par l'un des moyens qui seront indiqués plus loin (143).

Corollaire. — Si, au lieu d'un triangle, c'était un parallélogramme que l'on eût à ramener à un carré, on aurait

$$x^2 = b \times h,$$

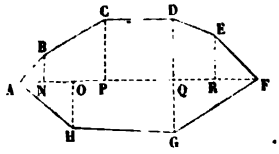
et cette relation conduirait à construire une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur du parallélogramme.

123. Tout polygone pouvant être partagé en triangles, on évalue encore son aire en calculant séparément celle de chacun des triangles qui le composent, et en faisant la somme de ces aires partielles.

On peut encore, et c'est le procédé qu'on trouve le plus commode dans la pratique, décomposer le polygone en triangles rectangles et en trapèzes rectangles, par le moyen de perpendiculaires abaissées de chaque sommet sur une même diagonale AF.

Digitized by Google

Fig. 91.



Les différentes portions de cette base AF, et les perpendiculaires BN, CP, etc., étant mesurées avec soin, on évaluera, par les méthodes exposées aux nos 118 et 119, les aires des figures partielles, et, par suite, l'aire cherchée.

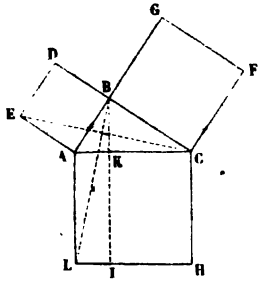
Au lieu de mener une diagonale, on peut tracer une droite quelconque, rencontrant ou non le polygone, et de tous les sommets abaisser des perpendiculaires sur cette droite; on obtient encore, dans ce cas, la surface du polygone en faisant la somme ou la différence des aires d'un certain nombre de trapèzes ou de triangles.

124. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.*

Cette vérité est contenue implicitement dans le n° 75, puisque nous y avons fait voir que les secondes puissances des nombres qui représentent les longueurs des côtés, puissances qui (116, Coroll.) expriment les aires des carrés correspondants, ont entre elles une relation telle, que celle qui correspond à l'hypoténuse est égale à la somme des deux autres; nous allons, toutefois, démontrer cette importante propriété directement sur les surfaces elles-mêmes.

Il faut, pour cet objet, abaisser du sommet B de l'angle droit, sur l'hypoténuse, la perpendiculaire BK, que l'on prolonge jusqu'en I; on a ainsi partagé le carré de l'hypoténuse en deux rectangles ALIK et CHIK, respectivement équivalents aux carrés faits sur les deux autres côtés.

Fig. 92.



En effet, si l'on mène les deux droites EC et BL, les deux triangles EAC, BAL sont égaux, parce que les côtés AE et AB, AL et AC sont respectivement égaux comme côtés d'un même carré, et que les angles CAE et BAL composés chacun d'un angle droit et de l'angle BAC, sont aussi égaux.

Or, le triangle EAC est la moitié (118) du carré ABDE, qui a même base AE et même hauteur AB; de même le triangle BAL est la moitié du rectangle ALIK qui a même base AL et même hauteur AK.

Par conséquent, le rectangle ALIK équivaut au carré ABDE. On démontrerait de même que le rectangle CHIK équivaut au carré BCFG; donc la somme des deux rectangles, ou le carré ACHL, équivaut à la somme des deux autres carrés.

Corollaire. — Les rectangles ALIK, CHIK et le carré ACHL, ayant même hauteur AL, sont entre eux comme leurs bases (114); mais les deux

Digitized by Google

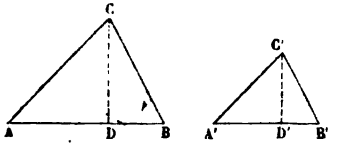
rectangles sont respectivement équivalents aux carrés ABDE et BCFG; donc *les carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont entre eux comme les deux parties correspondantes de l'hypoténuse.*

AIRE DU CERCLE.

125. *Les aires de deux polygones semblables sont dans le même rapport que les carrés de leurs côtés homologues.*

1°. Considérons d'abord deux triangles semblables ABC, A'B'C', et menons leurs hauteurs correspondantes CD et C'D'. La similitude de ces triangles donne

Fig. 93.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'};$$

de plus, les triangles rectangles ACD, A'C'D', qui ont l'angle A égal à A', sont aussi semblables, et donnent

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

En multipliant ces deux égalités membre à membre, on trouve

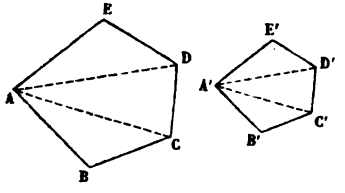
$$\frac{AB \times CD}{A'B' \times C'D'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}.$$

Or, les triangles donnés sont (118, Coroll. II) dans le même rapport que les produits $AB \times CD$, $A'B' \times C'D'$; donc aussi

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}.$$

2°. Soient maintenant les deux polygones semblables ABCD, A'B'C'D', que nous partagerons en un même nombre de triangles semblables et pareillement disposés (69). Chaque triangle du premier sera, à son correspondant dans le second, comme le carré de l'un des côtés du premier polygone est au carré du côté homologue du second; on aura donc

Fig. 94.



$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}, \quad \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}, \quad \frac{ADE}{A'D'E'} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}.$$

Digitized by Google

Mais la similitude des polygones donne d'ailleurs cette suite de rapports égaux :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'},$$

de laquelle on tire

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}.$$

Par suite, le rapport d'un triangle du premier polygone à son correspondant dans le second est constant, et l'on a

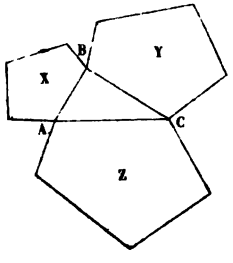
$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{ADE}{A'D'E'},$$

nouvelle suite de rapports égaux dans laquelle on trouve (*Arith.*, 95)

$$\frac{ABC + ACD + ADE}{A'B'C' + A'C'D' + A'D'E'} \quad \text{ou} \quad \frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

COROLLAIRE. — Si l'on construit sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle et sur son hypoténuse trois polygones semblables dans lesquels ces trois lignes soient homologues, on aura, en désignant ces trois polygones par X, Y, Z,

Fig. 95.



$$\frac{X}{\overline{AB}^2} = \frac{Y}{\overline{BC}^2} = \frac{Z}{\overline{AC}^2}.$$

De cette suite de rapports égaux on tirera

$$\frac{X + Y}{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \frac{Z}{\overline{AC}^2},$$

mais, puisque (124) l'on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2,$$

on aura nécessairement aussi

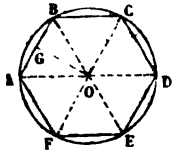
$$X + Y = Z,$$

ce qui veut dire que le polygone construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des deux autres.

126. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par son apothème.*

Digitized by Google

Fig. 96.



En joignant le centre du polygone à tous les sommets, on partage cette figure en autant de triangles égaux qu'elle a de côtés, et l'un de ces triangles ABO est mesuré par $\frac{1}{2}$AB $\times$ OG. Or, si le polygone a n côtés, son aire se compose de n produits pareils, et sera exprimée par

$$\frac{1}{2} n \times \text{AB} \times \text{OG}.$$

Mais $n \times$ AB n'est autre chose que le périmètre p; l'aire totale équivaut donc à

$$\frac{1}{2} p \times \text{OG}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

127. *L'aire d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.*

En effet, si l'on imagine d'abord un polygone régulier quelconque inscrit au cercle, puis que l'on double indéfiniment le nombre des côtés de cette figure, on formera une suite de polygones réguliers qui s'approcheront de plus en plus de la circonférence. L'aire de ces polygones tendra ainsi vers celle du cercle, leur périmètre vers la circonférence, et l'apothème vers le rayon.

On aura donc encore, à la limite, l'aire du cercle égale à la moitié du produit de la circonférence par le rayon, ou au produit de la circonférence par la moitié du rayon.

En désignant par R le rayon du cercle, sa circonférence sera exprimée (**108**) par 2πR, et l'on aura

$$\text{cercl. R} = 2\pi\text{R} \times \frac{\text{R}}{2} = \pi\text{R}^2,$$

formule qui permettra d'obtenir la surface sans passer par le calcul de la circonférence.

Corollaire. — Si l'on nomme R et R′ les rayons de deux cercles, on aura

$$\text{cercl. R} = \pi\text{R}^2,$$
$$\text{cercl. R}' = \pi\text{R}'^2;$$

d'où l'on tire, par division,

$$\frac{\text{cercl. R}}{\text{cercl. R}'} = \frac{\text{R}^2}{\text{R}'^2}.$$

On voit par là que *le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport des carrés de leurs rayons.*

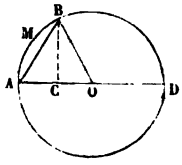
128. La figure limitée par un arc de circonférence et par deux rayons faisant entre eux un angle quelconque, s'appelle un *secteur*.

Digitized by Google

L'aire d'un secteur a pour mesure la moitié du produit de son arc par le rayon.

Supposons, en effet, que dans l'arc AMB on inscrive une ligne polygonale régulière, c'est-à-dire dont les côtés égaux fassent entre eux des angles égaux, on formera un secteur polygonal qui aura pour mesure son périmètre extérieur multiplié par la moitié de son apothème (126). Mais si l'on double indéfiniment le nombre des côtés de ce contour inscrit, le secteur polygonal différera de moins en moins du secteur circulaire; l'apothème tendra vers le rayon et la ligne polygonale vers l'arc AMB. En passant à la limite, on trouvera donc pour l'aire du secteur la moitié de l'arc AMB multipliée par le rayon, conformément à ce qui a été annoncé.

Fig. 97.



Remarque. — D'après la proposition précédente, l'aire du secteur AOB est exprimée par la relation

$$\text{sect. AOB} = \text{arc AMB} \times \frac{1}{2}\,\text{AO}.$$

Si n est le nombre de degrés que comprend l'arc AB, sa longueur sera à celle de la circonférence entière comme n est à 360, et l'on aura

$$\frac{\text{arc AMB}}{2\pi\,\text{AO}} = \frac{n}{360},$$

d'où l'on tire

$$\text{arc AMB} = 2\pi\,\text{AO} \times \frac{n}{360}.$$

Substituant cette valeur dans celle du secteur ci-dessus posée, on trouve

$$\text{sect. AOB} = \pi\,\overline{\text{AO}}^2 \times \frac{n}{360}.$$

Cette seconde expression de l'aire d'un secteur est plus commode que la première, lorsque l'arc est donné en degrés.

129. La portion du cercle comprise entre l'arc AMB et sa corde s'appelle un *segment*. Une pareille figure a évidemment une aire exprimée par la différence entre celle du secteur AOBM et celle du triangle AOB dont la base est AO et la hauteur BC. On a donc

$$\text{segm. AMB} = \text{arc AMB} \times \frac{1}{2}\,\text{AO} - \text{BC} \times \frac{1}{2}\,\text{AO} = \frac{1}{2}\,\text{AO}\,(\text{arc AMB} - \text{BC}),$$

c'est-à-dire *la moitié du produit du rayon par l'excès de l'arc du segment sur la perpendiculaire abaissée de l'une des extrémités de cet arc sur le rayon passant par l'autre extrémité.*

Digitized by Google

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

130. Les figures qui servent à l'exposition des théorèmes n'ont pas besoin, pour remplir leur objet, d'être exécutées avec un soin minutieux ; il suffit qu'elles représentent à peu près le sujet de chaque proposition et les diverses lignes nécessaires aux besoins de la démonstration. Dans ce cas, la figure n'est tracée que pour aider l'esprit à bien suivre les raisonnements, lesquels portent uniquement sur les relations explicitement ou implicitement renfermées dans l'énoncé. Il n'en est pas ainsi quand on se propose de résoudre un *problème graphique*, c'est-à-dire de construire certaines figures satisfaisant à des conditions déterminées ; on comprend que la solution d'une pareille question ne sera obtenue que si l'on trace les diverses lignes avec une exactitude aussi complète que possible.

Outre les problèmes graphiques, on a souvent à résoudre en géométrie des *problèmes* numériques, dans lesquels il s'agit de déterminer en nombres les valeurs de certains éléments (angles ou côtés) d'une figure, d'après la connaissance d'autres éléments donnés ; mais ces problèmes sont, à proprement parler, du ressort de l'Arithmétique, et la Géométrie n'y intervient que pour faire connaître les relations qui lient les inconnues avec les données.

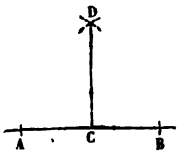
Nous allons passer rapidement en revue quelques-uns des problèmes graphiques élémentaires dont la solution ne demande que l'emploi de la ligne droite et du cercle au moyen de la règle et du compas.

TRACÉ DES PERPENDICULAIRES ET DES PARALLÈLES.

131. *Par un point donné* C *sur une droite* AB, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

De part et d'autre du point C, prenons des distances égales AC et BC ; des points A et B, avec des rayons égaux et plus grands que la moitié de AB, décrivons deux arcs de cercle ; soit D l'un des points de croisement de ces deux arcs. Ce point étant joint avec C déterminera CD perpendiculaire sur AB. En effet, les deux points C et D sont tous deux à des distances égales des deux points A et B ; ils appartiennent donc à la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB, et la déterminent complétement (16, Coroll.).

Fig. 98.

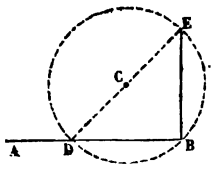


Remarque. — A l'aide de la même ouverture de compas qui a servi à déterminer le point D, ou avec toute autre plus grande que la moitié de AB, on pourra se procurer de l'autre côté de AB un troisième point de la perpendiculaire cherchée. Ce dernier point servira de *vérification* à la construction, puisqu'il devra nécessairement se trouver en ligne droite avec les deux autres.

Digitized by Google

132. Si, par quelque cause que ce soit, on ne pouvait pas prolonger AB à droite du point B, et que l'on voulût élever une perpendiculaire par ce point, on emploierait la construction suivante :

Fig. 99.

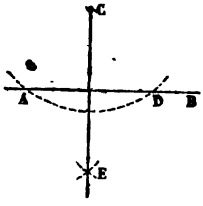


On décrirait une circonférence quelconque passant par le point B et rencontrant la ligne AB en un second point D situé en deçà du premier; on joindrait ce point D au centre C par un diamètre DCE dont l'extrémité E appartiendrait à la perpendiculaire cherchée, puisque l'angle DBE inscrit dans une demi-circonférence serait droit (96, Coroll. III).

133. *Par un point donné* C *hors d'une droite* AB, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Du point C comme centre, et avec un rayon quelconque plus grand que la plus courte distance du point C à la droite AB, décrivons un arc de cercle qui coupera AB aux points A et D; de ces derniers points comme centres et avec un même rayon plus grand que la moitié de AD, nous décrirons deux arcs qui, se coupant en E, détermineront un second point de la perpendiculaire demandée CE.

Fig. 100.

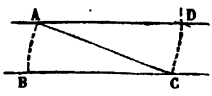


En effet, les deux points C et E étant, par construction, également éloignés des extrémités de la droite AD, CE est perpendiculaire sur AD (16, Coroll.).

134. *Par un point donné* A, *mener une droite parallèle à une droite donnée* BC.

Du point A comme centre, décrivons un arc CD qui coupe BC en un point C; de ce point, avec le même rayon CA, décrivons un autre arc AB qui coupe BC en B. Du point C, avec un rayon égal à la corde de l'arc AB, décrivons encore un arc qui coupe le premier arc CD en un point D, et tirons AD. Cette droite est parallèle à BC; car le quadrilatère ABCB, dont les côtés opposés sont égaux, serait un parallélogramme (48).

Fig. 101.



Remarque. — On se sert le plus souvent de la *règle* et de *l'équerre* pour tracer des droites perpendiculaires ou parallèles; ces instruments seront décrits plus tard, quand nous traiterons des divers procédés du dessin graphique.

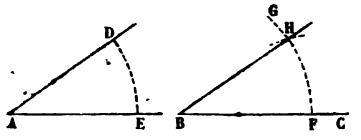
CONSTRUCTION DES ANGLES ET DES TRIANGLES.

135. *Construire en un point* B *d'une droite donnée* BC *un angle égal à un angle donné* A.

Du point A comme centre, décrivons entre les côtés de l'angle A un arc

Digitized by Google

Fig. 102.

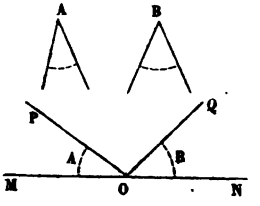


DE; du point B, avec le même rayon, décrivons un second arc FG qui coupe la ligne BC en F; enfin, du point F comme centre et avec un rayon égal à la corde de l'arc ED, décrivons un troisième arc qui coupe FG en H, et tirons BH.

L'angle CBH ainsi obtenu est égal à l'angle A; car les arcs FH et DE décrits avec le même rayon sont égaux, puisque leurs cordes DE et FH seraient égales par construction; donc les angles A et B sont égaux comme interceptant sur des circonférences égales des arcs égaux (91).

136. *Deux angles* A, B *d'un triangle étant donnés, construire le troisième.*

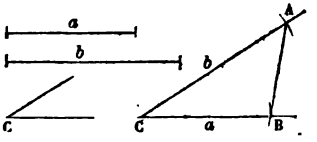
Fig. 103.



Sur une droite indéfinie MN, formons en un point O, et d'après la construction précédente, un angle MOP égal à A, et un angle NOQ égal à B. L'angle POQ, supplément de la somme des deux autres, est l'angle cherché (30).

137. *Construire un triangle dans lequel on connaît un angle* C *et les deux côtés* a *et* b *qui comprennent cet angle.*

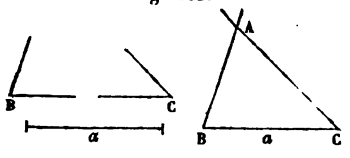
Fig. 104.



Nous prendrons, sur une droite indéfinie avec laquelle nous aurons préalablement fait un angle égal à C, une longueur CB égale au côté a; puis, sur l'autre côté de l'angle C, nous prendrons une longueur CA égale à b; en joignant les points A et B, nous formerons le triangle ABC qui remplit évidemment les conditions de l'énoncé.

138. *Construire un triangle dans lequel on connaît un côté* a *et les deux angles adjacents* B *et* C.

Fig. 105.

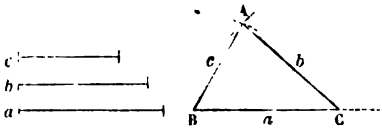


Sur une droite indéfinie nous prendrons une longueur BC égale à a; aux extrémités de cette longueur nous formerons deux angles respectivement égaux aux angles donnés B et C. Ayant ainsi la direction de chacun des deux autres côtés, nous les prolongerons jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, et nous aurons le triangle demandé.

Digitized by Google

139. *Construire un triangle dont les trois côtés* a, b *et* c *sont donnés.*

Fig. 106.

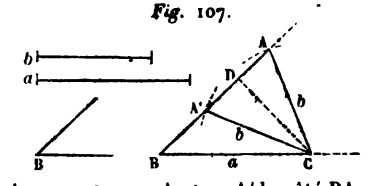


Ayant pris le premier côté *a* limité par les points B et C, nous décrirons du point B comme centre et avec un rayon égal à *c* un arc de cercle ; du point C avec un rayon égal à *b*, nous tracerons un second arc qui coupera le premier en un point A, et ce point sera le troisième sommet du triangle cherché ABC.

Remarque. — Il est entendu que ce problème n'a de solution qu'autant que la somme des deux plus petits côtés donnés est plus grande que le troisième (29).

140. *Construire un triangle dans lequel on connaît deux côtés* a *et* b, *ainsi que l'angle* B *opposé à l'un d'eux* b.

Fig. 107.

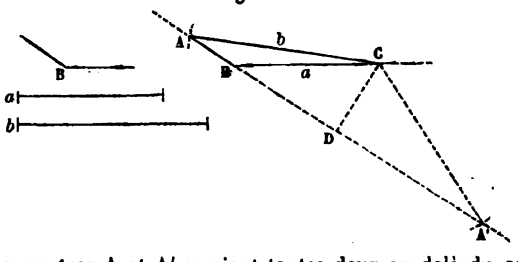


Sur une ligne indéfinie BC nous prendrons BC égal à *a*, et nous ferons au point B l'angle CBA égal à B. Du point C comme centre, avec *b* comme rayon, nous décrirons un arc de cercle qui rencontre en A et en A' le côté BA de l'angle B ; en joignant le point C aux points A et A', nous aurons les deux triangles ABC, A'BC qui satisfont séparément à la question.

Remarque. — Le problème qui nous occupe est susceptible de deux solutions ; il n'en est pas toujours ainsi : si le côté donné *b* eût été plus petit que la perpendiculaire CD abaissée du point C sur BA, il n'y eût pas eu rencontre de l'arc de cercle avec la droite BA, et le problème n'eût eu aucune solution ; il n'en aurait eu qu'une seule dans le cas où *b* eût été précisément égal à la perpendiculaire CD, ou si, le côté *b* étant plus grand que *a*, la rencontre A' se fût trouvée de l'autre côté du point B.

Nous n'avons encore examiné que le cas où l'angle donné B est aigu ; s'il était obtus, comme dans la *fig.* 108, il n'y aurait jamais qu'une seule solution, qui disparaîtrait elle-même, si le côté *b* était plus petit que *a*, puisque les deux rencontres A et A' seraient toutes deux au delà du sommet B.

Fig. 108.



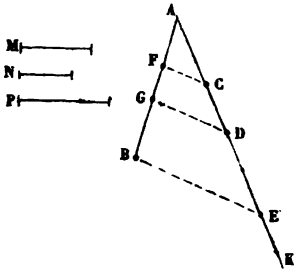
Digitized by Google

Enfin, si l'angle donné B était droit, le côté *b* serait l'hypoténuse et devrait être, par conséquent, plus grand que *a*. Dans ce cas, il ne peut y avoir et il n'y a en effet qu'une seule solution; car les deux rencontres A et A' sont situées de côtés différents du sommet, et à des distances égales, ce qui donne deux triangles rectangles égaux ne formant qu'une seule et même réponse à la question.

DIVISION DES DROITES EN PARTIES PROPORTIONNELLES ET CONSTRUCTION DES POLYGONES SEMBLABLES.

141. *Diviser une droite donnée* AB *en parties proportionnelles à des longueurs données* M, N, P.

Fig. 109.



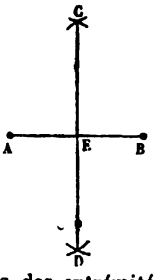
Du point A menons la droite indéfinie AK, faisant un angle quelconque avec AB, et prenons sur AK les longueurs AC = M, CD = N, DE = P. Tirons BE; menons DG et CF parallèles à BE, et la droite AB sera partagée aux points F et G en parties proportionnelles à M, N et P.

En effet, dans le triangle ABE, on trouve (58 et 59)

$$\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{CD} = \frac{GB}{DE}; \quad \text{ou} \quad \frac{AF}{M} = \frac{FG}{N} = \frac{GB}{P}.$$

Corollaire. — Si les longueurs M, N, P étaient égales, la ligne AB serait divisée aux points F et G en trois parties égales. On a donc ainsi le moyen de *partager une longueur donnée en un nombre quelconque de parties égales*, en portant sur AK des parties de grandeur quelconque, mais égales.

Fig. 110.



Toutefois on a rarement recours à cette méthode pour *partager une droite donnée* AB *en deux parties égales*; voici comment on procède:

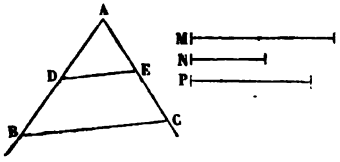
Des points A et B pris successivement pour centres et avec un rayon plus grand que la moitié de AB, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en C et en D, au-dessus et au-dessous de AB. La droite CD se confond évidemment avec la perpendiculaire menée par le milieu de AB, puisqu'elle a deux de ses points C et D également distants des extrémités A et B (16, Coroll.); le point E où elle rencontre AB est donc le milieu de cette droite, qui se trouve ainsi partagée en deux parties égales.

Digitized by Google

142. *Construire une quatrième proportionnelle à trois droites données* M, N, P.

Nous tracerons deux droites indéfinies AB et AC sous un angle quelconque ; sur la première nous prendrons une distance AB égale à M, et une distance AD égale à N ; sur la seconde nous porterons AC = P. Nous tirerons la droite BC ; menant ensuite par le point D la parallèle DE à BC, nous aurons AE qui sera la quatrième proportionnelle demandée ; car (58, Rem.)

Fig. 111.



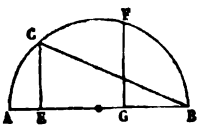
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \quad \text{ou} \quad \frac{M}{N} = \frac{P}{AE}.$$

Corollaire. — Si les deux droites N et P étaient égales entre elles, la ligne AE serait ce que l'on nomme *une troisième proportionnelle* à M et N.

143. *Construire une moyenne proportionnelle à deux droites données.*

On prend sur une même droite, à la suite l'une de l'autre, deux longueurs AG et GB respectivement égales aux deux lignes données ; sur AB comme diamètre on décrit une demi-circonférence. On élève ensuite GF perpendiculaire à AB, et GF est la moyenne proportionnelle demandée (99).

Fig. 112.

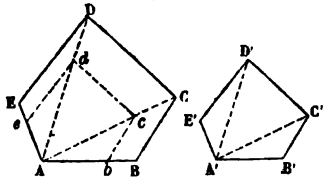


On peut encore prendre AB égal à la plus grande des lignes données et décrire la demi-circonférence ; puis on prend EB égal à la plus petite des droites données, on élève la perpendiculaire EC, et CB est la moyenne proportionnelle (99).

144. *Sur une droite donnée* A'B', *comme côté homologue au côté* AB *du polygone* ABCDE, *décrire un polygone semblable à ce dernier.*

Par un sommet A nous mènerons les diagonales AC et AD du polygone donné, pour le partager en triangles. Aux points A' et B' nous ferons les angles C'A'B' et A'B'C' respectivement égaux aux angles CAB et ABC, et le triangle A'B'C' sera semblable au triangle ABC (65).

Fig. 113.



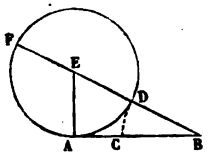
Sur A'C' comme homologue à AC, nous ferons de la même manière le triangle A'C'D' semblable à ACD ; puis A'D'E' semblable à ADE, et le polygone A'B'C'D'E' sera semblable à ABCDE, puisque ces deux figures seront composées d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et pareillement assemblés (70).

Digitized by Google

COROLLAIRE. — Si l'on portait le côté A'B' sur AB, de A en b, il suffirait de tirer par le point b la droite bc parallèle à BC, puis cd parallèle à CD, puis de parallèle DE, pour former les triangles Abc, Acd, Ade respectivement semblables aux triangles ABC, ACD, ADE. Le polygone A$bcde$ serait ainsi construit sur le côté donné pour homologue à AB, et serait semblable à ABCDE.

145. *Partager une ligne* AB *en moyenne et extrême raison*, c'est-à-dire de manière que la plus grande BC des deux parties soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et la plus petite partie AC.

Fig. 114.



On élèvera, à l'une des extrémités de AB, la perpendiculaire AE égale à la moitié de AB; on décrira le cercle de rayon EA; on tirera BE qui coupe la circonférence en D; enfin, on décrira l'arc DC du centre B avec le rayon BD, et le point C partagera AB comme il est demandé. Pour le prouver, on prolongera BE jusqu'en F, et l'on aura (101)

$$\overline{AB}^2 = BD \times BF,$$

ou

$$\overline{AB}^2 = BD\,(BD+AB) = \overline{BD}^2 + BD \times AB.$$

On tire de là

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - BD \times AB = AB(AB - BD).$$

Mais l'on a

$$BD = BC \quad \text{et} \quad AB - BD = AB - BC = AC;$$

donc

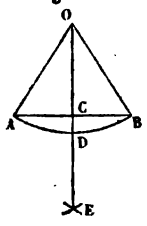
$$\overline{BC}^2 = AB \times AC,$$

ce qui est conforme à l'énoncé.

BISSECTION DE L'ANGLE, TANGENTE AU CERCLE ET ARC CAPABLE D'UN ANGLE DONNÉ.

146. *Diviser un angle ou un arc en deux parties égales.*

Fig. 115.



Pour partager l'angle AOB en deux parties égales, nous décrirons, du point O comme centre, un arc quelconque qui coupera en A et B les deux côtés; nous tirerons la corde AB, et la perpendiculaire OE abaissée du sommet O sur AB résoudra le problème; car les deux triangles rectangles AOC, BOC seront égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté commun.

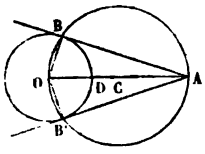
Digitized by Google

La même construction partagera l'arc ABD en deux parties égales AD et DB.

147. *Par un point* A *donné hors d'un cercle, mener une tangente à la circonférence.*

Nous joindrons le point A avec le centre O du cercle donné, et nous décrirons sur AO comme diamètre une circonférence qui coupera ledit cercle donné en deux points B et B'; les droites BA et B'A qui joindront ces points avec le point donné A, seront les tangentes demandées.

Fig. 116.

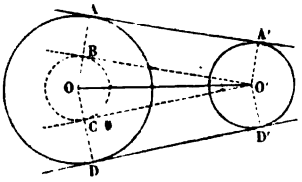


En effet, si l'on tire dans le cercle donné BDB' les rayons BO et B'O, les angles OBA, OB'A seront droits comme étant inscrits dans des demi-circonférences.

148. *Mener une tangente commune à deux circonférences de cercle.*

Du centre O du plus grand des deux cercles et avec un rayon égal à la différence des rayons donnés, nous décrirons une circonférence; par le second centre O', nous mènerons une tangente O'B à cette circonférence; nous tirerons OB jusqu'à la rencontre de la première circonférence en A, puis O'A' parallèle à OA, et la ligne AA' sera la tangente commune cherchée. En effet, le quadrilatère ABO'A', dans lequel deux côtés opposés AB, O'A' sont égaux et parallèles, est un parallélogramme; c'est de plus un rectangle, car l'angle ABO' est droit; par conséquent, la ligne AA' est perpendiculaire à la fois aux deux rayons OA et O'A', et elle touche les deux circonférences.

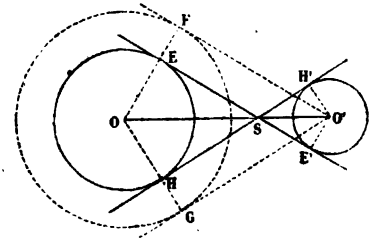
Fig. 117.



Comme on peut mener par le point O' deux tangentes au cercle auxiliaire OB, la construction donne nécessairement, comme le montre d'ailleurs la *fig.* 117, une seconde tangente commune DD'.

Par une construction en tout semblable à la précédente, si ce n'est que la circonférence auxiliaire aurait pour rayon la somme des deux rayons donnés, et non pas leur différence, on obtiendrait deux autres tangentes communes EE', HH' (*fig.* 118) intérieures au système des deux circonférences données et se coupant d'ailleurs, ainsi que les deux premières, sur la ligne des centres.

Fig. 118.

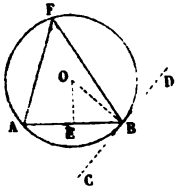


Digitized by Google

Remarque. — Nous avons considéré deux cercles extérieurs l'un à l'autre, et nous avons trouvé quatre tangentes communes ; nous laisserons au lecteur le soin d'examiner par quelle transformation les quatre tangentes se réduisent, 1° à trois par la réunion des deux intérieures en une seule, quand les circonférences deviennent tangentes extérieurement ; 2° à deux, quand les circonférences se coupent ; 3° à une seule, quand les circonférences se touchent intérieurement. Deux circonférences intérieures l'une à l'autre ne sauraient enfin avoir aucune tangente commune.

149. *Décrire sur une ligne donnée* AB *un arc capable d'un angle donné.* Par le point B menons la droite DC faisant avec AB un angle ABC égal à l'angle donné ; élevons ensuite en B une perpendiculaire à CD, puis au milieu E de AB une perpendiculaire à AB. Le point de rencontre O de ces deux perpendiculaires est le centre du cercle cherché que l'on trace avec OB pour rayon.

Fig. 119.



En effet, l'angle ABC, formé par une tangente et une corde (96), a pour mesure la moitié de l'arc AB, ainsi que tout autre angle AFB qui serait inscrit dans l'arc AFB. Par conséquent, l'angle AFB est bien égal à l'angle donné ABC.

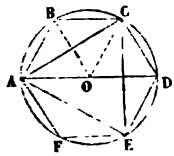
INSCRIPTION DES POLYGONES RÉGULIERS A LA CIRCONFÉRENCE.

150. Nous avons vu (109, Rem. II) comment on inscrit un carré dans une circonférence, et nous avons constaté que le côté du carré est égal au rayon du cercle multiplié par $\sqrt{2}$, relation qui équivaut à dire que *le rapport de la diagonale au côté d'un carré quelconque est égale à* $\sqrt{2}$, puisque la diagonale n'est autre chose que le double du rayon du cercle circonscrit.

On sait comment on inscrirait, au moyen du carré (107), les polygones de 8, 16, 32, 64, etc. côtés ; les expressions des côtés de ces différents polygones, d'après la valeur du rayon du cercle, seraient d'ailleurs successivement fournies par la relation du n° 106.

151. *Inscrire dans un cercle un hexagone régulier.*

Fig. 120.



Dans l'hexagone régulier, l'angle au centre AOB vaut le sixième de quatre droits, ou $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'un droit. Mais, les 3 angles du triangle isocèle AOB valant deux droits, les deux autres OAB, OBA valent ensemble $2 - \frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ d'un droit ; et

Digitized by Google

comme ils sont égaux entre eux, chacun d'eux vaut $\frac{2}{3}$; le triangle AOB ayant ses trois angles égaux, est donc équilatéral et AB = AO.

On inscrira donc un hexagone régulier dans un cercle en portant le rayon du cercle six fois sur sa circonférence, et joignant les points de division consécutifs.

COROLLAIRE I. — On passerait, suivant le mode indiqué plus haut (150), aux polygones de 12, 24, 48, etc. côtés.

COROLLAIRE II. — Pour obtenir le triangle équilatéral inscrit, il suffirait de joindre de deux en deux les sommets de l'hexagone, et l'on aurait ainsi le triangle ACE.

L'expression de son côté est facile à trouver; elle a cela de remarquable que, comme celle du carré, elle est incommensurable avec le rayon.

En effet, le triangle ACD est rectangle en C (96, Coroll. III), et donne

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = 2\overline{AO}^2 - \overline{AO}^2 = 4\overline{AO}^2 - \overline{AO}^2 = 3\overline{AO}^2;$$

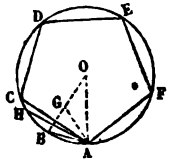
d'où

$$AC = AO\sqrt{3}.$$

152. *Inscrire dans un cercle un décagone régulier.*

Soit AB le côté du décagone régulier. Son angle au centre AOB est égal à $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ d'angle droit; les angles égaux ABO, BAO, valent ensemble $2 - \frac{2}{5}$ ou $\frac{8}{5}$, ce qui fait $\frac{4}{5}$ pour chacun; l'angle BAO est donc le double de l'angle AOB.

Fig. 121.



Si maintenant nous traçons la bissectrice AG de l'angle BAO, le triangle AGO sera isocèle, et donnera AG = GO; le triangle BAG donnera lui-même aussi AB = AG, car l'angle AGB, extérieur au triangle AGO, vaut deux fois $\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{5}$, comme l'angle ABG (30, Coroll. IV). Il résulte de là que AB est égal à GO.

Or la bissectrice AG donne (61)

$$\frac{BG}{AB} = \frac{GO}{AO}, \quad \text{ou} \quad \frac{BG}{GO} = \frac{GO}{BO}.$$

On voit donc que le rayon BO est partagé, au point G, en moyenne et extrême raison, et que le côté AB du décagone, lequel est égal à GO, représente le plus grand des deux segments.

COROLLAIRE I. — En joignant de deux en deux les sommets du décagone, on formera le pentagone ACDEF. On aurait, par l'opération inverse, les polygones de 20, 40, 80, etc. côtés.

Digitized by Google

153. *Inscrire un pentédécagone régulier dans une circonférence.*

Supposons que, dans la *fig.* 121, AB étant le côté du décagone régulier inscrit, AH soit celui de l'hexagone; l'arc BH sera égal au sixième de la circonférence diminué du dixième, ou au quinzième de la même circonférence, et sa corde sera précisément le côté du pentédécagone.

COROLLAIRE. — On voit que l'on peut facilement inscrire à la circonférence des polygones réguliers de 15, 30, 60, 120, etc., côtés.

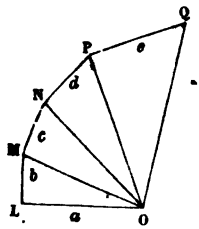
En général, il résulte de ce qui précède que l'on peut inscrire un polygone régulier d'une espèce donnée dans une circonférence, toutes les fois que le nombre des côtés est égal à l'un des nombres 1, 3, 5 et 15 multiplié par une puissance de 2.

PROBLÈMES SUR LES AIRES DES POLYGONES ET DU CERCLE.

154. *Construire un carré équivalent à la somme de plusieurs carrés donnés*, a^2, b^2, c^2, d^2, ...

Tirons, sous un angle droit, les lignes LO, LM, respectivement égales aux côtés a, b, et ensuite l'hypoténuse MO; nous avons

Fig. 122.



$$\overline{MO}^2 = \overline{LO}^2 + \overline{LM}^2 = a^2 + b^2;$$

donc OM est déjà le côté du carré équivalent à la somme des carrés a^2 et b^2.

Au sommet M élevons sur MO la perpendiculaire MN égale au côté c, et joignons le point N au point O; nous aurons encore

$$\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MN}^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

donc NO est le côté du carré équivalent à la somme des trois carrés a^2, b^2 et c^2.

En tirant sur NO une perpendiculaire NP égale au côté d, on obtient pareillement

$$\overline{PO}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

et ainsi de suite.

COROLLAIRE. — Soit x le côté d'un carré *multiple* d'un carré donné, par exemple, quintuple du carré a^2. On a

$$x^2 = 5a^2,$$

d'où vient

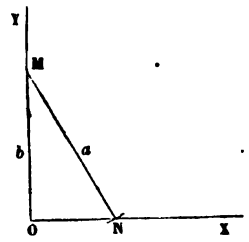
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{5a}.$$

Ainsi, le côté cherché x est moyen proportionnel entre a et $5a$, et on le construit par l'un des procédés indiqués (143).

Digitized by Google

155. *Construire le carré égal à la différence de deux carrés donnés,* a^2 *et* b^2.

Fig. 123.



Sur le côté OY d'un angle droit YOX, prenons OM égal au côté b, et du centre M avec a pour rayon décrivons un arc qui coupe OX en N; nous aurons ainsi

$$\overline{ON}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{OM}^2 = a^2 - b^2.$$

Donc ON est le côté du carré cherché.

156. *Deux polygones semblables,* P *et* Q, *étant donnés, construire un polygone qui leur soit semblable en même temps qu'égal à leur somme ou à leur différence.*

Soient a et b deux côtés homologues dans les polygones P et Q; déterminons (154 et 155) le côté c du carré équivalent à la somme a^2+b^2, ou à la différence a^2-b^2; puis, sur le côté c homologue à a et b, construisons un polygone R semblable aux deux premiers; c'est le polygone cherché.

En effet, on a (125)

$$\frac{P}{Q} = \frac{a^2}{b^2},$$

d'où l'on tire (*Arith.*, 94, 2°)

$$\frac{P \pm Q}{P} = \frac{a^2 \pm b^2}{a^2}.$$

Mais on a aussi (125)

$$\frac{R}{P} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Or, par construction,

$$c^2 = a^2 \pm b^2;$$

donc aussi

$$R = P \pm Q.$$

Remarque. — Soit x le rayon d'un cercle égal à la somme ou à la différence des deux cercles dont les rayons sont respectivement R et R', nous aurons (127, Coroll.)

$$\pi x^2 = \pi R^2 \pm \pi R'^2,$$

ou

$$x^2 = R^2 \pm R'^2.$$

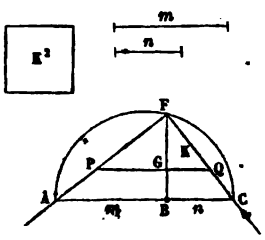
On pourra donc construire le rayon x à l'aide des problèmes 154 ou 155.

157. *Construire un carré qui soit au carré* K^2 *comme la droite* m *est à la droite* n.

Prenons à la suite l'une de l'autre les deux longueurs AB égale à m, et

Digitized by Google

Fig. 124.



BC égale à n; décrivons, sur AC comme diamètre, une demi-circonférence, et élevons en B la perpendiculaire BF.

Tirons les deux cordes indéfinies FA et FC; prenons FQ égale à K, et menons QP parallèle à AC; la longueur FP est le côté du carré demandé.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les triangles AFC et PFQ sont rectangles en F (96, Coroll. III); on a donc (124, Coroll.)

$$\frac{\overline{FP}^2}{\overline{FQ}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{FP}^2}{K^2} = \frac{GP}{GQ};$$

mais, en remarquant que les deux couples de triangles semblables FPG et FAB, FQG et FCB, sont liés par les côtés homologues communs FG et FB, on trouve

$$\frac{GP}{AB} = \frac{FG}{BF} = \frac{GQ}{BC}, \quad \text{ou} \quad \frac{GP}{GQ} = \frac{AB}{BC} = \frac{m}{n};$$

par conséquent, on a

$$\frac{\overline{FP}^2}{K^2} = \frac{m}{n}.$$

158. *Construire un polygone semblable à un polygone donné* Q, *et qui soit avec lui dans le rapport de deux droites données* m *et* n.

Nous déterminerons (157) le côté x du carré qui est au carré a^2, fait sur un côté quelconque a du polygone Q, comme m est à n; sur ce côté x homologue à a, nous construirons (144) un polygone P semblable à Q : ce sera le polygone cherché.

On a, en effet (125),

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^2}{a^2}.$$

Mais, par construction,

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n};$$

donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{m}{n}.$$

Remarque. — Soit x le rayon d'un cercle qui soit à un cercle de rayon donné R, dans le rapport des droites m et n; on aura

$$\frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{m}{n}, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{R^2} = \frac{m}{n},$$

et l'on déterminera le rayon x par la construction du n° 157.

159. *Construire un polygone semblable au polygone* P, *et équivalent au polygone* Q.

Digitized by Google

Dans le polygone cherché X, soit x le côté homologue au côté a de P; nous aurons

$$\frac{P}{X} = \frac{a^2}{x^2};$$

d'où, extrayant la racine carrée et observant que X équivaut à Q,

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}} = \frac{a}{x}.$$

Or $\sqrt{P}$ et $\sqrt{Q}$ ne sont pas autre chose que les côtés des carrés respectivement équivalents aux polygones P et Q; on cherchera donc une quatrième proportionnelle à ces deux côtés et au côté a; puis, sur x homologue à a, on construira un polygone semblable à P : ce sera le polygone cherché.

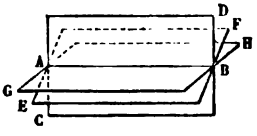
GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN.

160 Nous avons dit (7) qu'un plan était une surface telle, qu'une ligne droite pût exactement s'y appliquer dans tous les sens; il en résulte nécessairement qu'*une droite qui a deux de ses points dans un plan y est située tout entière*, et qu'*une droite ne peut rencontrer un plan en plus d'un point;* car, si elle avait deux points communs avec lui, elle y serait contenue tout entière.

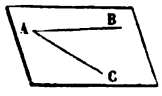
161. Par une même droite AB on peut faire passer une infinité de plans différents CD, EF, GH, etc.; mais on conçoit que, si ces divers plans représentent les positions d'un plan mobile autour de AB, ce plan sera complétement arrêté, dès qu'on l'astreindra à passer par le point C, par exemple, pris en dehors de AB.

Fig. 125.



On conclut de là qu'*un plan est déterminé de position lorsque l'on connaît une droite et un point qui sont situés dans ce plan, pourvu que le point soit en dehors de la droite.* Cette droite étant elle-même déterminée par deux de ses points, on peut dire aussi que *trois points non en ligne droites déterminent un plan.*

Fig. 126.



Il en est de même de deux droites AB, AC qui se coupent; car tout plan qui passe par l'une d'elles AB et par un point C de l'autre contient celle-ci tout entière.

Enfin, deux parallèles déterminent aussi la position d'un plan. Elles sont en effet déjà dans un même plan d'après leur définition, et deux plans ne sauraient les contenir sans avoir au moins trois points communs non en ligne droite, c'est-à-dire sans se confondre.

Digitized by Google

Remarque. — Un triangle est toujours tout entier dans un même plan.

162. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

En effet, s'il y avait sur l'intersection trois points qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans passant tous deux par ces trois points se confondraient (**161**), ce qui est contraire à l'hypothèse.

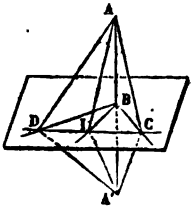
163. *L'intersection commune de trois plans est un point;* car les points communs aux trois plans ne peuvent se trouver qu'à la rencontre de l'un d'entre eux avec l'intersection des deux autres, et cette intersection est une droite (**162**), laquelle ne peut rencontrer le premier plan en plus d'un point (**160**).

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES.

164. Dans l'espace, une droite AB (*fig.* 125) peut être en même temps perpendiculaire sur plusieurs autres AC, AE, AG; car si l'on conduit plusieurs plans par cette droite AB, dans chacun d'eux on pourra lui tracer une perpendiculaire.

Si l'on fait passer un plan par deux quelconques AC, AG de ces perpendiculaires, toutes les autres seront aussi dans ce plan. En d'autres termes, nous allons démontrer que *toute droite perpendiculaire à deux autres, qui passent par son pied dans un plan, est perpendiculaire à toute autre droite menée par ce pied dans le même plan.*

Fig. 127.



Soit donc AB perpendiculaire aux deux droites BC, BD qui sont situées dans le plan P; cherchons à prouver que cette même ligne AB est aussi perpendiculaire à BI. Pour y arriver, prolongeons AB au-dessous du plan P d'une quantité BA' égale à AB; tirons dans le plan la droite CD qui coupe BI en I; puis joignons les points C, I et D aux points A et A'.

Les triangles ACD, A'CD sont égaux; car, 1° les deux obliques AC, A'C, qui s'écartent également du pied B de la perpendiculaire CB, sont égales; 2° par une raison pareille, les deux obliques AD, A'D sont égales; 3° le côté CD est commun.

Or, si nous faisons tourner l'un de ces deux triangles A'CD autour de CD pour le rabattre sur son égal ACD, il est clair que la droite A'I couvrira exactement AI; puisque maintenant A'I est égal à AI, le triangle AIA' est isocèle, et la ligne BI qui joint le sommet I au milieu B de la base AA' est perpendiculaire sur cette base, conformément à l'énoncé.

Remarque. — La ligne AB qui tombe à angle droit sur toutes celles que l'on peut mener par son pied dans le plan P, est dite *perpendiculaire* à ce plan. Réciproquement, le plan P est dit perpendiculaire à AB.

Digitized by Google

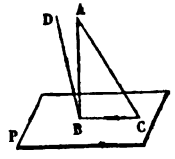
COROLLAIRE I. — *Lorsqu'un plan est perpendiculaire à une droite, il contient toutes les perpendiculaires que l'on peut mener à cette droite par son pied.*

COROLLAIRE II. — *Lorsqu'un plan est perpendiculaire sur le milieu d'une droite, tout point de ce plan est également distant des extrémités de cette droite, et tout point pris hors du plan est inégalement distant des mêmes extrémités.*

165. *Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à un plan donné.*

1°. Si le point donné est A, situé hors du plan P, et si AB est perpendiculaire à ce plan, toute autre droite AC issue du point A sera oblique au plan; car, les deux droites AB et AC qui se coupent déterminent un autre plan qui coupe le premier suivant la droite BC, et dans ce nouveau plan la droite AC est nécessairement oblique sur BC; elle ne saurait donc être perpendiculaire au plan P. 2° Soit un point B situé sur le plan P, et BA perpendiculaire à ce plan; toute autre droite BD issue du point B sera oblique au plan. Car les deux droites BA et BD déterminent encore un second plan, dont l'intersection avec le premier est, par exemple, la droite BC. Or, dans ce nouveau plan, les deux droites BA et BD ne peuvent être à la fois perpendiculaires à BC; donc, si l'une d'elles, BA, jouit de cette propriété, l'autre, BD, sera oblique sur BC et, par suite, sur le plan P. C. Q. F. D.

Fig. 128.

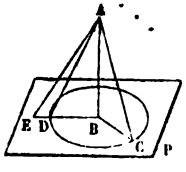


COROLLAIRE. — *Par un point donné, on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire à une droite donnée.*

166. *Si d'un point pris hors d'un plan on mène sur ce plan une perpendiculaire et plusieurs obliques; 1° la perpendiculaire est plus courte que toute oblique; 2° deux obliques également écartées de la perpendiculaire sont égales; 3° de deux obliques, la plus grande est celle qui s'écarte le plus de la perpendiculaire.*

1°. La perpendiculaire AB est plus courte que l'oblique AC; ceci résulte de ce que, dans la figure plane ABC; la droite AB, perpendiculaire à BC, est plus courte (17) que l'oblique AC.

Fig. 129.



2°. Si les écartements BC et BD sont égaux, les deux obliques AC, AD seront égales; car les deux triangles rectangles ABC, ABD sont égaux, et les hypoténuses AC, AD sont, par suite, égales.

3°. Si les écartements BC, BE sont tels, que l'on ait BE > BC, nous prendrons BD égal à BC, et, à cause du 2°, les

Digitized by Google

obliques AC, AD seront égales. Or, dans le plan ABE, l'oblique AE est (17) plus longue que AD; donc aussi AE > AC.

COROLLAIRE I. — *La perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan mesure la plus courte distance de ce point au plan.*

COROLLAIRE II. — *Les extrémités* C, D, *etc., des obliques égales* AC, AD, *etc., sont toutes situées sur une circonférence de cercle qui a pour centre le pied* B *de la perpendiculaire au plan, et pour rayon* BC.

On conclut de là que, pour abaisser d'un point A une perpendiculaire AB sur un plan, il suffit de marquer sur ce plan trois points également éloignés du point A, et de chercher ensuite (87) le centre de la circonférence que déterminent les trois points.

DROITES ET PLANS PARALLÈLES.

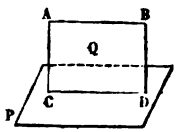
167. Deux plans, ou une droite et un plan, sont dits *parallèles*, lorsqu'ils ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.

Il est aisé d'ailleurs de voir sur-le-champ qu'il peut exister des plans et des droites parallèles entre eux; car deux plans, ou une droite et un plan, qui sont perpendiculaires à une même droite ne peuvent se rencontrer, puisque les deux droites joignant un point de l'intersection aux deux points de rencontre avec la droite devraient être perpendiculaires à cette dernière, ce que l'on sait être impossible (12).

168. *Toute droite parallèle à une autre droite située dans un plan est parallèle à ce plan.*

En effet, la droite AB étant parallèle à CD et, par conséquent, dans un même plan Q avec elle, cette droite AB ne pourrait rencontrer le plan P que dans son intersection CD avec le précédent, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Fig. 130.



Réciproquement, *si une droite* AB *est parallèle à un plan* P, *tout plan* Q *mené par cette droite rencontrera le premier suivant une droite* CD *parallèle à la première.* Car la droite AB ne pourrait rencontrer CD sans rencontrer en même temps le plan P, ce qui serait encore contraire à la supposition.

Il suit de là qu'une parallèle à AB, menée par un point du plan P, est tout entière dans ce plan.

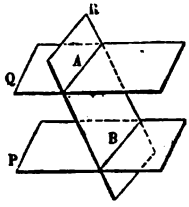
COROLLAIRE I. — La figure ABDC est un parallélogramme dans lequel AC est égal à BD; par conséquent, *les parallèles comprises entre une droite et un plan parallèles sont égales.*

COROLLAIRE II. — Si le parallélogramme ABDC est un rectangle, c'est-à-dire si les côtés AC et BD sont perpendiculaires au plan P, on conclura qu'*une droite parallèle à un plan a tous ses points à égales distances de ce plan.*

Digitized by Google

169. *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.*

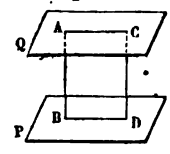
Fig. 131.



En effet, si les deux intersections A et B se rencontraient, ce ne pourrait être qu'en un point appartenant à la fois aux deux plans P et Q dans lesquels elles sont respectivement situées tout entières; ces deux plans ne seraient donc pas parallèles, ce qui est contraire à notre hypothèse.

170. *Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire sur l'un des deux est aussi perpendiculaire sur l'autre.*

Fig. 132.



Soit, en effet, une droite AB, perpendiculaire au plan P; soit encore une droite quelconque AC tirée à volonté dans le plan Q par le point A; le plan de ces deux droites coupera le plan P suivant une troisième droite BD, qui sera (169) parallèle à AC et, par suite, perpendiculaire à AB. Cette propriété étant vraie pour une droite quelconque AC menée par le point A dans le plan Q, ce plan est perpendiculaire à la droite AB et la proposition énoncée est démontrée.

171. Si par deux droites AB, CD (*fig.* 132) parallèles entre elles et comprises entre deux plans parallèles P et Q, on fait passer un troisième plan, les deux intersections AC et BD seront également parallèles (169) et la figure ABDC sera un parallélogramme, dans lequel les côtés opposés AB, CD seront égaux; par conséquent, *les parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales.*

Corollaire. — Si les parallèles AB, CD sont des perpendiculaires communes aux deux plans, elles seront encore égales et l'on pourra dire que *deux plans parallèles sont partout à égale distance.*

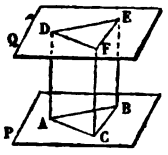
172. Deux plans parallèles ayant toutes leurs perpendiculaires communes (170), tout plan parallèle au plan P (*fig.* 132) et mené par le point A doit être perpendiculaire à AB, si cette dernière droite est supposée perpendiculaire au plan P. Or, on ne peut (165, Coroll.) mener par un point qu'un seul plan perpendiculaire à une droite; donc le plan Q est le seul plan parallèle au plan P que l'on puisse mener par le point A et, en général, *on ne peut mener par un point donné qu'un seul plan parallèle à un plan donné.*

173. *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens sont égaux, et leurs plans sont parallèles.*

Digitized by Google

Soient, en effet, les deux angles BAC et EDF dont les côtés AB et DE sont parallèles, ainsi que les côtés AC et DF. Prenons AB égal à DE, AC égal à DF; puis, menons AD, BE, CF, EF et BC.

Fig. 133.



La droite DE étant égale et parallèle à AB, EB est aussi égale et parallèle à AD (48); par la même raison CF est égale et parallèle à AD; d'où il résulte que EB est égale et parallèle à CF. La figure CFEB est donc un parallélogramme, et l'on a BC = EF.

Les deux triangles ABC, DEF, qui ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux et, par suite, l'angle EDF est égal à l'angle BAC.

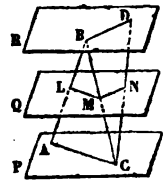
En second lieu, les parallèles comprises entre plans parallèles étant égales, tout plan parallèle à ABC, et mené par le point D, devra rencontrer BE à une distance du point B égale à AD, c'est-à-dire au point E. Par la même raison, ce plan passera par le point F; donc il se confondra avec le plan DEF.

COROLLAIRE. — Par deux droites, AB et DF, qui ne se rencontrent pas, on peut toujours faire passer deux plans parallèles; car, si l'on mène AC parallèle à DF, et DE parallèle à AB, les deux plans ABC, DEF seront parallèles et contiendront les deux droites proposées.

174. *Si deux droites sont comprises entre deux plans parallèles, tout plan parallèle aux deux premiers coupe ces droites en parties proportionnelles.*

Soient les deux plans P et R qui coupent les deux droites AB et CD; joignons le point B au point C. Le plan parallèle Q coupe les trois lignes AB, BC, CD aux points L, M et N que nous réunirons par les droites LM et MN, respectivement parallèles (160) à AC et BD.

Fig. 134.



Le triangle ABC donne alors (59)

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BM}{CM},$$

et le triangle BCD fournit

$$\frac{BM}{CM} = \frac{DN}{CN}.$$

De ces deux égalités, on tire enfin

$$\frac{BL}{AL} = \frac{DN}{CN},$$

conformément à l'énoncé.

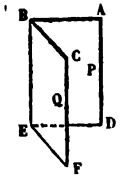
COROLLAIRE. — Deux droites telles que BA et BC qui passent par un même point sont coupées par deux plans parallèles P et Q en parties proportionnelles.

Digitized by Google

ANGLES FORMÉS PAR DEUX PLANS, OU ANGLES DIÈDRES.

175. Lorsque deux plans se rencontrent, comme les plans P et Q de la figure ci-contre, ils comprennent entre eux une portion de l'espace qu'on appelle *angle dièdre*; ces deux plans sont les *faces* de l'angle dièdre, et l'intersection commune BE en est l'*arête*.

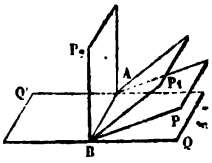
Fig. 135.



On désigne un angle dièdre par quatre lettres, dont la première et la dernière sont prises chacune sur une des faces et les deux autres sur l'arête. Quand il n'y a suivant une arête qu'un seul angle dièdre, on peut se contenter de nommer l'arête. Quelquefois enfin on désigne simplement l'angle dièdre par les deux lettres qui désignent ses deux faces, et l'on dit indifféremment l'angle ABEF, ou l'angle BE, ou l'angle PQ.

176. Ainsi que nous l'avons indiqué (14) pour les angles plans, on peut considérer tous les angles dièdres comme engendrés par le mouvement d'un plan mobile autour d'une droite AB et qui, s'écartant de plus en plus de sa position initiale Q, viendrait successivement en P, P_1, P_2, ..., Q'.

Fig. 136.



On voit alors que, lorsqu'un plan P rencontre un plan Q, il forme avec les deux portions de ce dernier deux angles qu'on nomme *adjacents*. Lorsque ces deux angles sont égaux, le plan est dit perpendiculaire sur le plan Q, et chacun des angles dièdres est appelé *dièdre droit*. Le plan P_2 de la *fig.* 136 est dans ce cas.

Par la droite AB située sur un plan Q, on ne peut imaginer qu'un seul plan perpendiculaire au premier, et cette vérité résulte directement de l'égalité des dièdres droits, comme la propriété analogue des droites situées dans un plan résulte (12) de l'égalité des angles droits.

On appelle *angle plan d'un dièdre* PQ (*fig.* 135) l'angle ABC formé par deux perpendiculaires menées à l'arête BE dans chacune des deux faces. Cet angle a la même valeur en quelque point de l'arête qu'il soit construit. Il est clair en effet que, si on le suppose fait en E, les droites EF et BC seront parallèles et de même sens, ainsi que les droites AB et ED, et les deux angles ABC, DEF seront égaux (173).

Remarque. — Le plan de l'angle ABC est perpendiculaire à l'arête BE (164).

177. *Deux angles dièdres égaux ont le même angle plan*, et réciproquement *deux angles dièdres qui ont des angles plans égaux sont égaux*. On s'assure aisément de ce double fait en superposant, dans le premier cas les angles dièdres, dans le second les angles plans. La superposition des

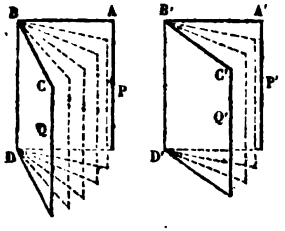
Digitized by Google

dièdres égaux amène, en effet, celle des angles plans; de même, si les derniers coïncident, les arêtes des dièdres étant perpendiculaires aux plans des angles plans, ces droites et, par suite, les faces se confondront.

178. *Le rapport de deux angles dièdres est le même que celui de leurs angles plans.*

Supposons, en effet, que la plus grande commune mesure des deux angles plans ABC, A'B'C' soit telle, que le rapport de ces angles soit $\frac{5}{3}$, et partageons le premier en 5 et le second en 3 parties toutes égales entre elles; par l'arête de chaque dièdre et par les lignes de division de son angle plan faisons passer des plans. Nous avons ainsi partagé les angles dièdres PQ et P'Q' en parties toutes égales entre elles, comme ayant même angle plan; PQ contient 5 de ces parties, P'Q' en contient 3, et le rapport de PQ à P'Q' est $\frac{5}{3}$, comme celui des angles plans.

Fig. 137.



Corollaire I. — Le nombre qui représente un angle dièdre, quand on a pris un certain angle dièdre pour unité, est le même que celui qui exprime le rapport de l'angle plan du premier à l'angle plan du second; en d'autres termes, *un angle dièdre a pour mesure son angle plan.*

Corollaire II. — Un angle dièdre droit correspond à un angle plan droit.

179. Les angles dièdres jouissent nécessairement des mêmes propriétés que les angles plans qui leur servent de mesure; nous ne citerons que les principales:

Ainsi, *deux dièdres adjacents valent deux dièdres droits* (14).

Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux (15).

Tout point du plan bissecteur d'un dièdre est à égale distance des faces, et tout point pris hors de ce plan est inégalement éloigné des faces (18).

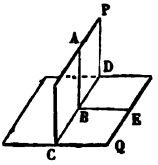
Lorsque deux plans parallèles sont traversés par un troisième, deux dièdres alternes-internes sont égaux; deux dièdres internes d'un même côté sont supplémentaires; deux dièdres . . . . , etc.; et réciproquement (22, 23 et 24).

180. *Tout plan mené suivant une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à ce plan.*

Par le pied B de la perpendiculaire AB au plan Q, menons dans ce plan une perpendiculaire BE à l'intersection commune CD des deux plans P et Q; l'an-

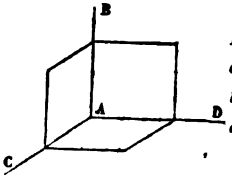
Digitized by Google

Fig. 138.



gle ABE sera l'angle plan de ce dièdre PQ. Mais puisque la droite AB est perpendiculaire au plan, elle l'est également à BE, et l'angle plan ABE est droit; donc aussi le dièdre PQ est droit, et le plan P est perpendiculaire au plan Q, comme nous l'avions annoncé.

Fig. 139.

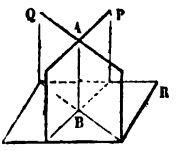


COROLLAIRE. — *Lorsque trois droites* AB, AC, AD *sont perpendiculaires deux à deux, chacune d'elles est perpendiculaire au plan des deux autres, et les trois plans sont perpendiculaires deux à deux.*

181. *Si deux plans sont perpendiculaires entre eux, et si par un point de leur intersection on élève une perpendiculaire à l'un des deux, cette perpendiculaire sera tout entière dans le second.* En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait conduire un plan par cette perpendiculaire et par l'intersection, lequel serait (180) perpendiculaire au premier plan et ne saurait, par suite, être différent du second (176).

182. *L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième est perpendiculaire à ce dernier.*

Fig. 140.

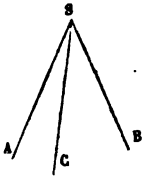


Pour démontrer cette vérité, nous supposerons qu'on élève, par le point B commun aux trois plans P, Q et R, une perpendiculaire à ce troisième plan R; cette perpendiculaire devra se trouver (181) dans chacun des deux autres et ne pourra donc être que leur intersection.

ANGLES FORMÉS PAR TROIS PLANS, OU ANGLES TRIÈDRES.

183. La portion de l'espace que comprennent entre eux trois plans qui se coupent en un même point s'appelle un *angle trièdre* ou à trois faces. Telle est la *fig.* 141 dans laquelle les trois faces angulaires ASB, ASC, BSC se coupent deux à deux suivant les arêtes SA, SB, SC, qui se réunissent au sommet S.

Fig. 141.

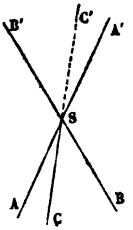


Comme dans le triangle, il y a six éléments à considérer dans un angle trièdre, savoir : les trois faces et les trois angles dièdres que ces faces deux à deux forment entre elles.

Digitized by Google

184. Si l'on prolonge les arêtes d'un angle trièdre SABC au delà du sommet S, on forme un nouvel angle trièdre SA'B'C' composé des mêmes éléments que le premier; car leurs angles dièdres et leurs angles plans sont égaux deux à deux, comme étant opposés par l'arête ou par le sommet. Cependant les parties égales ne sont pas disposées de la même manière et, généralement, on ne pourra pas superposer ces deux trièdres.

Fig. 142.



On voit en effet que, en faisant tourner l'angle trièdre SA'B'C' autour du sommet S, de manière que la face A'SB' couvre la face correspondante et égale ASB, SA' tombant sur SB, SB' sur SA, la face B'SC' ne prendra pas la direction de la face ASC, parce que les angles dièdres SA et SB' ne sont pas égaux. Si, au contraire, on applique SA' sur SA, et SB' sur SB, les deux trièdres resteront situés de part et d'autre de ce plan commun ASB, et, dans ce cas encore, les deux figures ne pourront coïncider.

Deux angles trièdres, tels que SABC, SA'B'C', sont dits *symétriques*.

185. *Dans tout angle trièdre,* 1° *un angle plan quelconque est plus petit que la somme des deux autres;* 2° *la somme des trois angles plans est moindre que quatre droits.*

Il est clair, en effet, que : 1°. Si l'on rabat les deux faces ASC, BSC (*fig.* 141) sur la face ASB, que nous supposons à dessein la plus grande des trois, il ne pourra arriver que les deux faces rabattues se juxtaposent exactement sur ladite face ASB; encore moins qu'elles laissent entre elles un intervalle angulaire non recouvert. Il y aura forcément, au contraire, par analogie avec un triangle dont on rabattrait deux côtés sur le troisième, recouvrement de deux portions des faces rabattues, et cette partie doublée sera précisément l'excès angulaire de la somme des deux plus petites faces sur la plus grande.

2°. Si l'on suppose cette fois les trois faces détachées suivant leurs arêtes et rabattues sur un plan passant par le sommet S, ces trois angles s'écarteront de plus en plus à mesure de l'épanouissement du trièdre, et laisseront entre eux, sur le plan, des intervalles angulaires dont la somme sera égale à l'excès de quatre angles droits sur la somme des faces.

Remarque. — Il serait facile de donner de cette double propriété une démonstration en forme; mais les raisonnements les mieux appuyés n'ajouteraient rien à l'évidence de ces faits, que le bon sens décide seul d'avance, et qui ne font que s'obscurcir sous l'appareil dont on les entoure d'ordinaire.

COROLLAIRE. — Par le même procédé d'épanouissement des angles

Digitized by Google

plans d'un *angle polyèdre*, c'est-à-dire compris sous un nombre quelconque de faces planes ayant un sommet unique et commun, on montrerait que, comme pour l'angle trièdre, *la somme des angles plans d'un angle polyèdre est plus petite que quatre angles droits.*

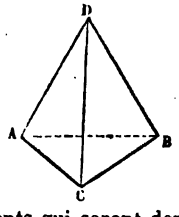
186. *Deux angles trièdres sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées ; 2° lorsqu'ils ont un angle plan égal adjacent à deux dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés ; 3° lorsqu'ils ont leurs angles plans égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

Nous ne donnerons pas ici le détail de la démonstration de cette propriété ; nous nous bornerons à indiquer qu'elle s'établit par la superposition des deux trièdres, directement pour les deux premiers cas, et à l'aide de deux triangles auxiliaires dans le second, lesdits triangles étant formés dans chaque trièdre par un plan perpendiculaire à l'une des arêtes, et à égale distance du sommet, de manière à mettre en évidence les deux angles plans qui mesurent les dièdres correspondants.

TÉTRAÈDRES.

187. On ne peut fermer de toutes parts un espace par un nombre de plans moindre que quatre. Le corps ABCD, compris entre les quatre plans ABC, ACD, BCD, ABD, se nomme *tétraèdre*.

Fig. 143.

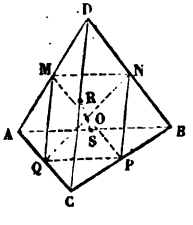


Un tétraèdre est compris sous quatre faces triangulaires ; il a six arêtes opposées deux à deux, et quatre sommets. Cette figure joue dans l'espace le même rôle que le triangle sur un plan ; nous nous convaincrons de cette vérité par les développements qui seront donnés sur la mesure des volumes.

Les propriétés du tétraèdre, considéré isolément, sont nombreuses ; nous ne pourrions, sans sortir des limites qui nous sont tracées, les examiner avec quelques détails, et nous nous bornerons à indiquer les trois suivantes avant d'établir les cas d'égalité de deux tétraèdres.

188. *Dans un tétraèdre, les trois droites qui unissent les milieux des arêtes opposées se rencontrent au même point et s'y coupent mutuellement en deux parties égales.*

Fig. 144.



En effet, les droites MN, PQ, toutes deux parallèles (60) à l'arête AB, sont parallèles entre elles ; pareillement MQ est parallèle à NP, et la figure MNPQ est un parallélogramme dont les diagonales MP, NQ se coupent mutuellement en deux parties égales au point O.

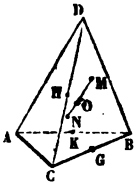
Digitized by Google

Cette propriété convenant à deux quelconques des trois droites MP, NQ, RS, les trois milieux de ces droites se confondent en O.

189, *Dans un tétraèdre, les six plans perpendiculaires aux milieux des arêtes se rencontrent en un même point qui est également éloigné des quatre sommets.*

Soit, en effet, MN la droite suivant laquelle se rencontrent les deux plans élevés perpendiculairement sur les milieux G et H des arêtes BC et CD; soit ensuite O le point où cette droite perce un troisième plan élevé perpendiculairement sur le milieu K d'une troisième arête AB.

Fig. 145.

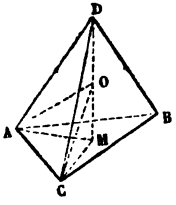


Comme appartenant au premier plan, le point O est également éloigné (164, Coroll. II) des sommets B et C; comme situé dans le second, il est à égale distance des sommets C et D; pareillement, il est également distant de A et de B; par conséquent, il est à des distances égales des quatre sommets A, B, C et D, et il appartient nécessairement aux plans menés perpendiculairement sur les milieux de chacune des six arêtes.

190. *Dans un tétraèdre, les six plans bissecteurs des dièdres se rencontrent en un même point également distant des quatre faces.*

Soit DM la droite suivant laquelle se rencontrent les deux plans bissecteurs des dièdres AD, CD, et O le point où cette droite DM perce le plan bissecteur du dièdre AC.

Fig. 146.



Comme appartenant au plan ADM, le point O est à égale distance (179) des deux faces ABD, ACD; comme situé dans le plan CDM, il est également distant des faces ACD, BCD; enfin il est dans le plan AOC, et, par suite, à égale distance des faces ACD et ABC. Ce point O est donc également éloigné des quatre faces ABC, ABD, ACD et BCD, et, comme tel, il appartient nécessairement aux plans bissecteurs de chacun des six dièdres.

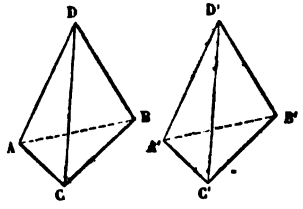
TÉTRAÈDRES ÉGAUX.

191. *Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont un angle trièdre égal compris entre trois arêtes égales chacune à chacune et pareillement situées.*

Soit l'angle trièdre D' égal à D, et les trois arêtes D'A', D'B', D'C' respectivement égales à DA, DB, DC; nous placerons la seconde figure sur la

Digitized by Google

Fig. 147.



première, de manière à faire coïncider les deux trièdres égaux D et D'.

A cause de l'égalité des arêtes deux à deux, les trois sommets A', B', C' tomberont respectivement en A, B, C, et les deux tétraèdres seront complétement superposés; ils seront donc égaux.

192. *Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et pareillement situées.*

Soit (*fig.* 147) l'angle dièdre A'C' égal à AC; la face A'B'C' égale à ABC, et la face A'C'D' égale à ACD.

Les deux trièdres A et A' ayant, d'après cette supposition, un dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun, sont égaux (186); les deux tétraèdres ont donc un trièdre égal compris entre trois arêtes égales chacune à chacune, et sont égaux (191).

Remarque. — Ce théorème peut également se démontrer par la superposition des figures.

193. *Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois dièdres égaux chacun à chacun, et pareillement situés.*

La superposition des deux tétraèdres par la face qui est égale de part et d'autre, montre immédiatement la vérité de cette proposition.

194. *Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs six arêtes égales chacune à chacune et pareillement situées.*

L'égalité des arêtes entraîne nécessairement celle des faces triangulaires; l'égalité des faces amène celle des trièdres (186), et, par suite, celle des tétraèdres (191).

Remarque. — En général, *il faut six conditions pour l'égalité de deux tétraèdres.* Chacun des énoncés des nos 191, 192 et 193, satisfait à cette règle, si l'on compte, comme cela doit être, l'égalité d'un trièdre pour trois conditions, celle d'une face triangulaire également pour trois, et si l'on remarque, dans l'énoncé du n° 92, que les deux faces égales étant liées par un côté commun, leur ensemble n'équivaut qu'à cinq conditions.

Un tétraèdre ayant six arêtes, le nombre des conditions déterminantes est précisément égal à celui des arêtes.

POLYÈDRES.

195. Les corps terminés de toutes parts par des portions de plans sont nommés *corps polyèdres*, ou simplement *polyèdres*. Les polygones que forment ces plans par leurs intersections sont les *faces* du polyèdre; ses

Digitized by Google

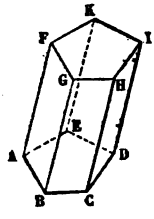
arêtes sont les côtés des faces, et ses *diagonales* sont les droites qui unissent deux sommets non situés sur la même face.

Nous avons déjà vu que le polyèdre à quatre faces s'appelle *tétraèdre;* on appelle aussi *pentaèdre, hexaèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre*, etc., les polyèdres à cinq, six, huit, douze, vingt, etc. faces.

196. On distingue parmi les polyèdres, après le tétraèdre qui a été l'objet d'un examen spécial, le *prisme*, dont deux faces opposées sont des polygones égaux et parallèles, et dont toutes les autres faces sont des parallélogrammes.

Le polyèdre ABCDEKIHGF est un prisme. Ses bases sont les deux pentagones ABCDE, FGHIK; ses arêtes latérales sont nécessairement toutes égales et parallèles entre elles.

Fig. 148.



La construction d'un pareil corps n'a rien qui puisse embarrasser; on prend un polygone quelconque ABCDE, par les sommets duquel on mène des droites parallèles entre elles; et, dans un plan parallèle au premier, on forme un second polygone ayant pour sommets les points de percement des parallèles. La figure ainsi obtenue est un prisme, car les faces latérales sont des parallélogrammes, et les deux polygones qui servent de base sont parallèles et égaux.

Un prisme est *triangulaire, quadrangulaire, pentagonal*, etc., suivant que sa base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc.

Si les arêtes latérales d'un prisme sont perpendiculaires aux plans des bases, le prisme est *droit;* il est *oblique* dans le cas contraire.

Un prisme est *régulier* lorsqu'il est droit, et que sa base est un polygone régulier.

On nomme *hauteur* d'un prisme la distance des deux plans dans lesquels sont situées les bases.

On ne peut évidemment construire qu'un seul prisme droit ayant une base et une hauteur données; *deux prismes droits sont* donc *égaux lorsqu'ils ont des bases égales et la même hauteur.*

197. *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont des polygones égaux.*

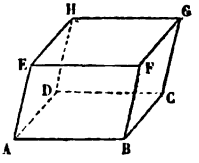
Deux côtés homologues de ces polygones sont, en effet, parallèles comme étant les intersections de deux plans parallèles par un troisième, et ils sont égaux comme parallèles comprises entre parallèles. De plus, les angles homologues sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et de même sens; les polygones eux-mêmes sont donc égaux.

COROLLAIRE. — *Toute section parallèle à la base d'un prisme est égale à cette base.*

Digitized by Google

198. Un prisme tel que ABCDHGFE, que l'on désigne aussi par AG, se nomme *parallélépipède*, parce que sa base est un parallélogramme.

Fig. 149.



Un parallélépipède est compris sous six parallélogrammes; non-seulement les deux bases sont égales et parallèles, comme cela a lieu dans un prisme quelconque, mais il en est de même de deux faces opposées arbitrairement choisies; ABFE et DCGH, par exemple.

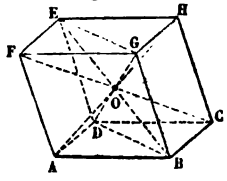
L'égalité de ces faces est en effet évidente; car AB et BC sont égaux et parallèles, ainsi que AE et DH; par suite, les deux parallélogrammes considérés, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux, et de plus leurs plans sont parallèles (173).

Remarque — Dans un parallélépipède, on peut prendre pour bases deux faces opposées quelconques.

COROLLAIRE. — *Tout corps compris sous six faces parallèles deux à deux est un parallélépipède.*

199. *Les quatre diagonales d'un parallélépipède se coupent mutuellement en deux parties égales.*

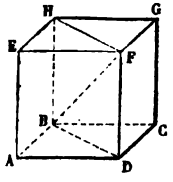
Fig. 150.



Il suffit évidemment d'établir cette propriété pour deux diagonales quelconques, BE et DG par exemple. Or, les arêtes BG et DE étant égales et parallèles, le quadrilatère BGED est un parallélogramme dans lequel les diagonales BE et DG se coupent en deux parties égales au point O.

200. Un parallélépipède *droit* est, comme cela a lieu pour un prisme quelconque, celui dont les arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases.

Fig. 151.



Dans un parallélépipède droit, un plan mené par deux arêtes opposées BH et DF, le décompose en deux prismes triangulaires droits égaux; ces deux prismes ont en effet même hauteur, et leurs bases ABD, BDC sont égales (196).

201. Un prisme droit dont les bases sont rectangulaires est dit parallélépipède *rectangle*. Si de plus les six arêtes sont égales, il prend le nom de *cube;* il est alors compris sous six carrés égaux.

Dans un parallélépipède rectangle, le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés des trois dimensions.

On voit, en effet, que le triangle BDF (*fig.* 151) est rectangle en D, et

Digitized by Google

donne

$$\overline{BF}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BD}^2.$$

Or, le triangle ABD est également rectangle en A et fournit

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2;$$

cette égalité rapprochée de la précédente conduit alors à celle-ci,

$$\overline{BF}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2,$$

laquelle est la traduction de la propriété énoncée.

COROLLAIRE. — Si les trois arêtes DF, DC et AD étaient égales entre elles, auquel cas le parallélépipède serait un cube, l'égalité qui vient d'être établie deviendrait

$$\overline{BF}^2 = 3\,\overline{AD}^2;$$

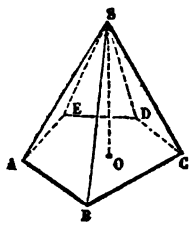
d'où

$$BF = AD\sqrt{3};$$

il en résulte que *la diagonale d'un cube est égale à son côté multiplié par* $\sqrt{3}$.

202. Un polyèdre SABCDE, compris sous plusieurs faces triangulaires SAB, SBC, SCD, etc., qui ont un sommet commun S, et dont les bases AB, BC, CD, etc., aboutissent aux côtés d'un polygone ABCDE, est une *pyramide*.

Fig. 152.

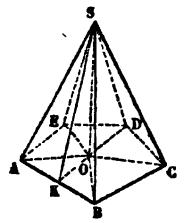


Le point S est le *sommet* de la pyramide; le polygone ABCDE en est la *base*, et la perpendiculaire SO abaissée du sommet sur la base est la *hauteur*.

Une pyramide est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, etc., selon que sa base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc. Un tétraèdre est une pyramide triangulaire.

Une pyramide est *régulière* lorsque sa base ABCDE est un polygone régulier ayant pour centre le pied O de la hauteur SO.

Fig. 153.



Les triangles rectangles SOA, SOB, SOC, etc., étant tous égaux, toutes les arêtes latérales sont égales, et, par suite, les faces latérales SAB, SBC, SCD, etc., sont des triangles isocèles égaux. La hauteur SK de l'un quelconque de ces triangles est l'apothème de la pyramide.

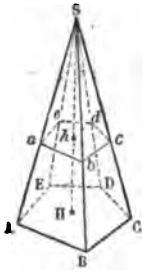
203. *Tout plan parallèle à la base d'une pyramide divise proportion-*

Digitized by Google

nellement les arêtes et la hauteur. De plus, la section est un polygone semblable à la base :

1°. Les arêtes et la hauteur étant des droites issues d'un même point et coupées par deux plans parallèles (174, Coroll.), on a

Fig. 154.



$$\frac{SA}{Sa}=\frac{SB}{Sb}=\frac{SC}{Sc}=\frac{SD}{Sd}=\frac{SE}{Se}=\frac{SH}{Sh}.$$

2°. Deux côtés homologues AB et *ab* sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième ; les angles des deux polygones ont donc leurs côtés parallèles et de même sens, et ces angles sont égaux.

Ensuite les côtés AB, BC, CD, DE, EA étant respectivement parallèles à *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, nous avons

$$\frac{AB}{ab}=\frac{SB}{Sb},\quad \frac{BC}{bc}=\frac{SB}{Sb},$$

d'où l'on tire, à cause du rapport commun $\frac{SB}{Sb}$,

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}.$$

Par le même moyen nous établirions la suite de rapports égaux

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea}.$$

Ainsi, la base et la section ont leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels ; donc ces deux polygones sont semblables.

Corollaire I. — Si l'on désigne par P et *p* les aires de la base et de la section, on aura (125)

$$\frac{P}{p}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}=\frac{\overline{SA}^2}{\overline{Sa}^2}=\frac{\overline{SH}^2}{\overline{Sh}^2},$$

ce qui prouve que *la base et la section sont entre elles dans le même rapport que les carrés de leurs distances au sommet.*

Corollaire II. — Cette proposition permet de déterminer la hauteur de la pyramide à laquelle appartient un *tronc* tel que ABCDE*edcba*, qui reste après qu'on a retranché la partie supérieure par un plan *abcde* parallèle à la base.

On a, d'après ce qui précède,

$$\frac{SH}{Sh}=\frac{AB}{ab},$$

Digitized by Google

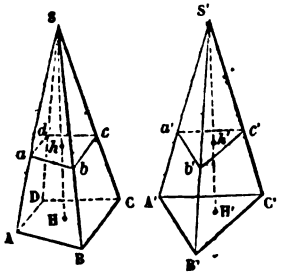
d'où l'on tire (Arith., 94, 2°)

$$\frac{SH}{SH - Sh} = \frac{AB}{AB - ab};$$

et, le tronc étant donné avec sa hauteur $SH - Sh$, tout est connu dans cette relation, sauf SH.

204. *Si deux pyramides de même hauteur ont leurs bases sur un même plan, les sections faites par un plan parallèle aux bases sont entre elles comme ces bases.*

Fig. 155.



D'après le théorème précédent, nous avons

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{\overline{SH}^2}{\overline{Sh}^2}, \quad \frac{A'B'C'}{a'b'c'} = \frac{\overline{S'H'}^2}{\overline{S'h'}^2}.$$

Mais, par hypothèse,

$$SH = S'H' \quad \text{et} \quad Sh = S'h';$$

donc les seconds membres des égalités précédentes sont égaux, et l'on a

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{A'B'C'}{a'b'c'},$$

ou bien

$$\frac{abcd}{a'b'c'} = \frac{ABCD}{A'B'C'},$$

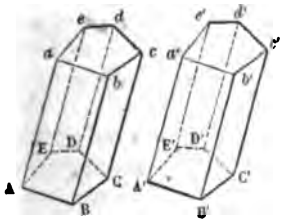
C. Q. F. D.

Corollaire. — Si les bases étaient équivalentes, les sections menées à égales distances des deux bases seraient aussi équivalentes.

POLYÈDRES ÉGAUX.

205. *Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre à la base égal et compris entre deux faces égales chacune à chacune et pareillement situées.*

Fig. 156.



Soit l'angle dièdre AB égal à A'B', la base ABCDE égale à A'B'C'D'E', et la face latérale AB*ba* égale à A'B'*b'a'*.

Plaçons la seconde figure sur la première, de manière à faire coïncider les deux bases égales. A cause de l'égalité des angles dièdres AB et A'B', le plan de la face A'B'*b'a'* tombera sur celui de AB*ba*; enfin, puisque ces deux faces sont égales, elles coïncideront, et les points *a'* et *b'* tomberont respectivement sur les points *a* et *b*. Cela étant, l'arête C'*c'* parallèle à B'*b'* coïncidera avec C*c*

Digitized by Google

parallèle à Bb, et le point c' tombera au point c, puisque les arêtes latérales des deux prismes sont toutes égales; de même le point d' tombera en d, et ainsi de suite.

Les deux prismes coïncideront donc complétement, et, par conséquent, ils sont égaux.

COROLLAIRE I. — Il résulte encore de là, comme nous l'avons déjà vu (196), que *deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux.*

COROLLAIRE II. — *Deux cubes qui ont un côté égal sont égaux.*

206. *Deux pyramides sont égales, lorsqu'elles ont un angle dièdre à la base égal, et compris entre deux faces égales chacune à chacune et pareillement assemblées.*

Ce théorème se démontre encore par la superposition des deux bases égales; l'égalité d'un dièdre de base fait coïncider les deux autres faces égales, et, par suite, les sommets des deux pyramides. Il en résulte que toutes les autres arêtes coïncident également, et que les deux pyramides sont entièrement superposées.

Remarque. — Si les bases des deux pyramides sont des polygones de n côtés, leur égalité équivaut (52, Coroll. I) à $2n - 3$ conditions; la face triangulaire égale en représente seulement 2, à cause de son côté commun avec la base, et le dièdre égal apporte enfin une autre condition; en tout, $2n - 3 + 2 + 1$ ou $2n$ conditions pour déterminer une pyramide, c'est-à-dire autant qu'il y a d'arêtes dans cette figure.

Ce résultat est d'ailleurs conforme à celui que nous avons mis en évidence (194) pour le cas particulier de la pyramide triangulaire ou tétraèdre.

207. *Un polyèdre quelconque peut être décomposé en pyramides d'une infinité de manières.*

On comprend, en effet, que si l'on joint un point S arbitrairement choisi dans l'intérieur du polyèdre à tous les sommets, et que l'on fasse passer des plans par tous les couples de droites issues du point S qui aboutissent aux extrémités d'une même arête, on partagera le corps en pyramides ayant pour sommet commun le point S, et pour bases les diverses faces du polyèdre.

Cette décomposition peut d'ailleurs être opérée d'une infinité de manières différentes, puisqu'il suffit évidemment de changer la position du point arbitraire S pour modifier chacune des pyramides.

Remarque. — Chacune des pyramides dans lesquelles a été transformé le polyèdre pouvant être divisée elle-même par des plans diagonaux en pyramides triangulaires ou tétraèdres, on en conclut que tout polyèdre peut être décomposé en tétraèdres. On voit ainsi que le trétaèdre peut être considéré comme l'élément du polyèdre, de même que nous avons vu dans le triangle l'élément du polygone.

Digitized by Google

208. *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de pyramides égales chacune à chacune et pareillement assemblées.*

Ceci résulte immédiatement de ce que la superposition successive des pyramides égales amènerait nécessairement la superposition complète et, par suite, l'égalité des deux polyèdres.

Remarque. — Les conditions nécessaires pour que deux polyèdres soient égaux sont les mêmes que celles qui assurent l'égalité des pyramides dans lesquelles ils sont décomposables ; cherchons donc le nombre de ces dernières.

Chaque pyramide a pour base une face de polyèdre ; elle est déterminée par autant de conditions qu'elle a d'arêtes (206, Rem.) ou, ce qui revient au même, par deux fois autant de conditions que sa base a de côtés. L'ensemble des pyramides ou le polyèdre, lequel est déterminé par la somme des nombres de conditions déterminantes des pyramides, exigera donc seulement autant de conditions que toutes ses faces ont d'arêtes, puisque chacune de ces arêtes appartient à deux pyramides accolées.

De là cette proposition curieuse : *Un polyèdre quelconque est déterminé par autant de conditions qu'il a d'arêtes.*

POLYÈDRES SEMBLABLES.

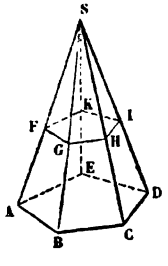
209. On nomme *polyèdres semblables* ceux qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et dont les angles polyèdres homologues sont égaux.

L'égalité des angles polyèdres entraîne évidemment celle des angles dièdres.

Dans les pyramides, la similitude des faces entraîne l'égalité des angles trièdres, et réciproquement.

210. *Tout plan parallèle à la base d'une pyramide détermine une seconde pyramide semblable à la première.*

Fig. 157.



Nous avons vu (203) que les polygones ABCDE et FGHIK sont semblables. La similitude des faces triangulaires résulte immédiatement de ce que les côtés des deux polygones sont parallèles deux à deux ; ainsi, les deux pyramides ont déjà leurs faces semblables.

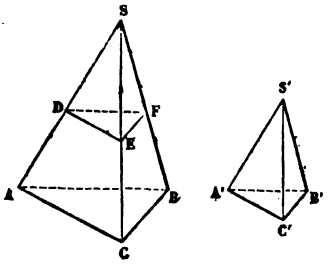
Il reste à faire voir que les angles polyèdres sont égaux. Or, l'angle polyèdre S est commun ; ensuite deux angles trièdres, tels que A et F, sont égaux comme ayant un angle dièdre commun compris entre des angles plans égaux chacun à chacun, savoir : SAB égal à SFG, SAE à SFK.

Digitized by Google

Les deux pyramides, ayant leurs faces semblables et leurs angles polyèdres égaux, sont semblables.

211. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont un angle trièdre égal compris entre arêtes proportionnelles et pareillement situées.*

Fig. 158.



Soient SABC, S'A'B'C' les deux tétraèdres qui ont les deux trièdres S et S' égaux; plaçons les deux figures l'une sur l'autre de manière que les sommets coïncident en S, et que les arêtes proportionnelles soient situées dans la même direction. Dans cette position, les droites DE et EF sont respectivement parallèles à AC et BC; par suite, le plan DEF est parallèle à ABC (173) et, d'après le théorème précédent, le tétraèdre SABC est semblable à SDEF ou à son égal S'A'B'C'.

212. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et pareillement situées.*

Mettons encore (*fig.* 158) le tétraèdre S'A'B'C' sur SABC de manière que, les sommets S et S' coïncidant ainsi que les dièdres égaux SA et S'A', le point A' tombe en D.

Puisque le triangle S'A'B' est semblable à SAB, le point B' viendra en F et DF sera parallèle à AB; de même DE sera parallèle à AC. Par suite, le plan DEF sera parallèle à ABC, et le tétraèdre SDEF ou son égal S'A'B'C' sera semblable à SABC.

213. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois dièdres égaux chacun à chacun et pareillement situés.*

Soit (*fig.* 158) la face A'B'C' semblable à ABC, et les trois dièdres adjacents à ces faces égaux chacun à chacun. Les trièdres A et A' ont ainsi un angle plan égal adjacent à deux dièdres égaux chacun à chacun, et par suite l'angle plan S'A'C' est égal à SAC. On trouverait de même que les angles plans SCA et S'C'A' sont égaux; de là il résulte que les triangles SAC, S'A'C' sont semblables, et les deux tétraèdres sont alors dans le cas du théorème précédent, puisqu'ils ont un dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune; ces deux tétraèdres sont donc semblables.

214. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont les arêtes proportionnelles et pareillement situées.*

Digitized by Google

Si l'on a (*fig.* 158)

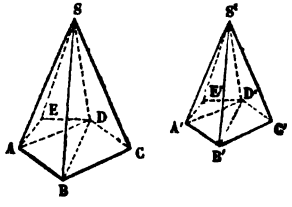
$$\frac{SA}{S'A'} = \frac{SB}{S'B'} = \frac{SC}{S'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'},$$

les triangles homologues seront semblables, et les angles plans homologues seront égaux. L'angle trièdre S', par exemple, sera donc égal à l'angle S, et les deux tétraèdres se trouveront dans le cas du n° 211 avec un angle trièdre égal entre arêtes proportionnelles; ils seront donc semblables.

213. *Deux pyramides semblables peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et pareillement disposés, au moyen de plans menés par les sommets et par les diagonales homologues de la base.*

Les pyramides étant semblables, les deux bases sont des polygones semblables que les diagonales homologues partagent en triangles semblables chacun à chacun; de plus, les angles dièdres et trièdres de ces pyramides sont égaux; il est donc évident que deux tétraèdres homologues quelconques ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et pareillement disposées; ces tétraèdres sont donc semblables (212), et c'est ce que nous voulions démontrer.

Fig. 159.



La réciproque de cette proposition ne présente aucune difficulté.

216. *Deux pyramides sont semblables lorsqu'elles ont un dièdre à la base égal et compris entre deux faces semblables chacune à chacune et pareillement assemblées.*

Supposons (*fig.* 159) le dièdre AE égal au dièdre A'E', la face SAE semblable à S'A'E' et la base ABCDE semblable à A'B'C'D'E'.

En vertu de ces hypothèses, les angles trièdres A et A' ont un dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux (186), et l'angle dièdre SA est égal à l'angle dièdre S'A', le dièdre AB est égal au dièdre A'B', et l'angle plan SAB est égal à l'angle plan S'A'B'. De plus, la similitude des faces SAE, S'A'E' donne

$$\frac{SA}{S'A'} = \frac{AE}{A'E'};$$

celle des bases fournit aussi

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'},$$

Digitized by Google

et l'on conclut de ces deux relations

$$\frac{SA}{S'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Les deux triangles SAB, S'A'B' ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc ils sont semblables.

En considérant maintenant les angles trièdres B et B', on établirait de la même manière l'égalité des dièdres BC et B'C', SB et S'B', ainsi que la similitude des faces SBC, S'B'C'. On continuerait de la sorte, et l'on conclurait que les deux pyramides, ayant leurs dièdres égaux deux à deux et leurs faces semblables chacune à chacune, le tout disposé pareillement, sont semblables.

217. *Deux prismes sont semblables lorsqu'ils ont un angle dièdre à la base égal et compris entre deux faces semblables chacune à chacune et pareillement situées.*

La démonstration de cette vérité serait calquée sur la précédente, et nous ne nous y arrêterons pas.

COROLLAIRE I. — *Deux prismes droits sont semblables lorsqu'ils ont les bases semblables et les hauteurs proportionnelles aux côtés homologues des bases.*

COROLLAIRE II. — *Deux parallélépipèdes rectangles qui ont leurs trois dimensions proportionnelles sont semblables.*

COROLLAIRE III. — *Tous les cubes sont semblables.*

218. *Deux polyèdres semblables peuvent se décomposer en pyramides semblables et pareillement assemblées.*

Soient ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 159) deux faces homologues des deux polyèdres, et S un point pris dans l'intérieur du premier; joignons ce point S à tous les sommets de la face ABCDE. Le théorème du n° **216** permet de déterminer dans le second polyèdre le point S' homologue du point S, en faisant d'abord un dièdre A'B' égal à AB, et un triangle A'S'B' semblable à ASB; ce point S' une fois trouvé, les deux pyramides SABCDE, S'A'B'C'D'E' seront semblables, en vertu du théorème du n° **216** et d'après leur construction même.

Cela posé, si nous joignons les points homologues S et S' à tous les autres sommets des deux polyèdres, nous formerons des pyramides nécessairement semblables deux à deux, puisqu'elles auront des bases semblables, des faces semblables comme appartenant aux deux pyramides voisines dont la similitude a été établie, et l'angle dièdre compris égal chacun à chacun; comme étant la différence entre un dièdre égal du polyèdre et celui de la pyramide semblable voisine.

COROLLAIRE I. — Chacune des pyramides dans lesquelles chaque polyèdre a été décomposé, pouvant elle-même se diviser en tétraèdres qui seront semblables chacun à chacun, si les pyramides remplissent cette condition,

Digitized by Google

il est prouvé que *deux polyèdres semblables peuvent se décomposer en tétraèdres semblables et pareillement situés.*

COROLLAIRE II. — *Dans deux polyèdres semblables, les arêtes et les diagonales homologues sont proportionnelles.*

Remarque. — Les points homologues S et S' choisis pour sommets communs des pyramides pourraient être également des sommets homologues des deux polyèdres.

219. Réciproquement, *deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et pareillement assemblés sont semblables.*

La démonstration de cette réciproque ne saurait offrir la moindre difficulté, puisqu'il ne s'agit que de composer des corps semblables avec des éléments semblables deux à deux.

220. *Dans deux polyèdres semblables,* 1° *les périmètres sont entre eux comme les arêtes homologues;* 2° *les surfaces sont entre elles comme les carrés des arêtes homologues.*

1°. Les arêtes homologues des deux polyèdres forment une suite de rapports égaux; par conséquent, la somme des antécédents et celle des conséquents, ou les deux périmètres, sont entre elles comme deux arêtes homologues.

2°. Les aires des faces semblables sont proportionnelles aux carrés des arêtes homologues; or, ces faces forment encore une suite de rapports égaux dans laquelle la somme des antécédents et celle des conséquents, ou les deux aires, sont entre elles comme les carrés des arêtes homologues.

Remarque. — Nous verrons plus loin que *les volumes de deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

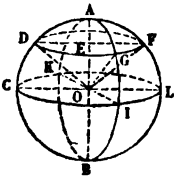
SPHÈRE.

221. On nomme *sphère* un corps compris sous une surface courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur que l'on appelle *centre*. Cette distance constante du centre à la surface s'appelle le *rayon* de la sphère.

Une droite qui, passant par le centre, est limitée dans les deux sens à la surface, porte le nom de *diamètre*. Tous les diamètres sont doubles du rayon et, par suite, égaux entre eux.

222. Tout plan qui passe par le centre d'une sphère, coupe la surface suivant une courbe qui est évidemment un cercle ayant pour centre et pour rayon le centre et le rayon de la sphère. Tels sont les cercles CILK, AIBK de la figure ci-contre.

Fig. 160.



Un pareil plan CILK divise la surface de la sphère en deux parties égales; car les deux parties mises l'une dans l'autre, de manière à avoir

Digitized by Google

pour base commune le cercle CILK, doivent coïncider, sans quoi la surface aurait des points inégalement éloignés de son centre.

223. Tout plan qui coupe la sphère sans passer par son centre détermine sur la surface une courbe DGF également circulaire (*fig.* 160). Abaissons en effet, du centre O, la perpendiculaire OE; le pied E de cette perpendiculaire sera à égale distance de tous les points de la section DGF, car toutes les obliques OD, OG, OF seront égales comme rayons de la sphère, et s'écarteront également du pied E de OE (166, Coroll. II). La courbe DGF sera donc un cercle ayant son centre en E, et DE pour rayon.

La droite DE étant nécessairement moindre que le rayon OD, le cercle DGF sera moindre que celui qui résulterait d'une section faite par le centre; par ce motif, ce dernier s'appelle *grand cercle*, et l'autre *petit cercle*.

Tous les grands cercles ayant même rayon, ils sont égaux entre eux.

Un grand cercle est déterminé par deux de ses points; car son plan est lui-même déterminé par ces deux points et par le centre de la sphère.

Deux grands cercles ACBF, AIBK, se coupent toujours en deux parties égales, attendu que l'intersection AB de leurs plans passe par leur centre commun, et est en même temps diamètre de l'un et de l'autre.

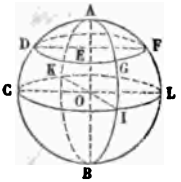
224. Le cercle DGF (*fig.* 160) sera d'autant plus petit que OE sera plus grand, c'est-à-dire que son plan sera plus éloigné du centre. Si nous imaginons que ce plan se meut parallèlement à lui-même, son intersection avec la surface sphérique se réduira évidemment au seul point A lorsque OE sera devenu égal à OA.

Ce plan, qui n'a plus alors qu'un seul point commun avec la sphère, prend le nom de *plan tangent*.

225. *Tout diamètre perpendiculaire sur un petit cercle coupe la sphère en deux points, dont chacun est également éloigné de tous ceux du petit cercle.*

Nous avons vu (223) que la perpendiculaire passe par le centre du petit cercle DGF, et nous savons en outre (166, Coroll. II) que cette droite a tous ses points également éloignés de tous ceux de la circonférence dudit cercle. Il en est donc ainsi, en particulier, des deux points A et B, dans lesquels elle rencontre la surface sphérique.

Fig. 161.



Corollaire. — Les arcs de grand cercle AD, AG, AF ayant pour cordes égales les distances du point A à chacun des points de la circonférence DGF, sont égaux entre eux. Par suite, les points A et B peuvent servir à décrire le cercle DGF, sans qu'il soit nécessaire de connaître son centre, qui se trouve dans l'intérieur de la sphère; il suffit, en effet, de marquer tous les points dont

Digitized by Google

les distances au point A ou au point B, mesurées sur la surface sphérique par les arcs de grand cercle AD et AG, ou BD et BG, sont égales à celle qui a été choisie pour décrire le cercle demandé.

Par ce motif, les points A et B se nomment les *pôles* du cercle DGF, dont la perpendiculaire AE est l'*axe*.

Les propriétés des pôles permettent de tracer sur la surface sphérique des circonférences, à l'aide d'un compas dont les branches sont recourbées, et que l'on nomme, dans les arts, *compas sphérique* ou *compas d'épaisseur*.

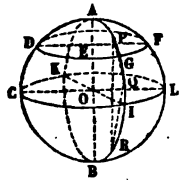
Remarque. — Tout cercle de la sphère a deux pôles, et tous les cercles dont les plans sont parallèles ont les mêmes pôles.

226. L'arc de grand cercle AI, mené du pôle d'un grand cercle CILK à sa circonférence, est le quart de la circonférence d'un grand cercle, ou un *quadrant*.

Si l'on voulait déterminer sur la surface d'une sphère le pôle d'un arc de grand cercle donné, on décrirait deux arcs ayant pour centres deux points quelconques de l'arc donné, et pour ouverture celle qui correspond à un quadrant. Les deux points de rencontre de ces arcs entre eux seraient à la distance d'un quadrant de deux points de l'arc donné; ils seraient donc les pôles cherchés.

227. On a quelquefois besoin de trouver le rayon d'une sphère donnée; le procédé suivant conduit à ce résultat.

Fig. 162.



On prend sur la surface de la sphère deux points quelconques D et F. De ces deux points, comme pôles, on décrit avec la même ouverture deux arcs de cercle qui se coupent en un point P également éloigné des points D et F. On détermine de même deux autres points Q et R, et l'on a ainsi trois points P, Q et R, tous trois à des distances égales des points D et F. Or, ces trois points appartiennent au plan perpendiculaire élevé sur le milieu de DF, lequel renferme tous les points également distants de D et de F (164, Coroll. II), et contient aussi, par conséquent, le centre de la sphère.

Il résulte de là que le cercle circonscrit au triangle PQR est un grand cercle, et que, si l'on mesure avec le compas sphérique les distances PQ, QR et PR, on pourra construire à part, sur un plan, ce triangle PQR, et lui circonscrire une circonférence dont le rayon sera celui de la sphère.

228. *Les petits cercles égaux sont à égale distance du centre de la sphère, et de deux cercles inégaux, le plus grand en est le moins distant.*

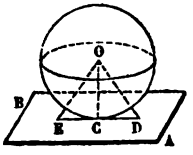
Cela résulte de ce que les intersections de deux petits cercles quel-

Digitized by Google

conques avec le grand cercle qui passe par leurs centres sont des diamètres respectifs de ces petits cercles, lesquels sont d'autant plus petits qu'ils sont plus éloignés du centre (83).

229. Nous avons dit (224) que, si un plan coupant la sphère suivant un petit cercle, s'éloignait parallèlement du centre jusqu'à l'extrémité du rayon qui lui est perpendiculaire, il deviendrait tangent à la sphère. Il est, d'ailleurs, facile de démontrer directement que *tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangent à la sphère.*

Fig. 163.



En effet, le plan AB a tous ses points, D, E, etc., plus éloignés du centre O que ne l'est le point C, puisque les obliques OD, OE, etc., sont toutes plus longues que la perpendiculaire OC. Ces points D, E, etc., sont donc situés hors de la sphère, et le plan AB, n'ayant que le seul point C commun avec la surface, lui est tangent.

230. Réciproquement, *tout plan tangent à la sphère est perpendiculaire sur le rayon du point de contact.* Car ce plan n'a de commun avec la sphère que le seul point de contact C (*fig.* 163), et tous ses autres points sont en dehors de la surface; ils sont donc plus éloignés du centre que le point C, et, le rayon OC étant la plus courte droite que l'on puisse mener du centre au plan tangent, ce rayon est perpendiculaire audit plan.

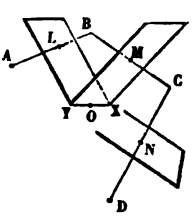
COROLLAIRE I. — *Il n'existe qu'un seul plan tangent en chacun des points d'une sphère.*

COROLLAIRE II. — *Les plans tangents aux extrémités d'un diamètre sont parallèles,* comme étant perpendiculaires à une même droite.

COROLLAIRE III. — *Tous les plans également distants d'un point donné touchent une sphère dont ce point est le centre.*

231. *Par quatre points donnés non dans un même plan, on peut toujours faire passer une surface sphérique, mais il n'en peut passer qu'une.*

Fig. 164.



Le centre de la sphère cherchée étant équidistant des deux points A et B, est situé dans le plan perpendiculaire sur le milieu de la droite AB; il est de même dans le plan perpendiculaire sur le milieu de BC; il est donc déjà situé quelque part sur l'intersection XY des deux plans sus-indiqués. Ce même centre, étant encore équidistant des deux points C et D, se trouvera dans le plan perpendiculaire sur le milieu N de la droite CD; il sera donc à la rencontre en O de ce dernier plan avec la droite XY.

Il est, d'ailleurs, aisé de voir que ce point de rencontre O du plan NO

Digitized by Google

avec la droite XY étant unique, il ne peut exister qu'un seul centre d'une sphère passant par les quatre points A, B, C et D.

Remarque. — Si les quatre points donnés appartenaient à un même plan, la droite XY serait parallèle au plan NO, et le problème serait impossible, à moins que ladite droite XY ne se trouvât elle-même comprise dans le plan NO, le quadrilatère ABCD étant alors inscriptible à une circonférence passant par les quatre points donnés; dans ce cas, le problème serait évidemment indéterminé, puisque tout point de XY pourrait servir de centre à une sphère passant par A, B, C et D.

COROLLAIRE. — *Le point de rencontre des six plans bissecteurs des dièdres d'un tétraèdre* (190) *est le centre d'une sphère* tangente à chacune des six faces, c'est-à-dire *inscrite au tétraèdre.*

CONTACT ET INTERSECTION DES SPHÈRES.

232. *Lorsque deux sphères se coupent, cette intersection a lieu suivant une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres et qui a son centre sur cette ligne.*

Cette vérité résulte suffisamment du Corollaire II du n° 166 et de la Remarque du numéro précédent; nous pouvons, en effet, conclure que tout point de l'intersection des deux surfaces est situé sur une circonférence dont le plan est perpendiculaire au rayon de chaque sphère qui passe par son centre. Ces deux rayons sont donc sur une même ligne droite qui n'est autre chose que la ligne des centres.

COROLLAIRE. — *Lorsque deux sphères n'ont qu'un seul point commun,* auquel cas elles sont dites *tangentes, ce point est sur la ligne des centres;* car deux sphères qui n'ont qu'un seul point commun peuvent être considérées comme limites de deux sphères se coupant d'abord suivant un cercle, et que l'on aurait fait mouvoir, de manière à laisser les centres sur la même ligne droite, jusqu'à ce que le cercle d'intersection se fût réduit à son centre, toujours situé lui-même sur la ligne des deux autres.

233. Les positions relatives que deux sphères peuvent occuper dans l'espace sont absolument les mêmes que celles qui ont été exposées (89) pour deux cercles sur un plan; les relations propres à chaque cas entre la distance des centres et les rayons sont aussi les mêmes, et se démontrent de la même manière; nous nous bornerons en conséquence à les énoncer ici :

1°. *Quand deux sphères sont extérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons.*

2°. *Lorsque deux sphères se touchent extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons.*

3°. *Lorsque deux sphères se coupent, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence.*

Digitized by Google

4°. *Quand deux sphères se touchent intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons.*

5°. *Lorsque deux sphères sont intérieures l'une à l'autre, la distance des centres est moindre que la différence des rayons.*

Les réciproques de ces cinq propositions sont également vraies et s'établissent comme celles du n° 89.

AIRES DES POLYÈDRES ET DES TROIS CORPS RONDS.

234. L'aire d'un polyèdre quelconque n'est autre chose que la somme des aires de chacune de ses faces polygonales; on évalue d'ailleurs ces aires partielles par les procédés exposés dans la géométrie plane. Dans certains cas particuliers, il est cependant possible de grouper d'une manière commode tout ou partie des éléments superficiels de la surface des polyèdres.

S'il s'agit, par exemple, d'un prisme, toutes ses faces latérales sont des parallélogrammes, qui tous ont pour base l'arête longitudinale du prisme et pour hauteur l'un des côtés du polygone que l'on obtiendrait en coupant le prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes parallèles, polygone que, pour ce motif, on appelle *section droite* du prisme. Il est clair que *la surface latérale* ou la somme des faces latérales est alors *mesurée par le produit de l'arête du prisme et du périmètre de la section droite.*

Corollaire I. — *L'aire latérale d'un prisme droit est égale à sa hauteur multipliée par le périmètre de sa base.* On sait en effet que, dans un prisme droit, la section droite est égale à la base.

Corollaire II. — L'aire totale d'un parallélépipède rectangle ayant pour dimension a, b, c, est exprimée par $2(ab + ac + bc)$. — Si $a = b = c$, auquel cas le parallélépipède devient un cube de côté a, l'aire totale est égale à $6a^2$.

Corollaire III. — Si nous appelons p et r le périmètre et l'apothème de la base d'un prisme régulier de hauteur h, sa surface latérale sera ph, celle de chacune de ses bases $p \times \frac{r}{2}$, et l'aire totale sera $ph + 2p \times \frac{r}{2}$, ou $p(h + r)$.

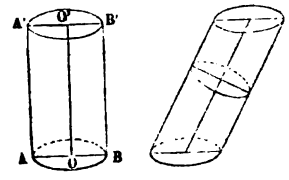
235. Supposons que l'on circonscrive une circonférence aux polygones qui servent de base à un prisme régulier, et que l'on double ensuite le nombre des côtés de ces polygones réguliers inscrits; on déterminera un nouveau prisme régulier, qui aura deux fois autant de faces latérales que le premier. En continuant ainsi à doubler le nombre des côtés des bases, ces polygones tendront à se confondre avec la circonférence circonscrite, et la surface du prisme avec celle d'un corps ayant pour bases les deux cercles et pour surface latérale celle qu'engendrerait une droite se mouvant perpendiculairement à ces bases et glissant sur les deux circonférences. C'est ce corps qui prend alors le nom de *cylindre;* on le désigne plus

Digitized by Google

spécialement sous le nom de *cylindre droit*, pour le distinguer du *cylindre oblique*, qui serait engendré dans les mêmes circonstances que le premier, par un prisme oblique à bases régulières, ou par une droite glissant sur deux bases circulaires, parallèlement à la ligne qui unit leurs centres.

Fig. 165.

Cylindre droit. Cylindre oblique.



Dans un cylindre oblique, comme dans un prisme, on nomme *section droite* celle que fournit un plan perpendiculaire aux diverses positions de la droite décrivante ou *génératrice*.

Remarque. — On voit que le cylindre droit peut encore être considéré comme engendré : 1° par le rectangle A OO' A' tournant autour de son côté OO'; 2° par le cercle AB, glissant parallèlement à lui-même le long de OO' comme axe; 3° par un rectangle ayant pour hauteur BB' et pour base la longueur de la circonférence AB, lequel s'enroulerait par sa base sur cette circonférence. Le deuxième de ces trois modes de génération convient seul au cylindre oblique.

236. *L'aire latérale d'un cylindre droit est égale à la circonférence de la base multipliée par la hauteur;* car le cylindre n'est autre chose qu'un prisme droit (234, Coroll. I) compris sous une infinité de pans très-étroits.

Remarque I. — L'aire latérale d'un cylindre oblique est égale à sa génératrice multipliée par le contour de la section droite.

Remarque II. — Si nous appelons R le rayon de la base d'un cylindre droit et H sa hauteur, son aire latérale sera exprimée par $2\pi RH$.

L'aire de chaque base étant πR^2, l'aire totale sera

$$2\pi RH + 2\pi R^2 \quad \text{ou} \quad 2\pi R(H + R).$$

237. *L'aire latérale d'une pyramide régulière est égale au périmètre de sa base multiplié par la moitié de l'apothème.*

On voit, en effet (*fig.* 153), que l'aire latérale se compose de triangles isocèles, dont chacun a pour mesure sa base multipliée par la moitié de l'apothème SK; la somme de ces triangles, ou l'aire latérale de la pyramide, est donc exprimée par

$$(AB + BC + CD + DE + EA) \times \frac{SK}{2}, \quad \text{ou} \quad 5AB \times \frac{SK}{2}.$$

Corollaire I. — L'aire de la base est égale à son périmètre multiplié par la moitié de son apothème OK; l'aire totale de la pyramide sera donc

$$5AB \times \frac{SK}{2} + 5AB \times \frac{OK}{2}, \quad \text{ou} \quad 5AB \times \frac{SK + OK}{2}.$$

Corollaire II. — L'aire totale d'un tétraèdre régulier quelconque est

Digitized by Google

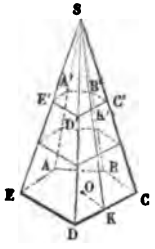
quadruple de l'aire de l'une de ses faces; car un pareil corps est compris sous quatre triangles équilatéraux égaux.

Or, l'aire de l'un de ces triangles (118, Coroll. III) est égale à $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, si le côté est a; par conséquent, l'aire totale du tétraèdre régulier sera égale à 4 fois celle-ci, ou à

$$a^2\sqrt{3}.$$

238. *L'aire latérale d'un tronc de pyramide régulière à bases parallèles est égale à l'apothème du tronc multiplié par la demi-somme des périmètres des deux bases.*

Fig. 166.



En effet, l'aire latérale du tronc se compose de cinq trapèzes égaux, dont l'un EDD'E' a pour mesure $\frac{ED + E'D'}{2} \times KK'$; cette aire est donc égale à $\frac{5(ED + E'D')}{2} \times KK'$, ou $\frac{5\,ED + 5\,E'D'}{2} \times KK'$, conformément à l'énoncé.

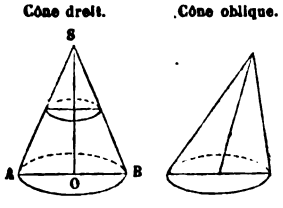
COROLLAIRE. — Dans chacun des trapèzes on peut remplacer la demi-somme des deux bases par la parallèle équidistante; on voit donc que l'aire du tronc équivaut aussi à l'apothème multiplié par le périmètre de la section polygonale menée à égale distance des deux bases.

Remarque. — Soient p et p' les périmètres des deux bases, r et r' leurs apothèmes, c l'apothème du tronc; l'aire totale de ce tronc sera

$$\frac{p+p'}{2} \times c + \frac{pr}{2} + \frac{p'r'}{2} \quad \text{ou} \quad p \times \frac{c+r}{2} + p' \times \frac{c'+r'}{2}.$$

239. Par des considérations analogues à celles du n° 235, et en doublant successivement le nombre des faces latérales d'une pyramide régulière quelconque, nous arriverions à un corps ayant pour base la circonférence circonscrite, et que nous pourrions regarder comme engendré par une droite passant constamment par le sommet S et glissant sur la base circulaire; ce corps que l'on appelle *cône*, s'appelle plus particulièrement *cône droit*, pour le distinguer du *cône oblique* qui procéderait de la même manière d'une pyramide oblique, et serait encore engendré par le mouvement d'une droite passant par un point non situé sur la perpendiculaire du centre de la base.

Fig. 167.



COROLLAIRE. — Le cône droit peut être encore considéré comme engendré : 1° par le mouvement du triangle rectangle SAO autour de son côté SO;

Digitized by Google

2° par un secteur circulaire ayant pour arc la longueur de la circonférence AB dans un cercle dont le rayon serait la longueur de la génératrice SA.

240. *L'aire latérale d'un cône droit est égale à la circonférence de sa base multipliée par la moitié de l'apothème*, puisque le cône droit n'est autre chose qu'une pyramide régulière (237) d'un nombre infini de pans très-étroits.

Remarque I. — On arriverait à la même conclusion en considérant la surface conique comme un secteur circulaire enroulé.

Remarque II. — Soit R le rayon de la base d'un cône droit et c le côté générateur; la surface latérale sera, d'après ce qu'on vient de voir,

$$2\pi R \times \frac{c}{2}, \quad \text{ou} \quad \pi R c.$$

L'aire de la base étant πR^2, on aura pour la surface totale

$$\pi R c + \pi R^2, \quad \text{ou} \quad \pi R (c + R).$$

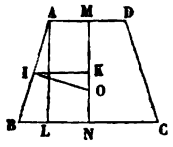
241. *L'aire latérale d'un tronc de cône droit à bases parallèles est égale à l'apothème multiplié par la demi-somme des circonférences des deux bases.*

Cette proposition étant démontrée (238) pour le tronc de pyramide régulière, elle s'applique en effet au cas limite du tronc de cône.

Corollaire. — Il est également vrai de dire que *la surface latérale du tronc de cône a pour mesure l'apothème multiplié par la circonférence de la section équidistante des deux bases*, puisque cette propriété a été établie (238, Coroll.) pour le tronc de pyramide.

On peut encore transformer cet énoncé, en remarquant que les deux triangles OIK et ABL sont semblables comme ayant leur côtés perpendiculaires, et donnent

Fig. 168.



$$AB \times IK = AL \times OI = MN \times OI.$$

On a donc

$$AB \times 2\pi . IK = MN \times 2\pi . OI.$$

Donc aussi, *la surface d'un tronc de cône est égale à la hauteur multipliée par la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire élevée par le milieu de l'apothème jusqu'à la rencontre de l'axe.*

Remarque. — Appelons R et R′ les rayons des deux bases, et c l'apothème du tronc de cône; nous aurons pour l'aire latérale l'expression

$$\frac{2\pi R + 2\pi R'}{2} \times c, \quad \text{ou} \quad \pi (R + R') \times c.$$

Si R″ est le rayon de la circonférence équidistante des deux bases, on a

Digitized by Google

$R'' = \frac{R + R'}{2}$, et l'on tombe encore sur la même valeur de l'aire latérale, $\pi (R + R') c$. Quant à l'aire totale, elle est

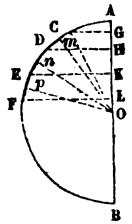
$$\pi (R + R') c + \pi R^2 + \pi R'^2,$$

ou

$$\pi [R (c + R) + R' (c + R')].$$

242. La surface d'une sphère peut être envisagée comme étant produite par la révolution d'une demi-circonférence autour de son diamètre, de même que le cylindre et le cône ont été respectivement engendrés par la révolution d'un rectangle et d'un triangle. Notons en passant que ce mode de génération a fait donner à ces trois figures le nom de *corps ronds*.

Fig. 169.



Supposons maintenant une ligne brisée régulière CDEF inscrite dans un arc quelconque CF de la demi-circonférence AFB, et imaginons que cette ligne, dans laquelle les distances au centre Om, On, Op sont égales, tourne autour du diamètre AB. Chacun des trois côtés CD, DE, EF engendrera la surface d'un tronc de cône et, d'après le Corollaire du numéro précédent, l'aire totale sera exprimée par

$$2\pi . Om \times GH + 2\pi . On \times HK + 2\pi . Op \times KL,$$

ou

$$2\pi . Om (GH + HK + KL),$$

ou enfin

$$2\pi . Om \times GL.$$

Or, ce résultat est acquis, quel que soit le nombre des côtés égaux de la ligne inscrite dans l'arc CF. Si donc nous doublons indéfiniment, suivant le mode connu, le nombre de ces côtés, la ligne brisée tendra de plus en plus à se confondre avec l'arc CF lui-même, et les apothèmes égaux *om*, *on*, *op* tendront vers une limite qui n'est autre que le rayon OC de la circonférence primitive. Dès lors on peut dire que la surface de la *zone* sphérique comprise entre les deux plans parallèles CG et FL est égale à $2\pi . OC \times GL$. En d'autres termes, *la surface d'une zone sphérique est égale à sa hauteur multipliée par la circonférence d'un grand cercle.*

Remarque. — Ce résultat est indépendant de la distance des extrémités de l'arc décrivant au diamètre; il est donc le même quand la zone a une base nulle et a son origine à l'extrémité du diamètre; dans ce cas, la zone prend le nom particulier de *calotte*.

COROLLAIRE. — Si H et H' sont les hauteurs de deux zones et R le rayon de la sphère, les aires de ces deux zones seront respectivement

$$2\pi RH \quad \text{et} \quad 2\pi RH',$$

ce qui prouve qu'elles sont entre elles dans le même rapport que leurs hau-

Digitized by Google

teurs H et H'. Ainsi, pour partager une surface sphérique en un certain nombre de zones équivalentes, il faut diviser le diamètre en ce même nombre de parties égales, et lui mener des plans perpendiculaires par les points de division.

243. En appliquant les considérations et les résultats qui précèdent à la demi-circonférence entière, on obtient la sphère elle-même, dont la surface est, par conséquent, *égale à une circonférence de grand cercle multipliée par le diamètre*, soit à

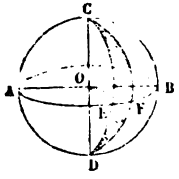
$$2\pi R \times 2R, \quad \text{ou} \quad 4\pi R^2.$$

Remarque. — La surface de la sphère équivaut à quatre grands cercles.

COROLLAIRE. — Deux surfaces sphériques de rayons R et R' sont respectivement exprimées par $4\pi R^2$ et $4\pi R'^2$; elles sont donc *proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

244. Si l'on appelle *fuseau* la portion CDEF de la surface sphérique comprise entre deux demi-grands cercles s'appuyant sur le même diamètre CD, son aire sera égale au diamètre multiplié par l'arc EF qui mesure l'angle rectiligne de l'inclinaison des deux plans et que l'on appelle l'*arc* du fuseau.

Fig. 170.



Le fuseau CEDF est, en effet, contenu dans la surface sphérique autant de fois que l'arc EF dans la circonférence AEFB; on a donc la proportion

$$\frac{\text{CEDF}}{4\pi R^2} = \frac{\text{EF}}{2\pi R};$$

d'où l'on tire, conformément à l'énoncé,

$$\text{CEDF} = \text{EF} \times 2R.$$

COROLLAIRE. — *Sur une même sphère, deux fuseaux sont entre eux comme leurs arcs.*

VOLUMES DES POLYÈDRES ET DES CORPS RONDS.

245. Mesurer un corps, c'est l'exprimer numériquement en le comparant à un autre corps pris pour unité; le nombre qui exprime le résultat de cette comparaison s'appelle *volume* du corps. L'unité de volume est le *mètre cube* (*Arith.*, 76).

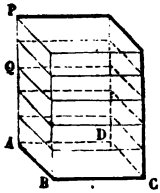
On comprend aisément que deux corps de formes très-différentes peuvent avoir le même volume; nous les appellerons *équivalents*, et nous continuerons à nommer *égaux* ceux qui peuvent être superposés.

246. *Deux parallélépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Digitized by Google

Soient les deux parallélépipèdes rectangles ABCDP, ABCDQ, qui ont respectivement pour hauteur AP et AQ; supposons que la plus grande commune mesure de ces deux hauteurs soit contenue 5 fois dans AP, et 3 fois dans AQ, de telle sorte que l'on ait

Fig. 171.



$$\frac{AP}{AQ} = \frac{5}{3}.$$

Par les points de division menons des plans parallèles à la base ABCD; toutes les sections seront égales entre elles et à cette base; par suite, les deux parallélépipèdes seront décomposés, l'un en 5, l'autre en 3 parallélépipèdes rectangles qui sont égaux comme ayant même hauteur et même base (205, Coroll. I). Il résulte de là que les deux parallélépipèdes donnés sont aussi dans le rapport de 5 à 3, et que l'on a

$$\frac{ABCDP}{ABCDQ} = \frac{5}{3};$$

par conséquent, on peut conclure, conformément à l'énoncé, que

$$\frac{ABCDP}{ABCDQ} = \frac{AP}{AQ}.$$

Remarque. — Comme on peut prendre pour bases d'un parallélépipède deux faces opposées quelconques, le théorème qui vient d'être démontré peut s'énoncer comme il suit:

Deux parallélépipèdes rectangles qui ont deux dimensions communes sont dans le même rapport que leurs troisièmes dimensions.

247. *Deux parallélépipèdes rectangles sont entre eux comme les produits de leurs trois dimensions, ou comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

Soient, en effet, P et P' les deux parallélépipèdes considérés,

a, b, c, les dimensions de P,
a', b', c', celles de P'.

Imaginons deux autres parallélépipèdes rectangles Q et R, et soient

a', b, c, les dimensions de Q,
a', b', c, celles de R.

Les parallélépipèdes P et Q ont deux dimensions communes, et donnent (246, Rem.)

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{a'}.$$

Par la même raison, on a

$$\frac{Q}{R} = \frac{b}{b'} \quad \text{et} \quad \frac{R}{P'} = \frac{c}{c'}.$$

Digitized by Google

Multipliant ces trois égalités membre à membre, on obtient

$$\frac{P \times Q \times R}{Q \times R \times P'}, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{a \times b \times c}{a' \times b' \times c'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

248. Si, au lieu de comparer le parallélépipède P à un parallélépipède quelconque, nous le rapprochons de celui qui a été choisi pour servir d'unité, c'est-à-dire du cube dont les trois dimensions sont égales à 1 mètre, la relation générale qui vient d'être établie deviendra

$$\frac{P}{1^{m.c}} = \frac{a}{1^m} \times \frac{b}{1^m} \times \frac{c}{1^m},$$

ou

$$P = a \times b \times c;$$

nous pouvons ainsi conclure que *le volume d'un parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions*, ou, parce que le produit de deux dimensions représente l'aire de la base, *le produit de sa base par sa hauteur.*

Il est clair qu'il faut entendre par là, que le parallélépipède considéré contient autant de mètres cubes qu'il y a d'unités dans le produit des trois nombres qui expriment les longueurs métriques des trois arêtes contiguës.

Corollaire I. — Si les trois arêtes a, b, c étaient égales entre elles, le parallélépipède se réduirait à un cube et serait mesuré par a^3; de là vient qu'on appelle *cube* la troisième puissance d'un nombre.

Corollaire II. — Nous avons démontré (246) que deux parallélépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; la relation

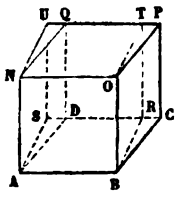
$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b \times c}{a' \times b' \times c'}$$

nous montre que, si a est égal à a', c'est-à-dire si les deux parallélépipèdes ont même hauteur, ils seront entre eux comme leurs bases, puisqu'il restera dans cette hypothèse

$$\frac{P}{P'} = \frac{b \times c}{b' \times c'}.$$

249. *Un parallélépipède droit est toujours équivalent à un parallélépipède rectangle de même hauteur et de base équivalente.*

Fig. 172.



Soit ABCDQNOP un parallélépipède droit. Par les deux arêtes parallèles NA et OB conduisons deux plans NASU et OBRT perpendiculaires à la face CPQD; nous déterminerons ainsi un parallélépipède rectangle ABRSUNOT qui aura pour hauteur la hauteur AN du premier, et pour base le rectangle ABRS équivalent à la première base ABCD.

Digitized by Google

Or, les deux prismes triangulaires droits non communs ADSUQN et BCRTPO sont égaux entre eux, puisqu'ils ont des bases égales et même hauteur (196); par conséquent, les deux parallélépipèdes sont eux-mêmes équivalents.

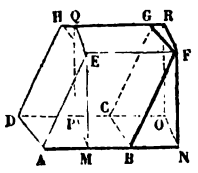
COROLLAIRE. — *Un parallélépipède droit a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur,* puisqu'il équivaut à un parallélépipède rectangle de base équivalente et de même hauteur.

Remarque. — Le parallélépipède rectangle, et, par suite, le parallélépipède droit peuvent être encore considérés comme ayant pour base commune le rectangle ABON, et pour hauteur la distance AS des deux bases; l'un et l'autre ont donc aussi pour mesure *le produit de l'une des faces rectangulaires par la hauteur correspondante.*

250. De même que nous venons de transformer un parallélépipède droit en un parallélépipède rectangle équivalent, nous allons remplacer un parallélépipède quelconque par un parallélépipède droit équivalent.

Soit donc le parallélépipède oblique ABCDHEFG; par les extrémités de l'une des arêtes EF, menons deux plans perpendiculaires à cette arête, et formons ainsi un parallélépipède droit MNOPQEFR, qui sera équivalent au premier, si nous démontrons que les parties non communes AMPDHEQ et BNOCGFR sont égales.

Fig. 173.



Or, si nous transportons par glissement la seconde de ces parties sur la première, de telle façon que le rectangle FNOR vienne couvrir son égal EMPQ, les trois autres sommets B, C et G tomberont nécessairement sur leurs correspondants A, D et H, puisque BN = AM, CO = DP et GR = QH. On voit donc que le parallélépipède oblique est équivalent au parallélépipède droit, et que tous deux ont pour hauteur commune ME, avec des bases équivalentes EFGH et EFRQ.

La mesure du parallélépipède droit étant EFRQ × ME, celle du parallélépipède oblique sera la même, ou bien

$$EFGH \times ME,$$

c'est-à-dire *le produit de sa base par sa hauteur.*

COROLLAIRE. — Deux parallélépipèdes quelconques sont entre eux dans le même rapport que les produits de leurs bases par leurs hauteurs, ou que le produit de leurs trois dimensions.

Il résulte de là que *deux parallélépipèdes de bases équivalentes sont entre eux dans le rapport de leurs hauteurs, et que deux parallélépipèdes de hauteurs égales sont entre eux dans le rapport de leurs bases.*

Remarque. — La construction et la démonstration qui précèdent peuvent s'appliquer sans aucune différence à un *prisme polygonal quelconque* qui

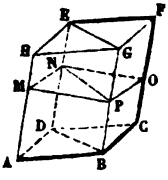
Digitized by Google

se trouverait ainsi *transformé en un prisme droit équivalent, ayant pour base la section droite du premier et pour hauteur son arête latérale.*

De cette remarque, on conclut immédiatement que *deux prismes qui ont des sections droites égales et les arêtes perpendiculaires à la section droite égales sont équivalents.*

251. *Tout plan mené par deux arêtes opposées d'un parallélépipède le divise en deux prismes triangulaires équivalents.*

Fig. 174.



Soit BDEG le plan dont il s'agit et qui passe par les arêtes opposées BG et DE. Par un point quelconque M de l'arête AH, menons un plan perpendiculaire à cette arête; la section MNOP est un parallélogramme que le plan BDEG partage en deux triangles égaux MNP et PNO.

Chacun des triangles MNP et PNO sera la section droite de l'un des prismes ABDEGH, BCDEFG qui, ayant des sections droites égales et une arête latérale égale, sont équivalents d'après la remarque du numéro précédent.

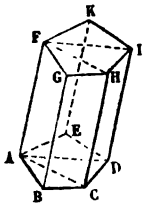
COROLLAIRE. — *Tout prisme triangulaire est la moitié d'un parallélépipède de base double et de même hauteur.*

252. *Le volume d'un prisme triangulaire est égal à sa base multipliée par sa hauteur.*

Ceci résulte de ce que le prisme étant la moitié d'un parallélépipède de base double et de même hauteur, et celui-ci ayant pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, il en est nécessairement de même du prisme dont le volume est égal à la moitié de la base du parallélépipède, ou à sa propre base, multipliée par la hauteur commune.

253. Plus généralement, *le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 175.



Il est toujours facile, en effet, de décomposer le prisme polygonal en prismes triangulaires par des plans diagonaux, joignant l'une AF de ses arêtes parallèles à toutes les autres, à l'exception des deux voisines BG et EK. Chacun de ces prismes partiels aura pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; le prisme total sera donc mesuré par le produit de la somme des bases triangulaires, ou de la base polygonale ABCDE par la hauteur commune.

COROLLAIRE I. — On conclut de là que les volumes de deux prismes quelconques sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur; ils sont donc entre eux comme leurs hauteurs lorsqu'ils ont des bases équivalentes, ou comme leurs bases lorsqu'ils ont la même hauteur.

Digitized by Google

Enfin, deux prismes quelconques, quelles que soient les formes de leurs bases, sont équivalents, si ces bases sont équivalentes et si les hauteurs sont égales.

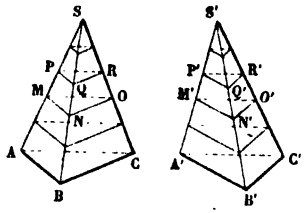
COROLLAIRE II. — En regardant, comme nous l'avons fait au n° 235, un cylindre droit ou oblique comme la limite d'une série de prismes inscrits, on conclut que *deux cylindres de même base et de même hauteur sont équivalents*, et que *le volume d'un cylindre droit ou oblique est mesuré par le produit de sa base et de sa hauteur.*

Si le rayon de la base est R et la hauteur H, le volume du cylindre sera

$$\pi R^2 H.$$

254. *Deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes.*

Fig. 176.



Supposons les bases placées sur un même plan et divisons, par des plans parallèles à celui des bases, les deux pyramides en un même nombre de tranches d'égale épaisseur.

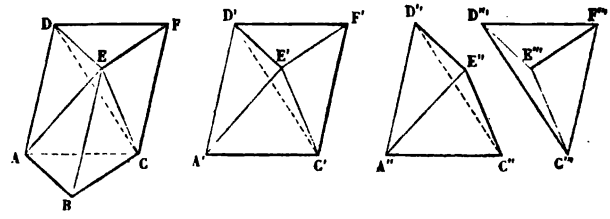
Deux sections quelconques MNO, M'N'O' seront semblables et proportionnelles aux bases, et par conséquent équivalentes entre elles (204). Si donc nous supposons que les deux tranches correspondantes MNORQP, M'N'O'R'Q'P' ont une épaisseur très-petite, elles ne différeront pas sensiblement de deux prismes de bases équivalentes et de même hauteur, et seront équivalentes entre elles; ou du moins, elles s'approcheront d'autant plus de cet état que leur épaisseur sera plus faible, c'est-à-dire, que les deux hauteurs comprendront un plus grand nombre de ces tranches.

On voit donc que les deux pyramides peuvent être regardées comme composées d'un égal nombre de tranches infiniment minces et équivalentes chacune à chacune; ces deux corps sont donc eux-mêmes équivalents.

255. *Une pyramide triangulaire est équivalente au tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.*

Soit EABC la pyramide donnée; achevons le prisme ABCFED sur la base

Fig. 177.



Digitized by Google

ABC et l'arête latérale EB. Le prisme ainsi formé différera de la pyramide triangulaire EABC par une pyramide quadrangulaire EACFD que, pour plus de clarté, nous reproduisons à part en E'A'C'F'D', et qui a pour base le parallélogramme ACFD opposé au sommet E.

Par le plan DEC cette pyramide quadrangulaire est partagée en deux pyramides triangulaires EACD, ECFD, respectivement représentées à part en E''A''C''D'', E'''C'''F'''D'''. Ces deux dernières figures sont équivalentes entre elles (254) comme ayant leurs sommets réunis en E, et pour bases les deux moitiés du parallélogramme ACFD.

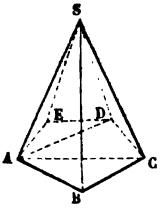
Or, la pyramide ECFD peut aussi être considérée comme ayant son sommet en C, et ayant pour base le triangle DEF égal à ABC; elle est donc aussi équivalente à la première pyramide EABC; partant, les trois pyramides triangulaires dans lesquelles se trouve décomposé le prisme, et dont l'une est la proposée, sont équivalentes entre elles; en d'autres termes, cette dernière est le tiers du prisme, comme nous l'avions annoncé.

256. *Le volume d'une pyramide triangulaire a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

On vient de voir, en effet, que ce volume est le tiers de celui d'un prisme de même base et de même hauteur, lequel a pour mesure le produit de sa base par cette hauteur.

257. Plus généralement, *le volume d'une pyramide quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 178.



En effet, une pyramide polygonale peut toujours se décomposer en pyramides triangulaires, au moyen des plans passant par le sommet S et par chacune des diagonales AC, AD de la base. Chacune des pyramides SABC, SACD, SADE ayant pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur, la pyramide donnée elle-même aura pour volume le tiers du produit de la somme des bases, ou de sa propre base, par la hauteur commune.

Corollaire I. — On conclut de là que deux pyramides quelconques sont entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs; elles sont donc entre elles comme leurs bases, si les hauteurs sont les mêmes, ou comme leurs hauteurs, si les bases sont équivalentes. Enfin, quelles que soient les formes de leurs bases, deux pyramides quelconques sont équivalentes, si elles ont à la fois même hauteur et des bases équivalentes.

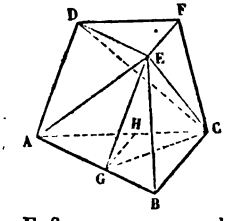
Corollaire II. — En considérant (239) un cône comme la limite des pyramides qu'on peut lui inscrire, on conclut que *le volume d'un cône circulaire, droit ou oblique, a pour mesure le tiers de sa base multiplié par sa hauteur,* ou $\frac{1}{3}\pi R^2 H$, si H est sa hauteur et R le rayon de la base.

Digitized by Google

COROLLAIRE III. — *Un cône est le tiers du cylindre de même base et de même hauteur.*

258. *Un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles équivaut à trois pyramides triangulaires de même hauteur que le tronc, et ayant respectivement pour bases la base inférieure du tronc, la base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

Fig. 179.



Le plan AEC détache du tronc une pyramide triangulaire EABC qui a pour sommet E et pour base ABC : c'est la première des trois pyramides annoncées.

Coupons maintenant la pyramide quadrangulaire EACFD par le plan DEC ; le tétraèdre EDFC a son sommet en C et sa base est DEF : c'est la seconde des pyramides annoncées.

Enfin, nous avons la pyramide EADC, qu'il s'agit de transformer en une autre qui ait même hauteur que le tronc. Nous mènerons, pour cela, EG parallèle à AD, et nous tirerons CG. Les deux pyramides CEAG, CEAD, qui ont un sommet commun C, et dont les bases EAG, EAD, sont égales comme moitiés du parallélogramme AGED, sont équivalentes; par suite, notre troisième pyramide EADC, ou CEAD, peut se remplacer par CEAG, qui a un sommet en E, et pour base opposée le triangle CAG.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à montrer que le triangle CAG est une moyenne proportionnelle entre ABC et DEF, que nous rapporterons en AGH sur la base inférieure, par GH parallèle à BC.

Or, les deux triangles ABC, AGC, ont une hauteur commune correspondante aux bases AB, AG; ils sont donc entre eux comme ces bases, et donnent

$$\frac{ABC}{AGC} = \frac{AB}{AG}.$$

Par une raison analogue, on trouverait

$$\frac{AGC}{AGH} = \frac{AC}{AH};$$

mais, puisque GH est parallèle à BC, nous avons

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH};$$

il vient donc

$$\frac{ABC}{AGC} = \frac{AGC}{AGH},$$

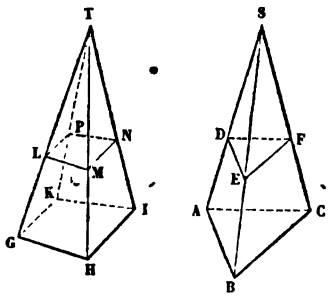
et le théorème annoncé est complétement démontré.

259. L'expression précédente du volume d'un tronc de pyramide trian-

Digitized by Google

gulaire convient également à un tronc de pyramide quelconque. On sait, en effet : 1° que les deux pyramides SABC, TKIHG, qui ont une même hauteur et des bases équivalentes, sont équivalentes; 2° que les sections DEF, LMNP, faites par un plan parallèle aux bases, sont équivalentes; 3° que les petites pyramides SDEF, TLMNP, qui ont même hauteur et des bases équivalentes, sont équivalentes.

Fig. 180.



Par conséquent, les deux troncs ABCFED, GHIKPNML, différences de pyramides équivalentes, sont eux-mêmes équivalents, et l'expression du volume de l'un appartient également à l'autre.

260. Le même énoncé s'applique encore, et pour les raisons déjà déduites, au tronc de cône à bases parallèles.

Si H est la hauteur de ce tronc, R et r les rayons de ses deux bases, son volume sera

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{1}{3} H \sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2},$$

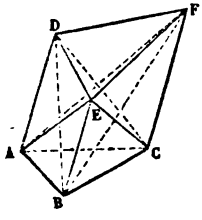
ou

$$\frac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr).$$

261. Un polyèdre quelconque peut toujours être partagé en pyramides (207), et l'évaluation de son volume revient évidemment à celle de chacune des pyramides qu'il contient; aussi terminerons-nous ce que nous avons à dire sur les volumes polyédriques, par un théorème relatif au *prisme triangulaire tronqué*. Ce corps ne diffère d'ailleurs du prisme triangulaire ordinaire que parce que le plan opposé à sa base n'est point parallèle à cette base; en un mot, c'est un corps prismatique à bases non parallèles.

Quoi qu'il en soit, *un prisme triangulaire tronqué est équivalent à trois pyramides ayant toutes trois pour base l'une des bases du tronc, et ayant leurs sommets respectifs placés à chacun des sommets de l'autre base.*

Fig. 181.



Le plan AEC détache d'abord du tronc une pyramide EABC, qui a son sommet en E et sa base en ABC; c'est l'une des pyramides annoncées.

Le plan DEC partage la pyramide quadrangulaire EACFD qui reste en deux pyramides triangulaires EACD, ECFD, équivalentes, d'après l'énoncé, à deux autres que nous allons déterminer.

Digitized by Google

Si nous menons, dans ce but, un plan par la droite BC et le sommet D, nous formerons une pyramide DABC qui, comparée à EACD, a même base ACD, et son sommet B placé sur une même parallèle à la base que le sommet E. Ces deux pyramides DABC, EACD, ont donc même base et même hauteur; elles sont équivalentes, et l'une d'elles, DABC, a bien aussi pour base ABC, et son sommet en D.

Reste la troisième pyramide ECFD; nous ferons, de même, passer le plan FAB pour déterminer une pyramide FABC, qui répondra parfaitement à la condition de l'énoncé, si nous prouvons qu'elle est équivalente à ECFD. Or, les bases ACF, CFD, de ces deux pyramides sont équivalentes, puisque ces triangles ont même base CF, et les sommets sur la même parallèle AD à cette base; de plus, les deux pyramides ont même hauteur, puisque leurs sommets B et E sont sur une même parallèle BE au plan de leurs bases; elles sont donc bien équivalentes, et le théorème est entièrement démontré.

COROLLAIRE. — Le volume d'un prisme triangulaire tronqué a pour mesure le produit de l'une de ses bases B par le tiers de la somme des trois perpendiculaires H, H', H'', abaissées sur cette base de chacun des sommets de la base supérieure; c'est-à-dire, $B \times \frac{H + H' + H''}{3}$.

262. Il nous reste maintenant à évaluer le volume de la sphère et des principaux corps dans lesquels elle peut être divisée.

On voit d'abord que, si l'on considère le centre de la sphère comme le sommet commun d'une infinité de petites pyramides ayant pour bases les éléments de la surface, la sphère elle-même, ou toute partie de la sphère qui sera limitée intérieurement suivant des surfaces engendrées par un rayon, aura pour mesure la somme des bases de toutes ces petites pyramides, ou la portion de surface sphérique correspondante, multipliée par le tiers du rayon.

C'est ainsi que la sphère a pour volume $4\pi R^2 \times \frac{R}{3}$, ou $\frac{4}{3}\pi R^3$, ou $\frac{\pi D^3}{6}$, si nous appelons D son diamètre 2R.

De même, le *secteur sphérique*, engendré par un secteur circulaire, est égal à l'aire de la zone sur laquelle il s'appuie, multipliée par le tiers du rayon; ce volume est, si l'on conserve les notations du n° **242**, exprimé par $2\pi RH \times \frac{R}{3}$, ou $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

En appelant *onglet sphérique* la portion de la sphère qui a pour base un fuseau (**244**), on aura encore pour son volume, si l'on désigne son arc par a,

$$2aR \times \frac{R}{3}, \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}aR^2.$$

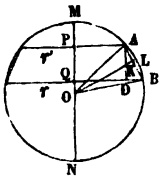
COROLLAIRE. — On voit, par ces diverses expressions, que : 1° *les vo-*

Digitized by Google

lumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes des rayons; 2° deux secteurs sphériques, dans une même sphère, sont entre eux comme les hauteurs des zones qui les limitent; 3° dans une même sphère, deux onglets, ainsi que leurs deux fuseaux, sont entre eux comme leurs arcs.

263. Le *segment sphérique*, engendré par la rotation du segment circulaire ALB autour du diamètre MN, est la différence des corps engendrés par le secteur OALB et par le triangle isocèle OAB.

Fig. 182.



Le secteur sphérique OALB, si l'on appelle H sa hauteur PQ, a pour expression (**262**)

$$\frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Le triangle isocèle OAB donne naissance à un corps qui peut être aussi considéré comme composé d'une infinité de petites pyramides ayant pour sommet commun le centre de la sphère, pour base les éléments de la surface du tronc de cône décrit par le trapèze PABQ, et pour hauteur celle OK du triangle. Ce corps s'exprime donc (**241**, Coroll.) par

$$2\pi H \times OK \times \frac{OK}{3}, \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}\pi H \times \overline{OK}^2.$$

Le segment sphérique a, par conséquent, pour expression

$$\frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{2}{3}\pi H \times \overline{OK}^2,$$

ou

$$\frac{2}{3}\pi H\left(R^2 - \overline{OK}^2\right).$$

Mais,

$$R^2 - \overline{OK}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OK}^2 = \overline{AK}^2 = \frac{\overline{AB}}{4};$$

le volume du segment a donc définitivement pour expression

$$\frac{2}{3}\pi H \times \frac{\overline{AB}^2}{4}, \quad \text{ou} \quad \pi \overline{AB}^2 \times \frac{H}{6}.$$

En langage ordinaire, *le volume d'un segment sphérique est égal au cercle qui a pour rayon la corde de ce segment, multiplié par le sixième de sa hauteur.*

264. *Le volume d'une tranche sphérique comprise entre deux plans parallèles équivaut à la demi-somme de ses bases, multipliée par la hauteur, plus la sphère décrite sur cette hauteur comme diamètre.*

Ce volume est, en effet, la somme du segment sphérique ALB (*fig.* 182) et

Digitized by Google

du tronc de cône décrit par le trapèze PABQ. On a donc pour son expression (260 et 263),

$$\pi\overline{AB}^2 \times \frac{H}{6} + \pi(r^2 + r'^2 + rr')\frac{H}{3}.$$

Or, on a évidemment sur la figure

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = H^2 + (r - r')^2,$$

et il vient, en remplaçant,

$$\pi\frac{H}{6}(H^2 + r^2 + r'^2 - 2rr') + \pi\frac{H}{3}(r^2 + r'^2 + rr'),$$

ou, après réduction,

$$\frac{\pi r^2 + \pi r'^2}{2} \times H + \pi\frac{H^3}{6}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — Si la tranche sphérique n'avait plus qu'une seule base, il suffirait d'introduire dans l'expression ci-dessus l'hypothèse $r' = 0$, et elle deviendrait

$$\frac{\pi r^2}{2}H + \pi\frac{H^3}{6}.$$

On voit ainsi *que la tranche sphérique à une seule base équivaut à la moitié du cylindre de même base et même hauteur, plus la sphère qui a cette hauteur pour diamètre.*

Digitized by Google

STATIQUE.

PRÉLIMINAIRES.

1. La matière est *inerte*, c'est-à-dire incapable d'apporter par elle-même aucune modification à son état actuel de repos ou de mouvement; lors donc que nous voyons se mouvoir un corps précédemment en repos, ou lorsque le mouvement d'un corps vient à se modifier, soit quant à la direction, soit quant à la vitesse, nous devons attribuer cet effet à des causes étrangères au corps lui-même; ces causes se nomment des *forces*, et la direction d'une force est celle de la ligne suivant laquelle le corps commencerait à se mouvoir en vertu de son action, s'il était entièrement libre.

On dit que deux forces sont égales lorsque, appliquées en sens contraires à un même point libre et en repos, elles ne lui font prendre aucun mouvement. La notion de l'égalité conduit à celle du rapport quelconque, en entendant par *somme* de plusieurs forces la force qui peut remplacer l'ensemble des premières, sollicitant le même point dans la même direction. Les forces, pouvant ainsi être évaluées en nombres, peuvent aussi être représentées par des longueurs proportionnelles à ces nombres, et il est commode de prendre ces longueurs sur la direction suivant laquelle elles agissent, et à partir du point auquel elles sont appliquées. Cette représentation graphique des intensités des forces a le double avantage de faciliter les raisonnements et de permettre d'énoncer les vérités relatives aux forces sous la forme nette et précise qui caractérise les propositions de géométrie.

De ce qui précède il résulte, d'une part, qu'un corps qui n'est soumis à aucune force se meut nécessairement en ligne droite et avec une vitesse uniforme, à moins qu'il ne soit en repos; d'autre part, que dans une force il y a trois choses à considérer, lesquelles sont: 1° *le point d'application*, c'est-à-dire la position géométrique du point matériel auquel elle est appliquée; 2° *la direction*, c'est-à-dire la direction et le sens de la droite que suivrait le point d'application, si, partant du repos, il cédait à l'action de cette force; 3° *l'intensité*, c'est-à-dire le nombre ou la longueur qui représente le rapport de cette force à la force prise pour unité de comparaison.

2. Lorsque des forces sont appliquées à un système de points ayant entre eux des liaisons quelconques, il est possible qu'elles produisent un

Digitized by Google

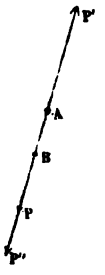
mouvement, comme il est possible aussi qu'elles s'entre-détruisent et que le système reste en repos : dans ce dernier cas, on dit que les forces sont *en équilibre ;* de là la division de la *mécanique* en deux branches principales : la *statique*, qui comprend l'ensemble des lois de l'équilibre, et la *dynamique*, qui étudie les lois du mouvement. Nous n'avons à nous occuper ici que de la première de ces subdivisions.

Lorsqu'un système de points est en équilibre, on ne détruit pas cet état en fixant un ou plusieurs de ces points, ou en établissant entre eux des liaisons nouvelles. On peut encore, sans rompre l'équilibre, introduire de nouvelles forces qui se détruisent en vertu des liaisons du système ; il est de même permis de supprimer des forces qui se détruisent ; mais, pour ce dernier point, il est nécessaire que les forces se détruisent effectivement les unes les autres, et il ne suffit pas qu'elles soient telles qu'elles se détruiraient si elles agissaient seules sur le système ; elles doivent produire réellement les effets qu'elles produiraient si elles étaient seules, pour que l'on puisse les supprimer avec la certitude de ne pas rompre l'équilibre.

Ces principes bien simples sont d'une grande utilité pour les transformations sans nombre qu'ils permettent de faire.

3. Lorsqu'une force P est appliquée à un point libre A, on peut, sans changer son effet, quel qu'il soit, l'appliquer à tout autre point B de sa direction, pourvu que ce nouveau point d'application soit invariablement lié au premier. Ce fait, qu'il est permis de regarder comme évident, s'établit toutefois d'une manière péremptoire par le raisonnement suivant : Appliquons aux extrémités de la droite inextensible et incompressible AB deux forces P′, P″, égales à P et agissant en sens contraire dans les directions AP′ et BP″. Ces deux forces se neutralisent évidemment d'elles-mêmes, et leur introduction ne change rien au système primitif ; mais, en envisageant maintenant l'ensemble des trois forces d'une autre manière, on peut dire que les forces P, P′, appliquées au même point A, en sens contraire, se détruisent, et il ne reste plus que la force P″, qui n'est que la force P transportée au point B de sa direction.

Fig. 1.



On raisonnerait d'une manière tout à fait analogue, si le point B était situé, par rapport au sens d'action de la force, au delà de son point d'application A.

4. Si plusieurs forces P, P′, P″, ... P^n, appliquées à un système de points invariablement liés entre eux, se font équilibre, et si l'une quelconque P^n de ces forces vient à suspendre son action, le mouvement naîtra sous l'influence d'une force égale en intensité et directement opposée à ladite force P^n ; cette nouvelle force, qui ferait équilibre à la force P^n, serait

Digitized by Google

donc capable du même effet que l'ensemble des autres forces, et, pour ce motif, elle s'appelle leur *résultante*. Les premières forces, par rapport à leur résultante, sont dites ses *composantes*. Il est clair, dès lors, que la recherche de la résultante d'un système de forces rentre directement dans le domaine de l'équilibre.

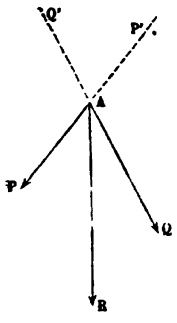
Quoi qu'il en soit, ce qui vient d'être dit prouve d'une part, que, *dans un système de forces qui sont en équilibre, l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres;* d'autre part, que, *quand plusieurs forces sont appliquées à un même point, et qu'elles ne sont pas en équilibre, elles ont toujours une résultante.*

Quand ces forces agissent toutes dans la même direction sur un même point, il est clair que la résultante de toutes celles qui agissent dans un sens est égale à leur somme; que la résultante de toutes celles qui agissent dans le sens opposé est de même égale à leur somme, et qu'enfin la résultante totale du système est égale à la différence de ces deux sommes, et agit sur le point d'application dans le sens de la plus grande. Nous allons examiner maintenant le cas des forces de directions différentes, et établir des règles pour trouver leur résultante.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES.

5. Lorsque deux forces P, Q, de directions différentes, agissent sur un même point matériel, leur résultante R ne peut se trouver située que dans le plan déterminé par les directions de ces deux forces; car on ne peut la supposer d'un côté de ce plan, sans que des raisons identiques obligent à la concevoir en même temps de l'autre côté dans une position symétrique. Elle agit, de plus, dans l'angle PAQ de ses deux composantes; car le point A ne saurait évidemment se mouvoir que dans la partie du plan située à droite de PAP′ et dans celle qui est à gauche de QAQ′; par conséquent, il ne pourra marcher que dans la partie commune à ces deux régions, c'est-à-dire dans l'angle PAQ.

Fig. 2.

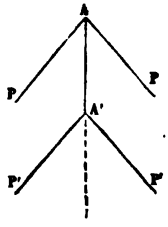


Dans le cas particulier où les deux forces sont égales, il est évident que la direction de leur résultante est celle de la droite qui divise leur angle en deux parties égales.

6. Deux forces égales à P, appliquées à un même point A, peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque A′ de la bissectrice de leur angle, pourvu que ce second point soit lié invariable-

Digitized by Google

Fig. 3.



ment avec le premier ; car les deux forces peuvent être remplacées par leur résultante dirigée suivant cette ligne, et celle-ci peut être appliquée (3) en l'un quelconque A' des points de sa direction. Or, en ce point A', la résultante peut évidemment être décomposée de la même manière qu'au point d'application, et remplacée par deux forces P' égales et parallèles aux premières, ce qui démontre la propriété énoncée.

7. Cela posé, nous allons démontrer que *la résultante de deux forces concourantes est représentée en direction et en* grandeur ou *intensité par la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent ces forces en direction et en intensité.*

La première partie de notre démonstration s'appliquera exclusivement à déterminer la direction de la résultante, et nous considérerons d'abord le cas où les deux forces données sont commensurables entre elles.

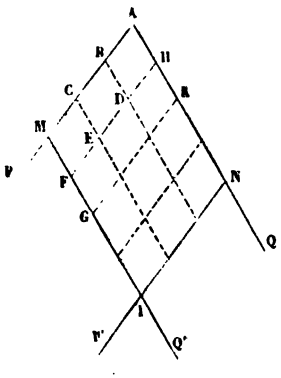
Soient donc P et Q ces forces; A leur point d'application; AM, AN des longueurs respectivement proportionnelles aux intensités de ces forces; m, n deux nombres entiers tels, que l'on ait

$$P : Q :: m : n :: AM : AN.$$

Partageons les longueurs AM et AN respectivement en m et n parties égales : ces diverses parties représenteront des forces dans lesquelles on pourra décomposer à volonté les premières; traçons enfin par des parallèles les losanges égaux ABDH, BCED, etc., dans toute l'étendue du parallélogramme MANI.

Maintenant, les deux forces égales AB, AH peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes au point D de la bissectrice de leur angle, puis respectivement transportées aux points B et H de leurs nouvelles directions; elles seront alors représentées, en grandeur comme en direction, par les côtés BD, HD. En agissant de même sur les deux forces BD, BC, on les transportera sur DE, CE, et, en continuant ainsi, la force AH se trouvera transportée en MF, et la force totale AM sur HF.

Fig. 4.



De même, les forces HK, HF, pourront être transportées sur FG et KG, et ainsi de suite jusqu'à ce que les deux forces AM, AN se trouvent transportées par parties en NI et MI, sans que le

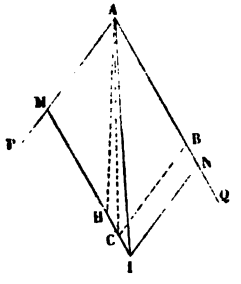
Digitized by Google

système primitif ait été altéré en rien, notamment en ce qui regarde la direction de la résultante. Or, les deux forces MI et NI, qui concourent en I, ont une résultante qui passe au point I, et qui ne diffère pas de celle des deux forces primitives AM et AN, laquelle passait évidemment au point A ; puisqu'elle passe en A et en I, cette résultante est donc dirigée suivant la diagonale du parallélogramme.

8. On peut étendre cette règle au cas des forces incommensurables par la considération des limites, ou bien employer la réduction à l'absurde, comme il suit :

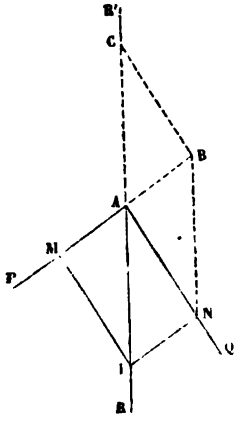
Si la diagonale AI n'est pas la direction de la résultante des forces incommensurables AM, AN, soit AH cette direction. Partageons AM en parties égales plus petites que HI, de manière qu'en portant ces parties sur MI, il tombe au moins un point de division C entre H et I. Menons CB parallèle à AM ; nous obtenons ainsi une force AB qui est commensurable avec AM, et la diagonale AC du parallélogramme MABC donne bien (7) la direction de la résultante de ces deux forces AB et AM. Pour avoir maintenant la résultante totale des deux forces données AM et AN, il faudrait composer cette première résultante dirigée sur AC avec la force BN, et cette nouvelle résultante ne saurait être dirigée que dans l'angle CAN ; donc il est absurde de la supposer dirigée sur AH, ou, comme on le démontrerait de la même manière, sur toute autre ligne différente de la diagonale AI.

Fig. 5.



9. On voit par là que, quel que soit le rapport des forces, leur résultante est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui les représentent. Il nous reste encore à établir que cette diagonale représente précisément en intensité la résultante des deux forces.

Fig. 6.



Pour cela, nous observerons que, si nous supposons appliquée suivant la direction AC, opposée à celle de la diagonale AI, une force égale à la résultante R, il y aura équilibre entre les trois forces P, Q et R ; dans cet état, la force P, par exemple, pourra être considérée (4) comme directement opposée et égale à la résultante des deux autres Q et R, et par con-

Digitized by Google

séquent, en prolongeant MA, on aura la direction de la diagonale d'un parallélogramme dont l'un des côtés sera en direction et grandeur AN, et dont l'autre côté, dirigé suivant AC, représentera la grandeur de la force R. Pour construire ce parallélogramme, il suffira de mener NB parallèle à AC, puis BC parallèle à AN. Mais la ligne AC est égale à la ligne BN, qui est elle-même égale à AI; donc la force R, ou la résultante des forces P et Q, est représentée par la diagonale AI; ce qu'il fallait démontrer.

10. Les deux composantes et leur résultante sont, comme on le voit, respectivement représentées en grandeur par les trois côtés du triangle AMI, dont l'un des angles est le supplément de l'angle des deux composantes et qui peut facilement être construit par les procédés géométriques.

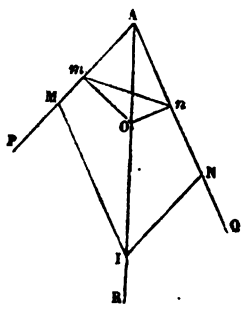
Dans le cas particulier où l'angle des forces est droit, le triangle AMI est rectangle en M, et l'on a la relation remarquable

$$R^2 = P^2 + Q^2,$$

qui permet de calculer facilement l'une des trois forces, quand on connaît les deux autres.

11. En abaissant d'un point quelconque O de la diagonale AI des perpendiculaires Om, On, dont on joint les pieds par la droite mn, on obtient un triangle mOn dont les trois côtés sont proportionnels à ceux du triangle MAI et peuvent, par conséquent, représenter aussi les trois forces P, Q et R.

Fig. 7.



La similitude des triangles repose d'ailleurs sur l'égalité de leurs angles chacun à chacun, parce que, le quadrilatère $mAnO$ étant inscriptible dans une circonférence, l'angle mOn est, comme l'angle AMI, le supplément de l'angle MAN, et l'angle mnO, par exemple, est égal à l'angle mAO comme étant inscrit dans le même arc que lui.

Cette remarque, dont l'utilité ne tardera pas à être mise en évidence, permet d'écrire la proportion composée

$$P : Q : R :: On : Om : mn.$$

On peut en extraire la relation

$$P \times Om = Q \times On,$$

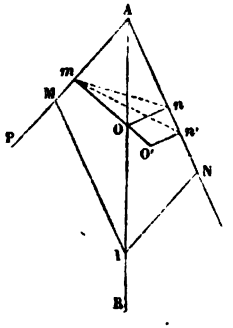
qui montre l'égalité des deux produits que l'on obtient en multipliant chacune des composantes par sa distance au point O de la résultante. Ces produits portent en mécanique le nom de *moments* des forces par rap-

Digitized by Google

port au point O; au moyen de cette dénomination, le théorème dont il s'agit s'énonce d'une manière simple comme établissant *l'égalité des moments des deux composantes par rapport à un point quelconque de la résultante.*

Cette propriété de la résultante est assez importante pour que nous établissions avec soin qu'elle en jouit exclusivement. Supposons en effet que, pour un point O' extérieur à la résultante, on ait la relation

Fig. 8.



$$P \times O'm = Q \times O'n';$$

abaissons On parallèle à O'n', et tirons mn et mn'. Le point O étant sur la résultante, on a l'égalité

$$P \times Om = Q \times On,$$

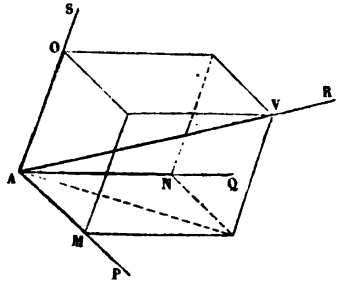
qui, combinée avec la première, donne

$$O'm : Om :: O'n' : On.$$

Or, les angles mOn, $mO'n'$ sont égaux comme correspondants; les deux triangles mOn, $mO'n'$ sont donc semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels et les angles Omn, Omn' sont égaux, ce qui ne peut être qu'autant que mn' se confond avec mn; alors $n'O'$ coïncide avec nO, et le point O' tombe en O, ce qui est contre l'hypothèse; donc le point O', et plus généralement un point quelconque, ne peut jouir de la propriété en question qu'autant qu'il est situé sur la direction de la résultante des deux forces.

12. Pour composer en une seule trois forces P, Q, S, concourantes et non situées dans le même plan, on cherche d'abord la résultante de deux d'entre elles, P et Q, par la construction du parallélogramme; puis, on compose de la même manière cette résultante partielle AT avec la troisième des forces données S; on trouve ainsi la résultante AV ou R, et il est facile de voir que cette construction donne précisément la diagonale d'un parallélépipède construit sur les forces données comme arêtes.

Fig. 9.



Quand les angles que font entre elles les directions des trois forces données sont droits, le parallélépipède est rectangulaire et, par une pro-

Digitized by Google

priété géométrique connue, on a

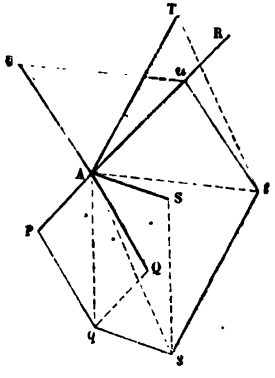
$$\overline{AV}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{AO}^2.$$

ou

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2.$$

13. S'il s'agit de composer entre elles un nombre quelconque de forces P, Q, S, T, U, issues d'un même point A et situées soit dans le même plan, soit dans des plans différents, la marche à suivre consiste à composer d'abord la première AP avec la seconde AQ en une résultante Aq que l'on compose avec la troisième force AS, et ainsi de suite jusqu'à la dernière AU, qui servira à déterminer la résultante Au ou R de tout le système.

Fig. 10.



Pour ne conserver de cette construction que ce qui est indispensable à la détermination de la résultante cherchée, il suffit évidemment de mener Pq égale et parallèle à AQ, qs égale et parallèle à AS, st égale et parallèle à AT; enfin, dans le cas de la figure ci-dessus, on tirera tu égale et parallèle à AU, et l'on joindra l'extrémité u au point d'application A. On obtiendra ainsi un polygone plan ou gauche AP$qstu$, dont le dernier côté Au représentera en grandeur et en direction la résultante des forces données.

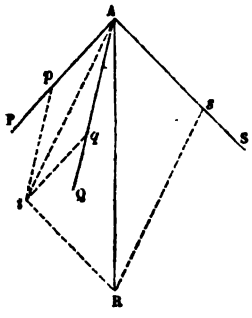
S'il arrivait que le polygone ainsi construit se fermât de lui-même par la coïncidence du point extrême u avec le point donné A, cette circonstance apprendrait évidemment que, la résultante Au des forces du système étant nulle, ces forces sont en équilibre.

14. Le problème de la décomposition d'une force donnée en deux autres passant par un même point de sa direction et situées avec elle dans un même plan, se résout, comme celui de la composition, par la construction d'un parallélogramme dans lequel on connaît ici la diagonale et la direction des deux côtés concourants. Par une construction analogue, on obtiendra le parallélépipède dont la diagonale, connue de grandeur et de position, représente la résultante de trois forces concourantes dans lesquelles on veut la décomposer; mais quand il s'agit de décomposer une force donnée en plus de deux autres dans un plan, ou en plus de trois dans l'espace, le problème est complétement indéterminé; nous allons mettre cette indétermination en évidence pour le cas le plus simple, celui d'une force R qu'il s'agirait de décomposer en trois autres situées avec elle dans un même plan et dirigées suivant les lignes AP, AQ et AS. Or, il est

Digitized by Google

évident que, si nous prenons sur la direction AS, par exemple, une force quelconque As, nous pourrons, par la construction du parallélogramme AsRt, trouver une seconde force At qui, composée avec As, donne pour résultante la force donnée R ; nous décomposerons alors la nouvelle force At suivant les directions AP et AQ ; de la sorte, la force R sera bien la résultante des trois forces Ap, Aq et As, et, cette dernière ayant été prise arbitrairement sur l'une quelconque des trois directions données, il est clair que le problème proposé est susceptible d'une infinité de solutions.

Fig. 11.



15. Au moyen de la décomposition des forces concourantes en trois autres, on peut ramener la recherche de la résultante d'un nombre quelconque de forces qui passent par le même point à la composition de trois forces rectangulaires ; pour cela, on fait passer par le point commun trois droites quelconques que, d'ordinaire et pour plus de commodité, on prend rectangulaires entre elles ; on décompose chacune des forces données en trois composantes dirigées suivant ces trois droites auxiliaires, et l'on réduit ainsi tout le système à trois forces rectangulaires que l'on compose facilement, soit par le parallélépipède des forces, soit par l'usage de la formule

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2,$$

dans laquelle P, Q, S représentent les sommes des composantes respectivement réunies en une seule sur chacun des trois axes.

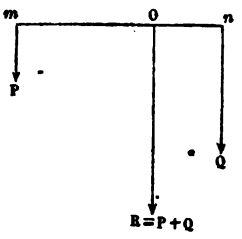
COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

16. La composition de deux forces parallèles appliquées à un corps solide se déduit de la manière la plus simple, comme cas limite, de celle de deux forces concourantes. On a vu, en effet (11), que lorsqu'il s'agissait de deux forces passant par un même point, les deux composantes et la résultante étaient respectivement représentées par les côtés d'un triangle mOn formé en abaissant d'un point quelconque de la résultante des perpendiculaires sur les directions des composantes, et en joignant les pieds de ces deux perpendiculaires. Or, cette propriété est tout à fait indépendante de l'angle que font entre elles les deux forces données P et Q ; l'angle mOn étant le supplément de MAN, cet angle augmente à mesure que celui-ci diminue, et à la limite, quand le dernier devient nul, c'est-à-dire quand les composantes P et Q sont parallèles, l'angle mOn est égal

Digitized by Google

à deux angles droits; le point O est toujours un point de la résultante, laquelle passe par le point de concours des composantes et, par conséquent, leur est parallèle; en outre, la relation

Fig. 12.



$$P : Q : R :: On : Om : mn$$

ne cesse pas d'exister, de telle sorte que, d'une part, mn étant égal à $Om + On$, on a

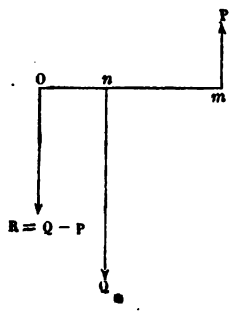
$$R = P + Q,$$

et que, de l'autre, chacune des trois forces est représentée en grandeur par la distance des points d'application des deux autres.

On conclut donc immédiatement cette règle : *La résultante de deux forces parallèles et de même sens leur est parallèle, est de même sens que chacune d'elles, égale à leur somme et située entre elles et dans le même plan; ses distances aux deux composantes sont dans le rapport inverse des intensités de ces forces.*

17. Nous avons fait tourner la force AP et sa perpendiculaire mO autour du point O jusqu'à ce que cette perpendiculaire vînt se placer dans le prolongement de On. Le même mouvement peut s'opérer en sens contraire, jusqu'à ce que le point m vienne encore se placer sur la direction On, mais de l'autre côté du point n. A ce moment, les deux forces P et Q sont encore parallèles, mais elles agissent en sens contraire; leur résultante n'a pas cessé de passer par le point O et par leur point de concours, lequel, après s'être rapproché du point n jusqu'au moment où mO a rencontré la direction nA, s'en est ensuite éloigné rapidement jusqu'à l'infini. Cette résultante est donc encore parallèle aux deux composantes; pendant tout le mouvement, elle n'a pas cessé d'agir du point de rencontre vers le point O; elle agit donc dans le sens de la plus grande force Q, quand le point de rencontre est à l'infini, et, de plus, la relation

Fig. 13.



$$P : Q : R :: On : Om : mn$$

est encore vraie à cette limite; d'où il résulte que, mn étant égal à $Om - On$, on a aussi

$$R = Q - P.$$

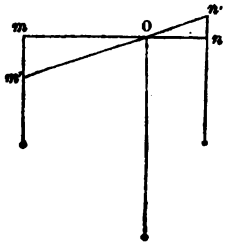
Chacune des trois forces est d'ailleurs, comme dans le premier cas, représentée par la distance des points d'application des deux autres.

Digitized by Google

De là ce second théorème : *La résultante de deux forces parallèles et de sens contraires leur est parallèle, est égale à leur différence, de même sens que la plus grande, située dans le même plan avec elles et au delà de la plus grande par rapport à la plus petite ; ses distances aux deux composantes sont en raison inverse des intensités de ces forces.*

Remarque. — Les distances mO, nO et mn que nous avons mesurées sur une perpendiculaire à la direction commune des forces sont nécessairement proportionnelles à celles $m'O$, $n'O$ et $m'n'$ qui seraient prises sur une droite d'une inclinaison quelconque, en sorte qu'il est loisible de remplacer, dans les deux énoncés qui précèdent, les perpendiculaires par les portions correspondantes d'une droite inclinée sur la direction des forces ; en d'autres termes, l'inclinaison commune des forces données sur la droite qui unit leurs points d'application n'influe en rien sur la grandeur et la position de leur résultante.

Fig. 14.



18. L'égalité établie au n° 11 entre les moments des deux forces concourantes par rapport à un point de leur résultante, subsiste encore pour les forces parallèles ; car la proportion $P : Q :: On : Om$ donne toujours

$$P \times Om = Q \times On,$$

et cette relation est d'un usage commode pour fixer dans l'esprit la position de la résultante de deux forces parallèles données.

19. Dans le cas de deux forces parallèles et de sens contraires, le point d'application de la résultante s'obtient, avons-nous dit, au moyen de la proportion

$$P : Q : R :: On : Om : mn,$$

laquelle donne

$$On = \frac{P}{R} \times mn = \frac{P}{Q - P} \times mn.$$

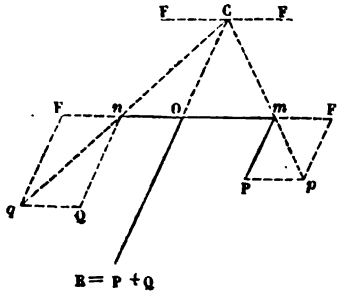
Cette quantité devient infinie, si l'on suppose que les deux forces Q et P se rapprochent en intensité jusqu'à devenir égales entre elles, et leur résultante elle-même est nulle. Ce résultat singulier de la formule montre qu'on ne peut assigner ni la grandeur, ni la position d'une force capable de remplacer un système de deux forces parallèles, égales et de sens contraires ; ce qui revient à dire qu'un pareil système, considéré par quelques auteurs, sous le nom de *couple,* comme un élément essentiel de la mécanique, n'a point de résultante.

20. Le théorème de la composition de deux forces parallèles que nous avons établi comme cas limite des forces concourantes et comme consé-

Digitized by Google

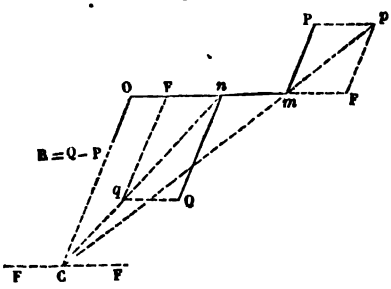
quence immédiate de la règle du parallélogramme des forces, peut se vérifier et, au besoin, se démontrer d'une autre manière assez simple ; mais, tout en s'appuyant aussi sur la composition des forces qui passent par le même point, cette méthode perd l'avantage de montrer l'enchaînement et la connexité des deux ordres d'idées. Voici comment elle procède :

Fig. 15.



Aux deux points d'application m et n, on applique dans la direction de la droite mn deux forces F quelconques, égales, et dont l'introduction ne change, par conséquent, rien au système ; on compose par la règle du parallélogramme, d'une part les forces F et P, d'autre part les forces F et Q, et les deux résultantes se rencontrent au point C, où l'on peut les supposer transportées. Là on décompose chacune de ces résultantes parallèlement aux directions de ses composantes primitives ; on retrouve ainsi les deux forces F qui se détruisent, et il reste, dirigées suivant CO et transportées, si l'on veut, au point O, deux forces respectivement égales aux deux forces P et Q ; la résultante de ces deux forces, laquelle n'est autre chose que celle des deux forces parallèles données, est égale à leur somme ou à leur différence, suivant que celles ci étaient de même sens ou de sens contraires.

Fig. 16.



Maintenant les triangles semblables Qnq et nOC, Pmp et mOC donnent les proportions

$$nO : OC :: Qq : Qn :: F : Q,$$
$$mO : OC :: Pp : Pm :: F : P,$$

dont les moyens sont les mêmes. Les extrêmes forment, par conséquent, la nouvelle proportion

$$P : Q :: nO : mO,$$

qui n'est autre chose que celle précédemment trouvée et qui, comme elle, peut s'écrire sous la forme

$$P : Q : P + Q \quad \text{ou} \quad R :: nO : mO : nO + mO \quad \text{ou} \quad mn.$$

Digitized by Google

21. Lorsqu'un corps solide est soumis à des forces parallèles, en nombre quelconque et situées dans un même plan ou dans des plans différents, on peut considérer d'abord toutes les forces P, P', P'', etc., qui tirent dans un sens, composer P avec P', la résultante avec P'', et ainsi de suite. En opérant de la même manière sur les forces Q, Q', Q'', etc., qui agissent en sens contraire, on réduit tout le système à deux résultantes partielles qui sont de sens contraires, parallèles et égales chacune à la somme des forces qui agissent dans le même sens qu'elle. Il reste alors à composer ces deux forces en une seule par la méthode connue, et l'ensemble de ces opérations conduit à la règle générale qui suit :

Autant de forces parallèles que l'on voudra sont réductibles à une résultante unique qui leur est parallèle, est égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens sur la somme de celles qui tirent en sens contraire, et agit dans le sens de la plus grande somme.

Il est d'ailleurs entendu que, s'il arrivait que les deux sommes de forces fussent égales, le système donné serait en équilibre de lui-même ou n'aurait pas de résultante unique (19), selon que ces deux sommes partielles seraient ou ne seraient pas directement opposées.

22. C'est ici le lieu de signaler une propriété remarquable du point d'application de la résultante d'un système de forces parallèles. Nous avons dit (17, Rem.) pour deux forces, et il est facile de voir que cela est encore vrai pour un nombre quelconque, que la grandeur et la position de leur résultante ne dépendent aucunement de l'inclinaison absolue des forces, mais seulement de la position de leurs points d'application et des rapports de leurs intensités; d'où l'on peut conclure que, quand on a déterminé le point d'application de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, de mêmes sens ou de sens contraires, on peut, sans que ce point d'application varie, changer l'intensité des forces et l'inclinaison générale de leur système, pourvu que ces forces restent parallèles entre elles, appliquées dans le même sens aux mêmes points, et que leurs intensités conservent les mêmes rapports.

Ce point, qui est spécialement regardé comme le point d'application de la résultante, porte, à cause de la propriété importante que nous venons d'exposer, le nom de *centre des forces parallèles*.

Remarque. — Il est évident qu'en rendant fixe le centre des forces parallèles d'un système, il y aura équilibre, quelle que soit la position du système autour de ce centre, puisque, dans toutes les positions, la résultante passera par ce point et sera, par conséquent, détruite.

23. Le problème inverse de la composition de deux forces parallèles en une seule a pour objet de décomposer une force donnée R en deux autres qui lui soient parallèles, et appliquées en deux points déterminés m et n d'une droite passant par son point d'application O. La solution de

Digitized by Google

cette question consiste tout simplement à partager la force donnée en deux parties proportionnelles aux distances Om, On des points donnés à son point d'application, et à répartir ces deux composantes de manière à satisfaire à la relation connue

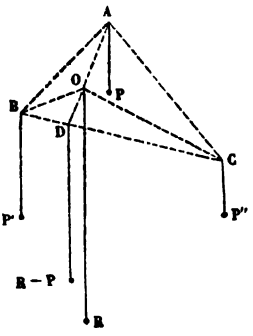
$$P \times Om = Q \times On,$$

en ayant égard au sens dans lequel il convient d'appliquer ces forces en raison de leur position par rapport à la résultante.

24. Par un raisonnement semblable à celui du n° 14, nous montrerions que la décomposition d'une force donnée en trois autres, parallèles entre elles et à la première, et situées avec elles dans le même plan, peut se faire d'une infinité de manières; mais cette indétermination disparaît quand les trois points d'application donnés sont dans un plan qui ne contient pas la direction de la force et ne lui est pas parallèle.

Soit, en effet, O le point d'application de la force R, situé dans le plan des trois points A, B, C, où doivent être respectivement appliquées les trois composantes cherchées; formons le triangle ABC et joignons le point O à l'un quelconque A des sommets; soit D le point de rencontre de OA avec le côté opposé; nous décomposerons d'abord la force donnée R en deux composantes, l'une P appliquée en A, l'autre R — P en D; puis cette dernière R — P en deux autres P′ et P″ respectivement appliquées en B et C.

Fig. 17.



Le rapport entre ces trois forces peut d'ailleurs être établi d'une manière à la fois simple et remarquable; car la première décomposition nous donne

$$R : P :: AD : OD,$$

et, si l'on tire les droites OB, OC, on voit que les lignes AD et OD sont proportionnelles aux hauteurs et par conséquent aux aires des triangles ABC et BOC, qui ont la même base BC.

En opérant de même à l'égard des deux autres sommets B et C, on obtiendrait évidemment les deux dernières des trois proportions suivantes :

$$R : P :: ABC : BOC,$$
$$R : P' :: ABC : AOC,$$
$$R : P'' :: ABC : AOB,$$

lesquelles peuvent se grouper comme il suit :

$$R : P : P' : P'' :: ABC : BOC : AOC : AOB.$$

Digitized by Google

et établissent que, *si l'on représente la force donnée par l'aire du triangle que déterminent les points d'application donnés des composantes, chacune de ces trois forces sera elle-même représentée par le triangle obtenu en joignant le point d'application de la résultante à ceux des deux autres composantes.*

25. Si le point O tombait en dehors du triangle ABC, la même décomposition pourrait encore s'effectuer; seulement, les triangles obtenus en joignant ce point successivement avec deux quelconques des points d'application donnés, ne seraient plus à l'intérieur du triangle ABC, et leur somme ne serait plus égale à l'aire de ce triangle, de même que la résultante ne serait plus égale à la somme des composantes. En général, suivant la position du point O, il y aurait dans ce cas *une* ou *deux* composantes de même sens que la force donnée et *deux* ou *une* de sens contraire; la différence entre la somme des forces agissant dans le même sens que la résultante et la somme de celles qui agissent en sens contraire, serait égale à cette force R, de même que l'aire du triangle ABC serait elle-même égale à l'excès de la somme des aires correspondantes aux premières forces sur la somme des aires correspondantes aux secondes.

Nous laissons au lecteur le soin de faire cette discussion qui, après ces indications, ne présente aucune difficulté.

26. On voit que le problème qui a pour but de décomposer une force donnée R en trois autres forces parallèles passant par trois points donnés, est entièrement déterminé; il est facile de voir que, si l'on donnait plus de trois points, il y aurait, au contraire, indétermination. En effet, on pourrait appliquer à tous les points donnés, excepté trois d'entre eux, des forces arbitraires quant à leur grandeur et au sens dans lequel elles agiraient; ces forces, composées par la règle du n° 21, donneraient lieu à une force unique que nous désignerons par R'. On décomposerait ensuite la force donnée R en deux forces, dont l'une fût R'; désignant l'autre par R'', il faudrait la considérer comme la résultante de trois forces passant par les derniers points, ce qui, d'après ce qu'on vient de voir, déterminerait complétement ces forces.

Ainsi, en général, quand on donnera un nombre m de points, les forces seront arbitraires pour $m - 3$ de ces points pris à volonté, et celles qui passeront par les trois autres seront ensuite déterminables en fonction de ces forces arbitraires.

COMPOSITION DES FORCES DIRIGÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

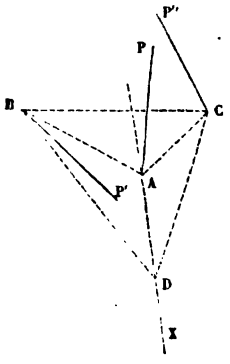
27. Chercher à composer un système de forces qui sont appliquées à un corps solide dans des directions quelconques, c'est chercher à les ra-

Digitized by Google

mener soit à une résultante unique, soit, en cas d'impossibilité, au groupe de forces équivalent le plus simple possible.

Soient donc F l'une des forces données et A, B, C trois points choisis arbitrairement, non en ligne droite, dans l'intérieur du corps, ou au moins liés invariablement avec lui. Si l'on joint le point d'application de la force F à chacun des trois points A, B, C, on pourra décomposer cette force par la règle du parallélépipède en trois forces dirigées suivant ces trois droites, et transporter ensuite le point d'application des trois composantes aux points A, B, C, respectivement situés sur leur direction.

Fig. 18.



Après avoir agi de la même manière à l'égard des autres forces F', F'', etc., du système, on aura obtenu en chacun des points A, B, C, un certain nombre de composantes formant trois groupes réductibles chacun à une force unique; soient P, P', P'' ces trois dernières qui remplacent toutes les forces primitives.

Ce nouveau système peut lui-même être simplifié. Faisons passer un plan par la force P' et la ligne AB; puis, un second par la force P'' et la droite CA; ces deux plans se couperont suivant une ligne AX dont nous joindrons un point quelconque D aux points B et C. Dans cet état, chacune des forces P' et P'' pourra se décomposer en deux autres, la première suivant BA et BD, la seconde suivant CA et CD. De ces quatre composantes, celles dirigées sur BA et CA se transporteront en A, où elles se composeront avec la force P qui y est appliquée; celles dirigées sur BD et CD pourront être appliquées en D et s'y composer en une seule, si ce dernier point est, comme le point A, supposé pris dans l'intérieur du corps ou au moins lié invariablement avec lui.

On aura donc ainsi ramené le système des forces P, P', P'', et, par conséquent, celui des forces données F, F', F'', etc., à deux forces, l'une passant par le point A pris arbitrairement, et l'autre par le point D; donc enfin, *un système quelconque de forces appliquées à un corps solide peut toujours se réduire à deux forces, dont l'une passe par un point donné arbitrairement dans le corps ou lié invariablement avec lui.*

S'il arrivait que les deux forces appliquées en A et D se trouvassent dans un même plan, elles se composeraient en une force unique qui serait la résultante générale du système donné, à moins qu'elles ne fussent égales, parallèles et de sens contraires, auquel cas elles se feraient équilibre ou n'auraient pas de résultante (19), selon qu'elles seraient ou non directement opposées.

Digitized by Google

28. Une fois ramené à ces termes, le système proposé n'est plus susceptible de simplification; car deux forces L et M non situées dans le même plan ne sauraient se réduire à une résultante unique. Il est bon, toutefois, de remarquer que l'ensemble des deux forces auxquelles ont été ramenées les forces primitives F, F', F'', etc., n'est aucunement déterminé, puisque nous avons pris arbitrairement non-seulement les trois points A, B et C, mais encore le point D de la droite AX; il existe donc une infinité de systèmes de deux forces non situées dans le même plan auxquels peut être réduit un système de forces appliquées à un corps solide, aussi nombreuses qu'on le veut et dirigées d'une manière quelconque, pourvu que les points d'application des deux forces dont il s'agit fassent partie du corps ou soient invariablement liés avec lui; l'un A de ces deux points d'application peut d'ailleurs être, sous cette réserve, choisi tout à fait arbitrairement.

29. Le complément naturel de ce qui précède serait l'établissement des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de forces données soit en équilibre, dans les cas où ces forces sont concourantes, parallèles, ou dirigées d'une manière quelconque dans l'espace; mais cette recherche nous entraînerait nécessairement au delà des limites et des exigences du programme, et nous nous bornerons à poser plus loin ces conditions pour les cas particuliers spéciaux à chacune des machines simples que nous aurons bientôt à étudier.

DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ.

30. Tous les corps abandonnés à eux-mêmes prennent un mouvement vers le centre de la terre, dans une direction qui est, en chaque lieu, perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles et qu'on nomme *verticale*. La cause de ce phénomène, c'est-à-dire la force qui sollicite tous les corps suivant la verticale, est la *pesanteur* ou *gravité*, et, eu égard à la grandeur du rayon terrestre, ainsi qu'à des expériences directes, on peut considérer comme rigoureusement parallèles toutes les verticales d'un même lieu, en restreignant toutefois ce principe à des étendues relativement peu considérables.

La pesanteur sollicite les parties intérieures des corps comme les parties extérieures; il faut faire le même effort pour supporter un corps entier ou toutes les parties dans lesquelles on le divise, et, s'il est creux, les corps que l'on y renferme exercent le même effort que s'ils étaient placés à l'extérieur : c'est donc avec raison qu'on regarde cette force comme agissant sur toutes les parties qui composent les corps.

En appliquant la théorie des forces parallèles de même sens à celles qui proviennent de la pesanteur, on reconnaît d'abord qu'elles ont une résultante qui leur est parallèle et est égale à leur somme; on l'appelle le

Digitized by Google

poids du corps. En second lieu, cette résultante a son point d'application indépendant de la direction des forces relativement au corps; c'est le centre des forces parallèles produites par la gravité : on lui donne le nom de *centre de gravité*. On peut donc définir le centre de gravité d'un corps en disant que c'est *le point par lequel passe constamment la résultante des poids de toutes les parties ou molécules, quelle que soit la position que prenne le corps par rapport à la direction verticale de tous ces poids.*

Il est bon de remarquer que les molécules d'un corps peuvent être disposées de telle sorte que le centre de gravité, tel qu'il vient d'être défini, soit situé au dehors du corps lui-même, comme cela arrive notamment dans le solide appelé *tore* que produit la révolution d'un cercle autour d'un axe fixe situé dans son plan; on conçoit qu'alors le point fictif auquel est donné le nom de centre de gravité ne peut entrer dans les considérations qui vont suivre, qu'autant qu'il est supposé invariablement lié au système.

Sous cette réserve, le centre de gravité d'un corps peut encore être considéré comme un point auquel toute la masse est concentrée, et auquel est appliquée une force égale et parallèle au poids; il en résulte qu'un corps pesant est nécessairement en équilibre dans toutes les positions qu'on lui donne autour de son centre de gravité, quand on rend ce centre fixe.

Enfin, quand on suspend un corps par un fil et qu'on attend que ce corps soit en équilibre, la direction du fil passe par le centre de gravité; car la tension du fil, qui agit évidemment dans la direction de celui-ci, ne peut détruire le poids du corps qu'autant qu'elle lui est égale et directement opposée et que, par conséquent, elle passe par le centre de gravité.

Si donc on suspend successivement un corps par deux de ses points, la rencontre des deux directions verticales du fil à travers le corps donne le centre de gravité; de là résulte un *moyen mécanique de déterminer le centre de gravité d'un corps.*

31. Lorsque la matière qui compose le corps est homogène, les volumes égaux ont des poids égaux, et si la matière de deux corps homogènes n'est pas la même, le poids est également différent pour des volumes égaux; le poids de l'unité de volume d'une substance homogène s'appelle son *poids spécifique.*

32. Quoique les surfaces et les lignes ne puissent avoir de poids, puisqu'elles ne sont que des limites et ne renferment aucune partie matérielle, on les considère néanmoins comme ayant un centre de gravité. On suppose alors qu'elles sont soumises en tous leurs points à l'action de forces parallèles qui, dans le cas de l'homogénéité, donnent des résultantes égales pour des parties équivalentes, et c'est par analogie qu'on nomme centre de gravité le centre de ces forces parallèles.

Nous ne considérerons ici que les lignes, les surfaces et les corps ho-

Digitized by Google

mogènes; réduite à ces termes, la recherche des centres de gravité n'est plus, à proprement parler, qu'une question de Géométrie, puisque les poids, réels ou fictifs, sont proportionnels aux longueurs, aux aires et aux volumes. Dans cette recherche, nous nous appuierons sur les lemmes suivants, qui sont des conséquences trop évidentes de la théorie des forces parallèles pour que nous devions entrer dans les détails de leur démonstration.

1°. *Toute figure décomposable en plusieurs parties ayant toutes leur centre de gravité sur une ligne droite ou dans un plan déterminés, a son centre de gravité sur cette droite ou dans ce plan.*

2°. *Toute figure symétrique par rapport à un plan ou à un axe, a son centre de gravité dans ce plan ou sur cet axe.*

3°. *Toute figure qui, sans être symétrique par rapport à un plan ou à un axe, est cependant décomposable en parties qui, deux à deux, aient des poids égaux et soient tellement placées, que la ligne joignant leurs centres de gravité soit partagée par ce plan ou par cet axe en deux parties égales, a elle-même son centre de gravité dans ce plan ou sur cet axe.*

4°. *Toute figure qui a un centre géométrique a son centre de gravité en ce point.*

CENTRE DE GRAVITÉ DES LIGNES.

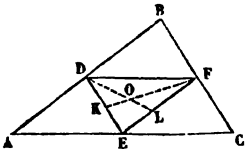
33. Le centre de gravité d'une ligne droite de grandeur déterminée est au milieu de sa longueur; ce fait, évident par lui-même, se conclut d'ailleurs des lemmes précédents.

Pour trouver le centre de gravité d'un système de deux droites, on joint les centres de gravité, c'est-à-dire les milieux de ces droites; puis on divise la droite ainsi obtenue en parties réciproquement proportionnelles aux poids fictifs des droites, c'est-à-dire à leurs longueurs.

Pour trois ou un nombre quelconque de droites formant ou non un polygone et situées ou non dans le même plan, on détermine de même le centre de gravité, en considérant chaque droite comme un poids proportionnel à sa longueur et appliqué en son milieu, et en opérant comme pour la composition des forces parallèles.

Soit à chercher, comme exemple, le centre de gravité du contour d'un triangle ABC. Le centre de gravité des deux côtés AB, AC sera sur la ligne DE qui joint leurs milieux et en un point K tel, que l'on ait

Fig. 19.



$$KE : KD :: AB : AC.$$

D'ailleurs les triangles ABC et DEF sont semblables, puisqu'ils ont les angles respectivement égaux; ils fournissent donc

$$AB : AC :: FE : FD.$$

Digitized by Google

Cette nouvelle proportion, combinée avec la première, donne

$$KE : KD :: FE : FD,$$

et, par suite, la ligne KF est la bissectrice de l'angle DFE.

Si l'on composait maintenant la résultante appliquée en K avec le poids du côté BC, lequel est appliqué en F, la résultante définitive serait placée quelque part sur la ligne FK, et l'on conclurait de même, par une composition faite dans un autre ordre, que le point d'application de cette résultante, ou le centre de gravité cherché, se trouve également sur la bissectrice DL de l'angle EDF; donc il se trouve à la rencontre O des deux lignes KF et DL; donc enfin, *le centre de gravité du contour d'un triangle est le centre du cercle inscrit à un second triangle qu'on obtient en joignant deux à deux les milieux des côtés du premier.*

34. Le centre de gravité du contour d'un triangle équilatéral, d'un carré, et, en général, d'un polygone régulier, est en son centre de figure. Il en est de même d'un rectangle et d'un parallélogramme, qui ont pour centre de figure le point de rencontre de leurs diagonales, en ce sens que toute droite passant par ce point et limitée au périmètre, y est partagée en deux portions égales. Ces propriétés sont des applications des lemmes posés à la fin du n° 44, et s'établiraient d'ailleurs sans difficulté par la méthode que nous venons d'employer pour le triangle.

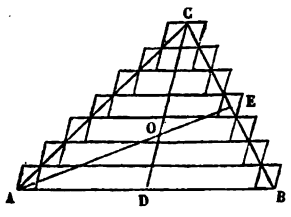
On en conclut aussi que le centre de gravité du système des arêtes d'un parallélépipède quelconque est au point de rencontre de ses diagonales. Enfin, les courbes centrées, telles que le cercle, l'ellipse, etc., ont aussi leur centre de gravité en leur centre de figure (32).

CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES.

35. *Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est situé sur la droite qui joint un sommet quelconque au milieu du côté opposé, au tiers de la hauteur à partir de la base, ou aux deux tiers à partir du sommet.*

Soit, en effet, ABC un triangle quelconque; joignons le sommet C au milieu D du côté opposé AB; partageons la surface du triangle en un grand nombre de bandes très-minces par des parallèles à la base, et, par les points où ces parallèles coupent les côtés AC, BC, menons des parallèles à CD. Nous construirons ainsi deux séries de parallélogrammes, les uns intérieurs au triangle et formant une somme d'aires moindre que celle du-

Fig. 20.



Digitized by Google

dit triangle ; les autres excédant et formant, par conséquent, une somme plus grande.

Or, tous ces parallélogrammes ont leurs centres de gravité sur la ligne CD (34), et chacun des deux groupes de parallélogrammes a, par conséquent, son centre de gravité sur cette même ligne. On conçoit alors que, cette vérité ne cessant pas d'exister quelque grand que soit le nombre des parallélogrammes, elle soit encore applicable au cas où les deux groupes, qui comprennent toujours entre eux l'aire du triangle, viennent se confondre avec cette aire ; par suite, on peut dire que le triangle lui-même a son centre de gravité sur la ligne CD.

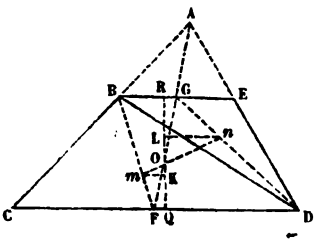
Il serait tout aussi facile de faire voir que ce centre de gravité se trouve également sur la ligne AE qui joint le sommet A au milieu E du côté BC ; donc il est au point d'intersection O de ces deux lignes, et la Géométrie élémentaire nous apprend que ce point est réellement situé au tiers de chaque hauteur à partir de la base correspondante, ce qui prouve le théorème énoncé.

Remarque. — Le centre de gravité d'un triangle est le même que celui d'un système de trois sphères égales et homogènes qui auraient leurs centres aux trois sommets. En effet, en composant les poids des sphères A et B, on aura un poids double agissant en D, et, pour composer ce poids double en D avec un poids simple en C, il faudra prendre DO égal à la moitié de OC, ce qui donne précisément le centre de gravité du triangle.

36. Dans un carré, un rectangle, un parallélogramme, un polygone régulier quelconque, un cercle, une ellipse, un parallélépipède quelconque, une sphère, le centre de gravité de la surface est au centre de figure (32, lemme 4°).

37. Le centre de gravité de l'aire du trapèze s'obtient facilement, quand on sait trouver celui du triangle.

Fig. 21.



Si l'on prolonge, en effet, les côtés concourants du trapèze BCDE jusqu'à leur rencontre au point A, on forme deux triangles ACD, ABE, dont la différence est le trapèze lui-même, et qui, tous deux, ont leur centre de gravité sur la droite AGF passant par le sommet commun A et par les milieux G et F des côtés parallèles. Comme dans le cas du triangle, le trapèze BCDE a aussi son centre de gravité sur la ligne GF.

Pour avoir une seconde droite qui contienne également le centre de gravité cherché, et dont la rencontre avec la première détermine ce point,

Digitized by Google

menons la diagonale CD, et décomposons ainsi le trapèze en deux triangles BCD, BDE, dont l'un a son centre de gravité en m, au tiers de la hauteur h du trapèze, l'autre en n aux deux tiers de cette hauteur, à partir de la base inférieure; le centre de gravité du trapèze est donc aussi situé sur la droite mn, c'est-à-dire à la rencontre O de cette ligne avec GF.

Cette construction est sans doute fort simple; mais il est d'usage d'en donner une autre assez remarquable dont la démonstration ressort du calcul suivant : Cherchons à exprimer, en fonction de la hauteur h du trapèze et des deux bases CD, BE que, pour plus de simplicité, nous appellerons B et b, les distances x et y du centre de gravité O à la base inférieure et à la base supérieure. Le point O étant le point d'application de la résultante de deux forces parallèles appliquées en m et n, lesquelles forces, égales aux aires des triangles de même hauteur BCD, BDE, sont proportionnelles aux bases B et b de ces triangles, les longueurs mO et On, ou leurs projections OK et OL sur la hauteur RQ, sont dans un rapport inverse avec ces bases, et l'on a la proportion

$$\text{OK} : \text{OL} :: b : \text{B},$$

de laquelle il est facile de déduire celle-ci :

$$\text{OK} : \text{OL} : \text{OK} + \text{OL} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{3} :: b : \text{B} : b + \text{B}.$$

Or, de cette relation on tire successivement

$$\text{OK} \quad \text{ou} \quad x - \frac{h}{3} = \frac{h}{3} \times \frac{b}{\text{B} + b}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{h}{3} \times \frac{2b + \text{B}}{\text{B} + b},$$

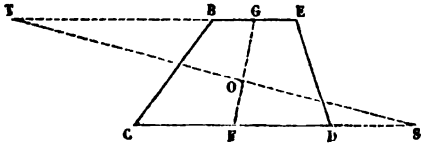
$$\text{OL} \quad \text{ou} \quad y - \frac{h}{3} = \frac{h}{3} \times \frac{\text{B}}{\text{B} + b}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{h}{3} \times \frac{2\text{B} + b}{\text{B} + b};$$

et enfin, par division,

$$\frac{x}{y} = \frac{2b + \text{B}}{2\text{B} + b}.$$

Maintenant, ce rapport étant connu et la ligne GF tracée, portons sur le prolongement de CD la longueur DS égale à BE ou b; puis, en sens contraire, sur le prolongement de BE, portons BT égale à CD ou B, et tirons TS; le point O de rencontre de cette ligne avec GF sera le centre de gravité cherché, car on aura

Fig. 22.

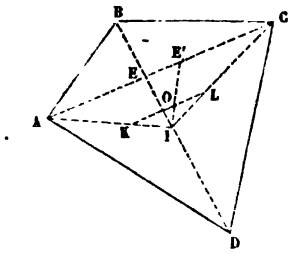


$$x : y :: \text{OF} : \text{OG} :: \text{FS} : \text{GT} :: \frac{\text{B}}{2} + b : \frac{b}{2} + \text{B} :: \text{B} + 2b : b + 2\text{B}.$$

Digitized by Google

38. Supposons qu'il s'agisse de trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque ABCD; nous mènerons les deux diagonales AC et BD, ainsi que les droites AI et CI, qui vont des sommets A et C au point I, milieu de la diagonale BD. Le centre de gravité du triangle ABD sera en K, au tiers de AI (35), à partir du point I; celui du triangle BCD sera de même en L, et celui du quadrilatère sera par conséquent en un point O de la droite KL, point que l'on déterminera en posant

Fig. 23.



$$KO : OL :: \text{triang. BCD} : \text{triang. ABD}.$$

Or, les deux triangles BCD, ABD, ayant même base BD, sont entre eux comme leurs hauteurs, ou comme les lignes CE et AE qui sont proportionnelles aux hauteurs; nous avons donc, en substituant,

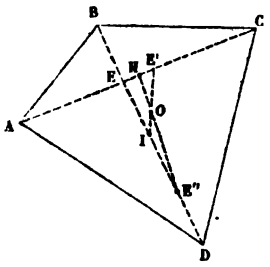
$$KO : OL :: CE : AE.$$

Si maintenant nous prenons $AE' = CE$, et que nous tirions IE', cette ligne, par son intersection avec KL, déterminera le point O; car, à cause des parallèles KL et AC, nous aurons

$$KO : OL :: AE' : E'C :: CE : AE.$$

Cette construction peut être rendue plus symétrique en remarquant qu'on aurait pu raisonner de la même manière sur les triangles ABC et ADC, qui ont pour base commune la diagonale AC, et l'on est amené à conclure que, si l'on joignait le milieu H de AC avec le point E" pris sur BD, de façon que la longueur BE" fût égale à DE, la ligne ainsi obtenue contiendrait aussi le centre de gravité du quadrilatère; de là, la construction fort simple représentée dans la figure ci-contre et exprimée ci-après : *Pour trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque, menez ses diagonales, qui se couperont généralement en parties inégales; sur chacune d'elles, à partir d'un sommet, prenez une longueur égale à la partie qui correspond au sommet opposé; joignez le point ainsi obtenu au milieu de l'autre diagonale : les deux lignes ainsi tracées détermineront, par leur intersection, le centre de gravité cherché.*

Fig. 24.



Remarque. — Cette construction ne donnerait plus rien, si l'une des diagonales était coupée par l'autre en deux parties égales; mais, dans ce

Digitized by Google

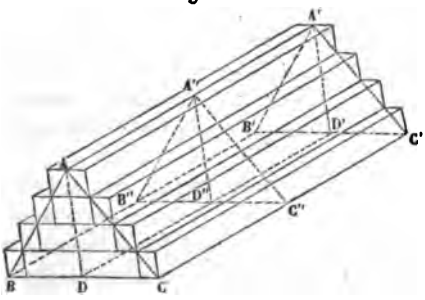
cas, il est facile de reconnaître que le centre de gravité se trouve sur cette dernière diagonale, au tiers de la distance qui sépare son point milieu de celui de la première.

39. Pour déterminer le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque, ou, plus généralement, d'un assemblage de figures planes et polygonales, disposées d'une manière quelconque dans l'espace, on peut remarquer qu'un semblable système est toujours décomposable en triangles, et que le problème peut ainsi toujours être ramené à trouver le centre de gravité de cette dernière figure; il ne reste plus qu'à composer ensuite des forces parallèles dont les intensités et les points d'application sont connus.

CENTRE DE GRAVITÉ DES SOLIDES.

40. *Le centre de gravité d'un prisme triangulaire* ABCC'B'A' *est au milieu de la droite qui unit les centres de gravité des deux faces triangulaires.* Cette vérité se met facilement en lumière par une démonstration identique avec celle que nous avons exposée (35) pour le triangle; après avoir remarqué que le plan A"B"C", mené parallèlement aux faces triangulaires du prisme, à égale distance de ces deux faces, contient le centre de gravité de ce solide (lemme 4°), on fait passer par l'une AA' des arêtes longitudinales un plan AA'D'D qui coupe en deux portions égales la face opposée BCC'B'. On suppose ensuite menés, en nombre quelconque, des plans parallèles à cette face; puis, par chacune des droites d'intersection dans les faces longitudinales, on imagine de nouveaux plans parallèles entre eux et au plan AA'D'D. Le prisme se trouve ainsi compris entre deux groupes de parallélépipèdes, les uns plus petits, les autres plus grands que la portion du prisme qui leur correspond. Ces parallélépipèdes sont tous partagés en deux parties égales par le plan AA'D'D, et ont leurs centres de gravité dans ce plan; chacun des groupes a donc aussi son centre de gravité dans ledit plan, et il en est de même du prisme, qui, à mesure qu'on multiplie le nombre des parallélépipèdes, se rapproche de plus en plus de se confondre avec la somme des solides composant l'un et l'autre groupe.

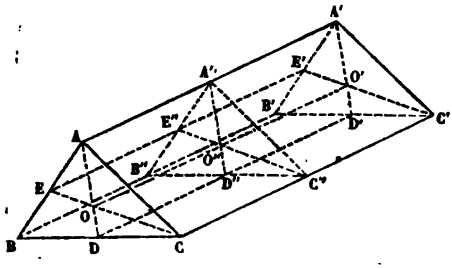
Fig. 25.



Il serait aussi facile de faire voir que le centre de gravité du prisme est également dans le plan CC'E'E mené par une seconde arête longitudinale CC' et le centre de figure E" de la face opposée; ce point se trouve

Digitized by Google

Fig. 26.

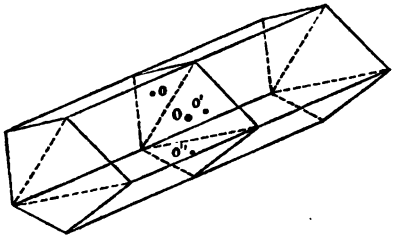


donc sur l'intersection OO' de ce nouveau plan avec le plan AA'D'D, et il est clair que cette intersection n'est autre chose que la ligne qui joint les centres de gravité O et O' des deux faces triangulaires. Enfin, le point O'' où cette ligne perce le plan intermédiaire A''B''C'' est le centre de gravité du prisme, lequel satisfait à l'énoncé ci-dessus.

Remarque. — Le centre de gravité d'un prisme triangulaire se confond avec celui de la section parallèle aux faces triangulaires menée à égale distance de ces faces.

41. Le centre de gravité d'un prisme quelconque est le même que celui de la section parallèle aux deux faces extrêmes menée à égale distance de ces deux faces. Ceci résulte de ce qu'il est facile de décomposer le prisme donné en prismes triangulaires au moyen de plans conduits par les arêtes longitudinales et les diagonales des faces extrêmes; d'après la remarque qui précède, chacun de ces prismes triangulaires a son centre de gravité confondu avec celui de sa section moyenne, et, pour avoir celui du prisme, il suffit de composer des forces parallèles, appliquées

Fig. 27.



respectivement aux centres de gravité o, o', o'', ... des prismes triangulaires, et proportionnelles aux volumes desdits prismes, ou, plus simplement, aux surfaces qui leur correspondent dans la section moyenne. Or, cette composition conduit précisément au centre de gravité O de la section polygonale, lequel est, par conséquent, aussi celui du prisme donné.

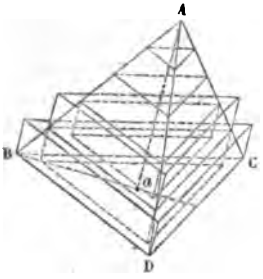
Remarque I. — Le centre de gravité d'un prisme quelconque se trouve au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux faces extrêmes.

Remarque II. — Les mêmes énoncés s'appliquent, par la considération des limites, à un cylindre oblique à base curviligne quelconque.

42. Soit maintenant un tétraèdre ABCD, dont on veuille déterminer le

Digitized by Google

Fig. 28.

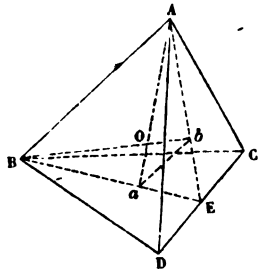


centre de gravité. Joignons le sommet A, par exemple, au centre de gravité a de la face opposée BCD; puis, par une construction analogue à celle que nous avons appliquée au triangle (35) et au prisme triangulaire (40), menons, en nombre indéterminé, des plans parallèles à la face BCD; nous produirons ainsi des sections triangulaires semblables qui seront, par suite, toutes percées en leurs centres de gravité par la droite Aa.

Par les sommets de ces sections menons des parallèles à Aa, et joignons deux à deux les points où chacune de ces droites perce le plan situé immédiatement au-dessus et celui qui est immédiatement au-dessous d'elle. Nous aurons ainsi formé deux groupes de prismes triangulaires, les uns tous plus petits, les autres tous plus grands que la partie du tétraèdre correspondante, et tous ces prismes auront leur centre de gravité sur la droite Aa; il en sera de même du tétraèdre lui-même, lequel approchera d'autant plus de se confondre avec l'une des séries de prismes que le nombre de ces prismes sera plus grand.

Il est donc prouvé, par ce qui vient d'être dit, que le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve sur l'une quelconque des droites qui joignent un sommet au centre de gravité de la face opposée, ce qui établit suffisamment que ces quatre droites se coupent en un même point; cherchons maintenant à mieux préciser géométriquement la position de ce point. Soient, à cet effet, a et b les centres de gravité des faces respectivement opposées aux sommets A et B; les droites BaE, AbE, sont dans le même plan ABE, et les droites Aa, Bb, qui sont également dans ce plan, s'y rencontreront en O; c'est le point cherché. Or, tirons ab; les triangles AOB, aOb, sont semblables, ainsi que les triangles abE, ABE; on a donc

Fig. 29.



$$a\text{O} : \text{AO} :: ab : \text{AB}, \quad \text{et} \quad ab : \text{AB} :: b\text{E} : \text{AE} :: 1 : 3;$$

donc aussi

$$a\text{O} : \text{AO} :: 1 : 3.$$

De là le théorème suivant : *Le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve à l'intersection des lignes qui joignent chaque sommet au centre de gravité de la face opposée, ou sur l'une quelconque de ces lignes, au*

Digitized by Google

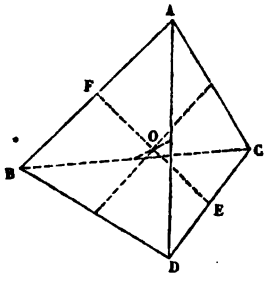
quart de sa longueur à partir de la face, et aux trois quarts à partir du sommet.

Remarque. — Si par le point O l'on menait un plan parallèle à la face ABC du tétraèdre, ce point serait le centre de gravité de la section déterminée par ce plan. La même propriété s'applique également à chacune des trois autres faces ABD, BCD, ACD.

43. On peut faire sur le tétraèdre une remarque analogue à celle que nous avons faite pour le triangle, c'est-à-dire que le centre de gravité de ce corps est le même que celui d'un système de quatre sphères homogènes, égales et ayant leurs centres aux quatre sommets. En effet, si l'on compose les poids des trois sphères placées aux sommets du triangle BCD, on trouvera un poids triple appliqué en a, et en composant ce poids triple placé en a avec le poids simple du sommet A, on tombera précisément sur le point O.

Remarque I. — Les quatre poids peuvent aussi se composer d'une autre manière. On peut composer d'abord les poids appliqués aux sommets A et B en un poids double appliqué au milieu F de AB, puis les poids des sommets C et D en un poids double appliqué au milieu E de CD. Il restera alors à composer ces deux poids doubles, et ils donneront un poids quadruple appliqué au milieu O de la ligne EF. D'ailleurs, ce point O ne peut différer de celui qu'on a obtenu par un autre mode de composition; donc il est prouvé que *le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les milieux des arêtes opposées.*

Fig. 30.

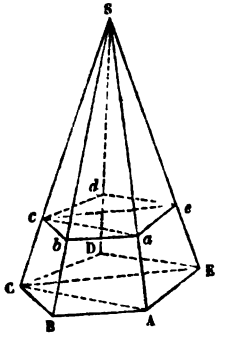


Remarque II. — Il résulte de ce qui précède que les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent au même point, puisque toutes trois contiennent le centre de gravité du solide. Cette circonstance établirait, en effet, suffisamment la vérité du théorème, si l'on n'en avait une démonstration directe et géométrique.

44. Pour trouver le centre de gravité d'une pyramide polygonale SABCDE, on décompose la base en triangles par des diagonales, et l'on mène des plans par ces diagonales et le sommet S; on obtient ainsi des pyramides triangulaires dont chacune a son centre de gravité au centre de gravité de la section faite par un plan *abcde* mené parallèlement à la base, au quart de la hauteur. On a donc à composer ensemble des forces parallèles ayant leurs points d'application dans ce plan, et respectivement égales en intensité aux volumes des pyramides triangulaires, c'est-à-dire proportionnelles aux aires des petits triangles *cab*, *cae*, etc. Or, le point

Digitized by Google

Fig. 31.



d'application de pareilles forces ne sera pas autre chose que le centre de gravité du polygone *abcde*; d'où l'on peut conclure que *le centre de gravité d'une pyramide polygonale quelconque se trouve au centre de gravité de la section menée parallèlement à sa base, aux trois quarts de la hauteur à partir du sommet*, ou, ce qui est géométriquement la même chose, *sur la ligne qui va du sommet au centre de gravité de la base, aux trois quarts de cette ligne à partir du sommet.*

45. La même propriété s'applique au cône à base curviligne quelconque, par l'assimilation de ce solide à une pyramide dont la base prendrait un nombre infiniment grand de côtés infiniment petits.

46. Pour trouver le centre de gravité d'un polyèdre quelconque, c'est-à-dire d'un solide compris sous plusieurs faces planes, on décomposera ce polyèdre, ainsi qu'on le voit en Géométrie, en un certain nombre de tétraèdres. Il suffit donc de savoir déterminer le centre de gravité de ce dernier solide, et l'opération revient ensuite à composer plusieurs forces parallèles pour chacune desquelles on connaît sa grandeur et son point d'application.

ÉQUILIBRE DE QUELQUES MACHINES SIMPLES ET COMPOSÉES.

NOTIONS SUR LE TRAVAIL DES FORCES.

47. La mesure de l'effet d'une force exige la considération de deux éléments, l'intensité de la force et le déplacement de son point d'application.

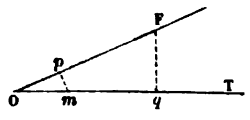
Lorsqu'une force constante de grandeur et de direction est appliquée à déplacer un corps dans cette direction, comme serait, par exemple, une force F dirigée de bas en haut pour élever uniformément un poids à une hauteur h, l'effet produit par cette force se mesure par le produit Fh de son intensité et de l'espace qu'elle a fait parcourir au corps sur lequel elle agissait.

Ce produit d'une force par le chemin que décrit son point d'application dans la direction de la force, est ce qu'on nomme le *travail* de cette force.

Quand, sous l'action d'une ou de plusieurs forces simultanées, ou par l'effet des liaisons du système, le point mobile O décrit une ligne droite OT différente de la direction de la force OF que l'on considère en particulier,

Digitized by Google

Fig. 32.



on estime le travail de cette force en multipliant son intensité par la projection Op sur sa propre direction de l'espace Om parcouru par le point d'application.

Si la ligne décrite est courbe, on est forcé de restreindre la définition à une partie assez courte du mouvement, pour que le chemin élémentaire parcouru pendant ce temps puisse être, sans erreur sensible, considéré comme rectiligne; le chemin Om est alors un élément commun à la courbe et à sa tangente au point O, et le *travail élémentaire*, variable en chaque point, *est* toujours *le produit de la force par la projection de l'élément du chemin que décrit son point d'application sur la direction de la force.*

Remarque. — En se reportant à la figure qui précède, on peut voir qu'en projetant la force OF sur la tangente OT, on obtient deux triangles rectangles semblables Omp, OFq, lesquels fournissent la proportion

$$OF : Om :: Oq : Op;$$

d'où

$$OF \text{ ou } F \times Op = Om \times Oq.$$

Cette égalité montre que le travail élémentaire d'une force peut aussi s'exprimer par *le produit de l'élément du chemin que parcourt son point d'application et de la projection de la force sur la direction de cet élément.*

48. Lorsque l'élément du chemin projeté sur la direction de la force tombe dans le sens de cette force, on dit que l'élément du travail, ou le travail élémentaire, est *moteur.*

Fig. 33.

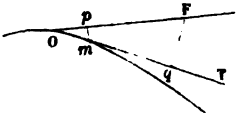
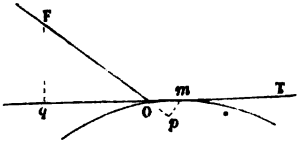


Fig. 34.



Si, au contraire, la projection de l'élément du chemin tombe dans un sens opposé à celui de la force, le travail élémentaire est dit *résistant.*

On voit qu'un caractère analogue se manifeste quand on estime le travail de la manière indiquée dans la remarque du numéro précédent; dans le cas du travail moteur, la projection de la force est en effet dans le sens du chemin parcouru, et, pour le travail résistant, cette projection tombe en sens opposé.

Quand il s'agit de forces agissant dans la direction même du chemin parcouru, comme dans l'exemple cité plus haut (47), ou comme lorsqu'un

Digitized by Google

cheval exerce sur une voiture un effort parallèle à la route, le travail peut, suivant les circonstances, être *moteur* ou *résistant*. Il est naturellement moteur, si la voiture avance; il serait au contraire *résistant* si, malgré les efforts de l'animal, le véhicule, placé dans une montée rapide, reculait au lieu d'avancer, ou si, dans une pente, le cheval, placé à l'arrière, exerçait un effort destiné à modérer la descente; dans le premier cas, la force et l'élément de chemin sont de même sens; dans le second, ils sont de sens opposés. Il est évident que le travail serait nul, dans le sens mécanique du mot, bien que l'effort exercé pût être considérable, si la force verticale était uniquement employée à supporter le poids sans l'élever, ou si la voiture, retenue par un obstacle, ne cédait point aux efforts du cheval.

Enfin, un dernier cas particulier peut encore se présenter; c'est celui où la force considérée est perpendiculaire à la direction que parcourt le mobile en vertu d'autres actions. On comprend que le travail d'une pareille force n'est ni moteur, ni résistant; il est simplement nul, et cette conclusion correspond, en effet, à cette circonstance géométrique, que la projection de la force sur le chemin est nulle, ainsi que celle du chemin sur la force.

49. On appelle *travail total* d'une force, dans un temps déterminé ou pour un déplacement déterminé du mobile, la *somme des travaux élémentaires* développés par cette force pendant ce temps ou pour ce déplacement.

Pour comparer facilement le travail d'une force avec celui d'une autre force, ou avec celui de la même force dans des circonstances différentes, on a dû se créer une *unité de travail;* celle qui a été choisie représente le travail qu'il faut développer pour élever l'unité de poids à l'unité de hauteur; c'est donc le produit du kilogramme par le mètre, et ce produit a reçu le nom de *kilogrammètre*.

De cette définition, il résulte clairement que le travail d'une force, qu'il s'agisse du travail élémentaire ou du travail total, exprime toujours un nombre entier ou fractionnaire de kilogrammètres. C'est ainsi qu'une force qui, avec une intensité de 70 kilogrammes, fait parcourir 9 mètres à son point d'application, développe un travail de 70×9 ou 630 kilogrammètres.

Si la force est de $4^{kil},60$, et le chemin de $0^{m},70$, le travail sera $4^{kil},60 \times 0^{m},70$, ou $3^{kil\,g\,m},22$.

50. L'expression algébrique du travail total se calcule sans aucune difficulté pour deux cas particuliers qui se rencontrent fréquemment dans les applications :

1°. Quand il s'agit d'une force constante d'intensité et constamment di-

Digitized by Google

rigée dans le sens du chemin élémentaire parcouru, c'est-à-dire constamment tangente à la courbe décrite par le point d'application;

2°. Quand il s'agit d'une force constante, non-seulement en intensité, mais encore en direction.

Nous allons succinctement examiner ces deux cas, et, pour abréger, nous désignerons en général par la notation T_F le travail total d'une force représentée par F.

Premier cas. — Soient c, c', c'', c''', etc., les éléments de chemin successivement parcourus par le point d'application de la force F, et soit C le chemin total égal à la somme de tous les chemins élémentaires.

Les travaux élémentaires successifs auront pour expression

$$Fc,\ Fc',\ Fc'',\ Fc''',\ldots,$$

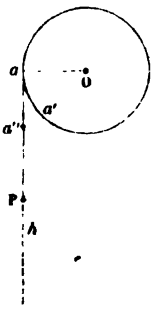
et, d'après la notation adoptée, nous aurons

$$T_F = Fc + Fc' + Fc''' = \ldots = F(c + c' + c'' + c''' + \ldots) = FC,$$

c'est-à-dire que, *dans le cas d'une force constante et constamment dirigée dans le sens du chemin parcouru, le travail total de cette force s'obtient en multipliant son intensité par l'arc total décrit par le point d'application.*

Exemple. — Lorsqu'un poids P suspendu à une corde qui s'enroule sur un cylindre à axe horizontal O, descend d'une certaine quantité h, la direction de ce poids reste tangente à un cercle qui a son centre sur l'axe, et qui a pour rayon celui du cylindre augmenté de celui de la corde; le travail total de ce poids s'obtiendra donc en multipliant le poids lui-même par l'arc aa' de la circonférence compris entre les points de contact au commencement et à la fin du mouvement, lequel arc est, du reste, égal à la portion aa'' ou h de la corde qui s'est déroulée pendant la descente du poids; ce travail est donc exprimé par le produit Ph.

Fig. 35.

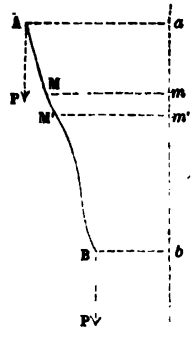


Deuxième cas. — Quand la force est constante d'intensité et de direction, on peut, pour évaluer les travaux élémentaires, projeter les éléments successifs de chemin sur cette direction constante, et *le travail total de la force est* alors *le produit de cette force par la somme des projections des éléments de chemin*, c'est-à-dire par la distance comprise entre les projections des positions extrêmes du mobile.

Exemple. — Lorsqu'un poids P descend le long d'une courbe quelconque AB, le travail élémentaire de cette force, pendant qu'elle fait dé-

Digitized by Google

Fig. 36.

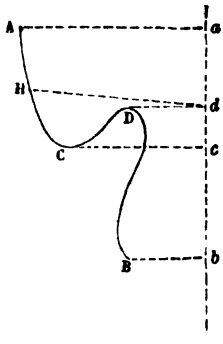


crire au point pesant un élément quelconque MM' de chemin, est le produit du poids P par la projection *mm'* de cet élément sur une verticale quelconque. Le travail total sera donc le produit dudit poids P par la projection totale ou par la distance *ab*.

De là ce théorème remarquable : *Lorsqu'un point pesant descend le long d'une courbe quelconque, le travail de la pesanteur est le produit du poids du mobile par la distance verticale dont il est descendu.*

Remarque I. — Cette vérité ne cesserait pas d'exister, quand la courbe serait telle, que le mobile, après avoir descendu le long d'un arc AC, remontât suivant CD pour redescendre ensuite le long de l'arc DB, pourvu qu'il fût bien entendu que le travail résistant développé pendant la partie ascensionnelle du parcours vînt en déduction égale d'une part du travail moteur engendré par la descente. Cela posé, si nous menons par les points C et D des plans horizontaux dont le dernier rencontre en outre la courbe en un second point H, les arcs CH et CD seront tous deux projetés sur *cd*; le travail moteur correspondant à CH sera détruit par le travail résistant provenant de CD, et il restera, pour le travail total, les deux portions correspondantes aux arcs AH et DB, c'est-à-dire

Fig. 37.



$$P \times ad + P \times db, \quad \text{ou } P(ad + db), \quad \text{ou enfin } P \times ab.$$

Remarque II. — Il résulte évidemment de ce qui précède, que *lorsqu'un point pesant, parti d'un certain plan horizontal suivant une courbe quelconque, revient à ce plan, le travail de son poids est nul,* attendu que la somme des travaux moteurs développés en descendant est précisément égale à celle des travaux résistants produits en montant.

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES.

51. Le plus souvent les forces agissent sur les corps auxquels on les applique par l'intermédiaire d'autres corps appelés *machines,* lesquels sont coordonnés et assemblés de manière à transmettre plus ou moins favorablement le travail des forces.

Digitized by Google

Toute machine reçoit le mouvement d'un agent ou moteur quelconque auquel on donne le nom de *puissance* : c'est, selon les cas, ou un moteur animé, ou un cours d'eau, ou la force du vent, de la vapeur, etc. ; elle reçoit des corps sur lesquels elle est destinée à agir une réaction que l'on nomme la *résistance principale*, ou simplement la *résistance* : le travail de cette force est précisément égal à l'effet utile de la machine, quand celle-ci fonctionne dans les conditions normales en vue desquelles elle a été établie. Enfin, toute machine est encore soumise à d'autres résistances, telles que les réactions des appuis qui supportent ses différentes parties, le frottement des parties mobiles, la raideur des cordes, etc. ; ce sont les *résistances secondaires* ou *passives*.

52. Cela posé, supposons que la machine se meuve d'un mouvement uniforme, et que, par conséquent, les diverses forces auxquelles elle est soumise se fassent mutuellement équilibre ; on démontre et nous regarderons comme établi que *le travail moteur est égal à la somme des travaux de toutes les résistances*. Si donc nous désignons par T_m le travail de la puissance ou le *travail moteur*, par T_f le travail des résistances passives, parmi lesquelles il faut surtout compter le frottement, et par T_r le travail de la résistance principale, ou le *travail résistant* proprement dit, nous pourrons poser la relation suivante, qui existe à chaque instant et pour tout mouvement fini et déterminé du système :

$$T_m = T_r + T_f.$$

En mettant cette égalité sous la forme $T_r = T_m - T_f$, on constate que le travail résistant ou, si l'on veut, *le travail utile exercé par une machine est égal au travail moteur qu'elle a reçu, diminué du travail de toutes les résistances secondaires*.

De la relation qui précède on peut tirer deux conclusions très-importantes :

1°. Quelque perfection que l'on apporte dans l'agencement et l'exécution des divers éléments d'une machine, il est impossible de se débarrasser complétement des résistances passives, et par conséquent le terme T_f, qui représente le travail de ces forces, n'est jamais égal à zéro ; on a donc toujours

$$T_r < T_m,$$

c'est-à-dire qu'*une machine transmet, en réalité, moins de travail qu'elle n'en a reçu ;* elle en transmet d'autant moins que le travail des résistances secondaires est plus considérable. Les meilleures machines n'utilisent guère que les trois quarts du travail qu'elles ont reçu ; le plus grand nombre en absorbe, en pure perte, une portion bien supérieure, et il est très-essentiel de ne jamais perdre de vue l'impossibilité de construire une machine qui transmette intégralement le travail moteur ; à plus forte raison ne doit-on pas songer à lui en faire transmettre davantage.

Digitized by Google

2°. Si, dans l'équation de transmission du travail

$$T_m = T_r + T_f,$$

on supposait que le terme T_r devînt nul, c'est-à-dire que, la machine travaillant à vide et n'exerçant aucune action sur les corps extérieurs, il n'y eût pas de résistance principale, il n'en faudrait pas moins exercer un certain travail moteur pour entretenir le mouvement uniforme du système, et ce travail moteur serait précisément égal au travail des résistances secondaires, lesquelles ne peuvent jamais être entièrement annulées.

Cette nécessité d'un moteur permanent dans toute machine répond péremptoirement à ceux qui, séduits par une chimérique illusion, cherchent à combiner mécaniquement des corps entre eux, de telle manière que le mouvement une fois reçu s'entretienne indéfiniment; la recherche obstinée du *mouvement perpétuel* ne méritait pas, comme on le voit, d'occuper tant de place dans les travaux d'un grand nombre d'esprits plus zélés qu'éclairés, que l'on voit encore de nos jours y épuiser leur temps et leur argent.

53. Nous allons maintenant passer en revue les six machines indiquées par le programme; dans cette étude, nous ferons complète abstraction des résistances secondaires, et, au moyen de cette hypothèse plus ou moins irréalisable (**52**), nous n'aurons à considérer que des systèmes dans lesquels le travail moteur serait égal au travail résistant, c'est-à-dire dans lesquels la puissance ferait exactement équilibre à la résistance. Nous établirons donc, pour chacune des machines étudiées, les conditions de cet équilibre par des considérations directes, et nous montrerons que ces conditions conduisent toujours à l'égalité du travail moteur et du travail résistant, de même qu'elles sont identiques avec celles qui seraient obtenues en posant *à priori* l'égalité

$$T_m = T_r,$$

dans laquelle on exprimerait algébriquement chacun des deux termes T_m et T_r, suivant les indications des deux cas particuliers spécialement examinés au n° 50. Cette égalité sera, dans tous les systèmes que nous examinerons, de la forme

$$Pp = Qq,$$

si nous représentons par P la puissance, par Q la résistance, et respectivement par p et q les déplacements élémentaires des points d'application de ces forces, projetés sur leur propre direction. La relation fondamentale qui précède, mise sous la forme

$$P : Q :: q : p,$$

prouve d'ailleurs que, *dans toute machine, la puissance et la résistance*

Digitized by Google

sont en raison inverse des déplacements, estimés dans leur propre direction, des points auxquels elles sont appliquées.

Enfin, nous rechercherons, pour chaque machine, le rapport entre les espaces que parcourent réellement les points d'application de la puissance et de la résistance, lorsque le système est mis en mouvement.

On distingue assez habituellement les machines en *machines simples* et *machines composées*.

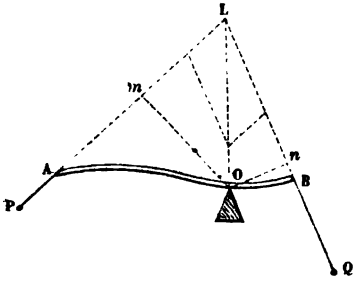
Les machines simples, qui servent d'éléments aux autres, sont au nombre de trois, classées d'après la nature de l'obstacle qui gêne et dirige leur mouvement; dans le *levier*, le corps tourne autour d'un point fixe; dans le *treuil*, tous les points tournent autour d'une droite fixe, sans s'écarter de plans parallèles entre eux; enfin, dans le *plan incliné*, le mouvement n'est autre chose qu'un glissement le long d'un plan fixe.

Les explications qui vont suivre s'appliqueront successivement, dans l'ordre établi par le programme, à chacune de ces trois machines, ainsi qu'à plusieurs autres qui s'y rattachent; ces dernières sont la *poulie*, les *mouffles* et la *vis*.

LE LEVIER.

54. On donne généralement le nom de *levier* à un corps solide, de forme quelconque, assujetti à tourner autour d'un point fixe. On lui donne habituellement toutefois la forme d'une barre AB, droite ou courbe, qui peut tourner autour d'un de ses points O qu'on nomme le *point d'appui*. En d'autres points de cette barre sont appliquées deux forces, l'une P la puissance, l'autre Q la résistance.

Fig. 38.



Pour établir la condition d'équilibre d'une pareille machine, rappelons-nous (27) que tout système de forces appliquées à un corps peut se ramener à deux forces non réductibles à une seule et dont l'une passe par un point donné du corps.

Si le corps a un point fixe autour duquel il puisse librement tourner, on peut choisir ce point pour y appliquer l'une des deux forces auxquelles le système est réductible. Cette force sera détruite par la résistance supposée indéfinie du point fixe, et, pour que le corps, soumis à la seule action de la seconde force, demeure en équilibre, il est nécessaire que cette force soit nulle d'elle-même, ou vienne aussi passer par le point fixe pour y être composée avec la première en une résultante unique détruite par ce point. Il faut donc et il suffit, pour l'équilibre, que le sys-

Digitized by Google

tème des forces données soit réductible à une résultante unique passant par le point fixe.

Appliquée au cas présent, cette condition exige, d'une part, que les deux forces P et Q soient dans un même plan avec le point d'appui O; de l'autre, que ces deux forces soient entre elles (11) dans le rapport inverse de leurs distances au point O, c'est-à-dire que l'on ait

$$P \times Om = Q \times On.$$

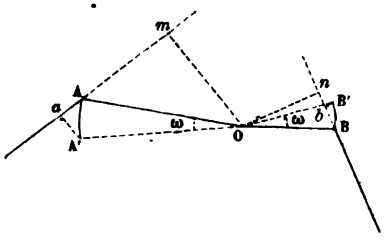
Il est d'ailleurs évident que les deux forces P et Q doivent agir en sens contraires sur le levier; autrement, au lieu de se détruire, leurs effets s'ajouteraient pour lui imprimer un mouvement de rotation.

En résumé, il faut, pour l'équilibre du levier : 1° *que la puissance et la résistance soient dans un même plan avec le point fixe;* 2° *qu'elles tendent à faire tourner le levier en sens contraires;* 3° *que leurs intensités soient dans le rapport inverse des distances de leurs directions au point d'appui, ou, en d'autres termes, dans le rapport inverse de leurs bras de levier.*

55. On voit clairement que, abstraction faite du poids propre du levier, la charge supportée par le point d'appui est précisément la résultante des deux forces concourantes P et Q. Si ces forces sont parallèles, la charge du point fixe est égale à leur somme, et si elles sont égales, comme dans la balance, cette charge est le double de l'une des deux forces.

56. Si maintenant nous supposons que la machine ait subi un petit mouvement angulaire ω, les points d'application A et B auront parcouru les petits arcs AA', BB' qui, ainsi que l'enseigne la géométrie élémentaire, seront respectivement exprimés par $AO \times \omega$, $BO \times \omega$, et se confondront sensiblement avec les perpendiculaires élevées en A et B aux lignes AO et BO. Soient alors Aa et Bb les projections respectives de ces déplacements sur les directions des forces; le travail de la puissance P ou le travail moteur sera exprimé par $P \times Aa$ et le travail résistant par $Q \times Bb$.

Fig. 39.



Or, les deux angles aAA', AOm ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, les triangles rectangles dont ils font partie sont semblables et donnent

$$Aa : AA' \quad \text{ou} \quad AO \times \omega :: Om : AO, \quad \text{d'où} \quad Om = \frac{Aa}{\omega}.$$

Digitized by Google

On obtiendrait de la même manière

$$On = \frac{Bb}{\omega},$$

et ces quantités, substituées dans la relation d'équilibre

$$P \times Om = Q \times On,$$

conduisent à

$$P \times \frac{Aa}{\omega} = Q \times \frac{Bb}{\omega}, \quad \text{ou} \quad P \times Aa = Q \times Bb,$$

c'est-à-dire à l'égalité du travail moteur et du travail résistant.

Inversement, si nous admettions comme démontrée l'égalité

$$P \times Aa = Q \times Bb,$$

nous remonterions facilement aux conditions d'équilibre en y remplaçant les quantités Aa, Bb par leurs valeurs respectives $Om \times \omega$, $On \times \omega$, calculées comme ci-dessus, et il viendrait

$$P \times Om \times \omega = Q \times On \times \omega \quad \text{ou} \quad P \times Om = Q \times On.$$

Remarque. — On peut observer encore, dans ce qui précède, que

$$AA' : BB' :: AO : BO;$$

d'où il suit que les espaces parcourus par les points d'application des forces sont entre eux comme les distances de ces points d'application au point fixe. Quant aux déplacements estimés dans la direction des forces, l'équation du travail montre qu'ils sont en raison inverse des intensités de ces forces, ou dans le rapport direct de leurs bras de levier Om et On.

57. Les figures ci-dessus supposent le point d'appui placé entre la puissance et la résistance; cette disposition constitue le levier du *premier genre*.

Fig. 40.

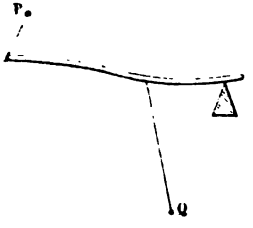
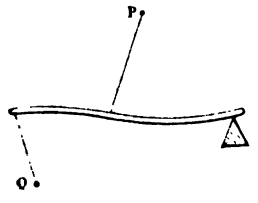


Fig. 41.



Dans le levier du *second genre*, la résistance est entre le point fixe et la puissance; enfin, dans celui du *troisième genre*, la puissance est appliquée entre le point fixe et la résistance.

Nous indiquons ces dénominations parce qu'elles sont assez usitées; mais elles n'ont aucune influence sur les conditions d'équilibre, qui sont les mêmes dans les trois cas; nous nous bornerons à citer, comme exemples du levier du premier genre, les diverses sortes de *balances*, la *pince en fer coudée*, le *mouvement de sonnette*, les *ciseaux* et *tenailles*, etc.; comme exemples du second genre, la *pince droite*,

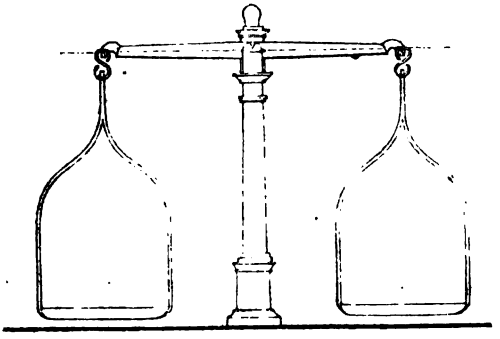
Digitized by Google

la *brouette*, etc.; enfin, comme leviers du troisième genre, la *pincette*, la *pédale* dont on fait usage dans diverses professions, etc.

58. La *balance* est un instrument trop utile et trop usuel pour que nous n'exposions pas succinctement ici ses principales dispositions; on en distingue trois espèces : la balance proprement dite, la *romaine* et le *peson*.

Dans la balance, un fléau horizontal est posé par son milieu sur un appui, et supporte à ses deux extrémités des plateaux sur l'un desquels on place le corps à peser, et sur l'autre les poids équivalents; le mouvement de bascule du fléau est d'ailleurs favorisé par la substitution de tranchants d'acier aux tourillons ordinaires, afin que le frottement n'apporte aucune altération sensible aux résultats exprimés par la pesée.

Fig. 42.



La première condition à remplir, dans la construction d'une bonne balance, consiste à rendre les deux bras du fléau parfaitement égaux entre eux, et à placer son centre de gravité de manière que, dans la position d'équilibre, ce point soit sur la verticale du point fixe, ou plus exactement dans le plan vertical passant par l'arête des couteaux. Il faut de plus que ce centre de gravité soit au-dessous de l'axe de suspension; s'il était au-dessus, l'équilibre serait nécessairement *instable*, c'est-à-dire que, pour peu que le fléau soit dérangé de sa position horizontale, il s'en écarterait de plus en plus, et la balance serait dite *folle;* placé sur l'axe lui-même, le centre de gravité ne saurait s'écarter du plan vertical que détermine cet axe, et la balance resterait en équilibre dans toutes les positions du fléau, sous l'action de deux poids égaux placés sur les plateaux; on aurait alors une balance *indifférente* dont le fléau basculerait jusqu'à devenir vertical pour la moindre inégalité des poids.

Il ne faut pas cependant que le centre de gravité du fléau soit à une distance trop grande au-dessous de l'axe de suspension; car le poids de cette pièce, toujours regardé comme appliqué en son centre de gravité, et agissant d'autant plus énergiquement sur le mouvement de la machine qu'il est plus éloigné du plan vertical d'équilibre, neutraliserait une notable partie de l'excès du poids du plateau opposé, et la balance ne se mettrait en marche que pour des différences de poids relativement considérables; elle serait *paresseuse*.

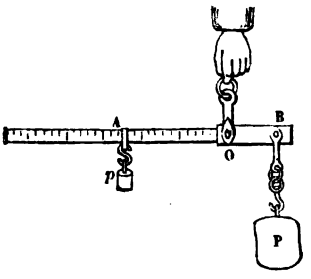
Digitized by Google

Sur les balances de précision, on peut faire varier, au moyen d'une vis et d'un écrou, la distance du centre de gravité du fléau à l'axe de suspension, et approprier cette distance à l'importance des pesages, de manière à donner dans chaque cas à l'instrument le degré de sensibilité qu'il comporte.

59. La difficulté d'obtenir une balance exempte de tout défaut et l'impossibilité fréquente de corriger celles dont on peut disposer, ont donné naissance à un procédé pratique qui est connu sous le nom de *méthode des doubles pesées*, et qui permet de peser exactement avec une balance défectueuse. Ce moyen consiste à placer dans l'un des plateaux le corps à peser, et à établir l'équilibre en mettant dans l'autre des corps pesants quelconques à l'appoint desquels on arrive avec du sable sec ou de la grenaille de plomb, par exemple. L'équilibre une fois établi, on enlève le corps, et on le remplace par des poids marqués, de telle sorte que l'équilibre s'établisse de nouveau; il est clair que ces derniers et le corps à peser faisant équilibre à la charge de l'autre plateau dans des circonstances tout à fait identiques, le poids du corps est rigoureusement représenté par la somme des poids étalonnés.

60. Dans la *romaine*, les corps à peser se placent sur un plateau ou s'accrochent à l'extrémité B de l'un des bras du fléau, et l'équilibre s'établit au moyen d'un poids constant p qui peut prendre des positions variables le long de l'autre bras.

Fig. 43.



Le frottement étant toujours diminué le plus possible par l'emploi des couteaux, et le centre de gravité du fléau étant encore situé dans le plan vertical déterminé par ceux-ci, on devra nécessairement avoir pour l'équilibre (54), si le poids p est en A et si P est le poids du corps,

$$P \times OB = p \times OA,$$

d'où

$$P = p \times \frac{OA}{OB}.$$

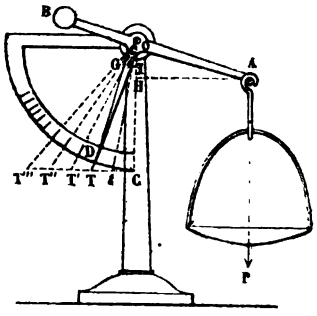
Puisque les quantités p et OB sont constantes, le poids P est donc proportionnel à la distance OA qui sépare le poids mobile p du point de suspension; pour rendre l'usage de l'instrument plus commode, on trace d'avance sur le bras OA des divisions équidistantes dont chacune porte l'indication du poids auquel le curseur p fait équilibre dans cette position.

Digitized by Google

Comme dans la balance ordinaire, il faut, pour que la romaine soit suffisamment sensible, que le centre de gravité du fléau soit situé à une petite distance au-dessous du point de suspension.

61. Le fléau du *peson* est muni d'une aiguille OD perpendiculaire à sa direction et fixée sur le centre de suspension O lui-même; ce fléau porte à l'une de ses extrémités A le plateau destiné à recevoir le corps à peser, et à l'autre un contre-poids B calculé de telle sorte que le centre de gravité de ce système mobile se trouve en un point G de l'axe de l'aiguille. Soit alors P le poids cherché du corps, et p celui du levier, ce dernier étant regardé comme appliqué en G; menons les horizontales GI et AH qui coupent en I et H la verticale OC du point de suspension; traçons enfin la tangente horizontale CT de l'arc de cercle décrit par la pointe D de l'aiguille. L'équilibre de la machine sera établi par la relation (54)

Fig. 44.



$$P \times AH = p \times GI,$$

d'où

$$P = p \times \frac{GI}{AH}.$$

Or, les triangles GOI, TOC et AOH sont semblables, et donnent

$$GI : OI :: CT : CO,$$
$$OI : AH :: GO : AO.$$

En multipliant terme à terme ces deux proportions, et supprimant le facteur commun aux deux termes du premier rapport, on obtient

$$GI : AH :: CT \times GO : CO \times AO,$$

et ce résultat, combiné avec le précédent, donne

$$P = p \times \frac{CT \times GO}{CO \times AO}.$$

Or, les quantités p, GO, CO et AO sont constantes; le poids P est donc proportionnel à CT, et la graduation de l'instrument n'offre plus alors aucune difficulté. Il suffit évidemment de charger le plateau d'un poids de 1 décagramme, par exemple, et de marquer le point t auquel vient s'arrêter l'aiguille sur la tangente; on portera à la suite du point t des lon-

Digitized by Google

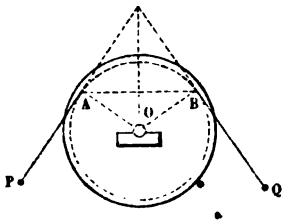
gueurs tT, TT', $T'T''$, etc., égales à Ct, et l'on joindra les points t, T, T', T'', etc., au centre O, en marquant sur l'arc de cercle la trace de chacune de ces lignes. Les points ainsi tracés sur cet arc seront ceux sur lesquels viendrait se placer l'aiguille, si l'on chargeait successivement le plateau de 1, 2, 3, 4, etc., décagrammes.

Si les portions de tangente Ct, TT', $T'T''$, etc., étaient suffisamment grandes, on pourrait partager chacune d'elles en dix parties égales, et l'on obtiendrait les divisions du quart de cercle correspondantes de gramme en gramme, et ainsi de suite.

LA POULIE.

62. Une poulie consiste essentiellement en une roue mobile autour d'un axe qui la traverse en son centre et qui repose par ses extrémités ou *tourillons* sur deux appuis; elle présente sur sa tranche une rainure ou *gorge* qui reçoit une corde; cette corde enroulée sur un arc plus ou moins étendu de la circonférence, s'en détache tangentiellement et est tirée à ses deux extrémités par les forces P et Q, dont l'une est la puissance, l'autre la résistance. Ces deux forces sont évidemment dans les mêmes conditions, au moment de l'équilibre, que si elles étaient appliquées aux deux extrémités d'un levier coudé AOB dont le point fixe serait au centre de la poulie; or, un pareil levier, dont les bras AO, OB sont égaux, ne saurait être en équilibre, à moins que l'on n'ait P = Q. La seule condition d'*équilibre de la poulie* est donc que *la puissance soit égale à la résistance*.

Fig. 45.



63. Abstraction faite du poids de la poulie, la pression π exercée sur l'axe de cette machine est la résultante des deux forces égales P et Q, laquelle passe nécessairement au centre O; or, nous avons vu (11) que cette résultante satisfaisait à la relation

$$\pi : P :: AB : AO,$$

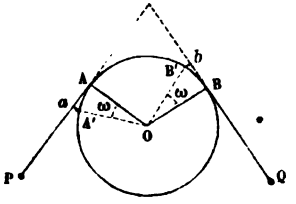
ce qui montre que *la pression sur l'axe est à la force qui tend le cordon comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie*.

La pression sera au maximum lorsque la sous-tendante elle-même sera la plus grande possible, c'est-à-dire lorsqu'elle sera égale au diamètre; les cordons seront alors parallèles, et la charge sur l'axe sera double de la tension du cordon. Il est inutile d'ajouter que cette pression se répartit par moitié sur chacun des appuis des tourillons, si la poulie est placée au milieu de la distance qui les sépare.

Digitized by Google

64. Si la poulie subit un mouvement angulaire ω, les arcs AA', BB' seront égaux et se projetteront sur leurs forces respectives suivant des longueurs égales Aa, Bb; comme, d'un autre côté, l'équilibre exige que la force P soit égale à la force Q, on peut écrire indifféremment

Fig. 46.



$$P \times AA' = Q \times BB'$$

ou

$$P \times Aa = Q \times Bb.$$

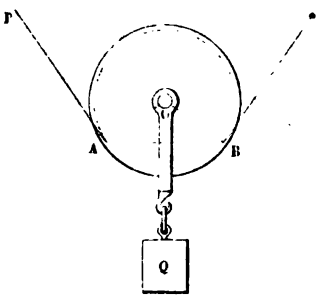
C'est la relation de l'égalité du travail moteur et du travail résistant, laquelle conduirait également à P = Q, si nous la supposions primitivement établie. Nous aurions pu, d'ailleurs, écrire aussi cette relation en regardant la question présente comme une application du premier cas examiné dans le n° 50, et il est bon de remarquer que l'égalité des travaux des deux forces existe aussi bien quand on considère le travail total des forces pendant un mouvement fini ω de la poulie, que lorsqu'il s'agit seulement d'une variation élémentaire.

Remarque. — Les déplacements des points d'application des forces, mesurés soit sur la poulie, soit sur le cordon, étant égaux entre eux, ils satisfont encore, comme cas particulier, à la loi du rapport inverse des intensités des forces.

65. Le plus souvent la poulie est *fixe*, en ce sens qu'elle est assise par ses tourillons, ou sur deux appuis immobiles, ou sur les deux branches d'une chape attachée à un point fixe, comme l'indique la figure ci-contre; quelquefois elle est *mobile* et portée par la corde elle-même dont un bout est alors attaché à un point fixe. Dans ce dernier cas, la résistance Q est appliquée à la chape, laquelle tourne de manière à se diriger, pour l'équilibre, suivant la direction de la résultante des deux tensions égales P du cordon, c'est-à-dire suivant la bissectrice de leur angle, et, comme on l'a vu (14), la force Q est alors égale à ladite résultante; on doit donc avoir

Fig. 47.

Fig. 48.



$$P : Q :: AO : AB.$$

La condition d'équilibre de la poulie mobile peut, par suite, s'énoncer ainsi : *La puissance est à la résistance comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

On voit facilement, par cette

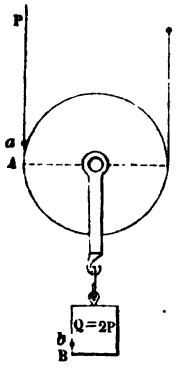
Digitized by Google

proportion, que plus la sous-tendante sera grande, plus la résistance pourra être considérable relativement à la puissance; le cas le plus favorable à l'emploi de la poulie mobile est donc celui où les deux cordons peuvent être parallèles, la puissance n'est alors que la moitié de la résistance.

Ajoutons que la puissance est précisément égale à la résistance, si la sous-tendante est égale au rayon, c'est-à-dire si l'arc embrassé par la corde est de 60 degrés.

66. La poulie mobile se déplace par un mouvement de translation, en même temps qu'elle éprouve, par rapport à la direction des forces, un mouvement de rotation, et, les lois géométriques de ce double mouvement n'étant pas censées à la portée de la plupart des lecteurs auxquels cet ouvrage est spécialement destiné, nous ne pouvons introduire ici la démonstration du principe du travail des forces sur une poulie mobile quelconque; nous nous bornerons au cas simple où, les deux cordons étant parallèles, la puissance tient en équilibre une résistance double, laquelle suit alors une direction rectiligne équidistante des deux cordons. Or, il est évident que, dans un tel système, quand le point d'application A de la puissance parcourt l'élément Aa de sa direction, cette longueur est prise par égales parts sur chacun des deux cordons, et la résistance ne se déplace, par conséquent, que d'une distance Bb égale à la moitié de Aa.

Fig. 49.



La relation

$$P \times A a = Q \times B b$$

est donc constamment satisfaite, puisque l'on a toujours en même temps

$$P = \frac{1}{2} Q \quad \text{et} \quad A a = 2 B b.$$

Il est tout à fait inutile de dire que, si l'on admettait comme démontrée *à priori* l'égalité qui précède, l'introduction de la valeur de Aa en ferait tout de suite ressortir, comme relation conditionnelle d'équilibre,

$$P = \frac{1}{2} Q.$$

LE PLAN INCLINÉ.

67. Cette machine consiste simplement en un plan fixe sur lequel se meut un corps solide soumis à des forces quelconques, ou par la résistance duquel l'équilibre se trouve établi; nous allons chercher les relations qui

Digitized by Google

doivent exister entre ces forces et l'inclinaison du plan pour que cette dernière condition soit remplie.

Remarquons d'abord que, en chacun des points de contact, le plan supposé parfaitement poli, c'est-à-dire n'exerçant aucun frottement, résiste dans une direction qui lui est normale; l'action totale du plan est donc la résultante de plusieurs forces parallèles; elle est égale à leur somme et, comme elle, normale à ce plan. Cette résultante doit détruire l'action de toutes les forces données, y compris le poids du corps, s'il est supposé pesant; celles-ci doivent donc être réductibles à une force unique, normale au plan et tendant à appuyer le corps sur ce plan.

De plus, il faut que ces deux résultantes normales, provenant l'une de la résistance du plan, l'autre des forces appliquées au corps, se détruisent et soient, par conséquent, directement opposées. Si donc le corps ne s'appuie que par un seul point sur le plan, il est nécessaire et il suffit que la résultante des forces données soit normale au plan et passe par le point de contact.

Si le corps s'appuie par deux points, il faut que cette résultante perce le plan sur un des points de la droite qui unit les deux premiers; s'il y a trois points de contact non situés en ligne droite, il faudra que la résultante normale rencontre le plan dans l'intérieur du triangle formé par ces trois points, et, dans ces deux cas, la pression en chaque point se déterminera comme il a été expliqué aux n^os^ 23 et 24 pour la décomposition d'une force en d'autres appliquées parallèlement en des points déterminés. Enfin, s'il existe plus de trois points d'appui, la résultante devra toujours passer dans le polygone convexe formé par la jonction rectiligne des points extérieurs, polygone que, pour abréger, nous conviendrons d'appeler *polygone de contact;* mais on a vu que les pressions en chaque point de contact resteraient théoriquement indéterminées.

68. Nous bornerons ici notre examen au cas particulier où deux forces seulement sont appliquées au corps solide. Pour que ces deux forces puissent avoir une résultante unique, il faut qu'elles soient dans un même plan, et pour que cette résultante soit normale au plan fixe, il est nécessaire qu'elle soit elle-même avec ses deux composantes dans un plan normal audit plan fixe; de là le théorème suivant :

Lorsqu'un corps appuyé contre un plan fixe est sollicité par deux forces, il faut, pour l'équilibre, que ces deux forces se trouvent dans un même plan perpendiculaire au plan donné et qu'elles donnent lieu à une résultante unique, normale à ce dernier plan et le rencontrant dans l'intérieur du polygone de contact.

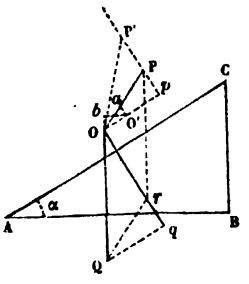
69. Supposons maintenant, pour particulariser encore davantage, que l'une des deux forces appliquées au corps soit son poids Q et que ce corps

Digitized by Google

soit placé sur un plan incliné ; ce poids Q représentera la résistance, et soit P la force ou la puissance qui doit établir l'équilibre.

Le plan de ces deux forces P et Q est à la fois vertical, puisqu'il contient la force Q, et normal au plan incliné par la raison ci-dessus indiquée. Étant ainsi perpendiculaire au plan horizontal et au plan incliné, le plan des forces du système sera perpendiculaire à leur intersection et contiendra l'angle qui mesure l'inclinaison α du plan donné sur l'horizon ; c'est le plan de la figure ci-contre. Soit donc O le point de concours de la puissance P et de la résistance verticale Q ; ces deux forces composées par la règle du parallélogramme devront, comme précédemment, donner une résultante normale au plan et tombant dans l'intérieur du polygone de contact. Or, si du sommet Q nous abaissons Qq perpendiculaire sur la diagonale Or, le triangle QOq ainsi obtenu sera semblable au triangle ABC, puisque l'angle QOq ne diffère pas de l'angle α aux côtés duquel les siens sont respectivement perpendiculaires ; nous aurons donc

Fig. 50.



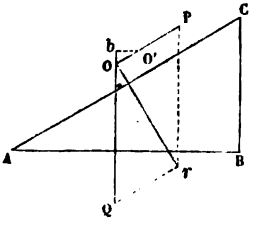
$$Qq : OQ \quad \text{ou} \quad Q :: BC : AC ;$$

mais Qq n'est autre chose que la projection Op de la puissance P sur le plan incliné, et la condition d'équilibre particulière à ce cas peut, par conséquent, s'énoncer ainsi : *Pour qu'il y ait équilibre entre le poids d'un corps placé sur un plan incliné et une autre force qui sollicite ce corps, il faut que la projection de la puissance sur le plan soit à la résistance comme la hauteur dudit plan est à sa longueur.*

Remarque. — Il est à observer que la condition ci-dessus serait identiquement la même pour toute autre force OP' qui aurait même projection Op que la force P.

70. On peut distinguer le cas où la puissance P est parallèle au plan incliné, et celui où elle est horizontale.

Fig. 51.

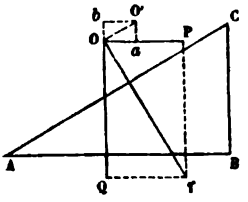


Dans le premier, la projection de la puissance P sur le plan incliné est égale à cette force elle-même, et, comme le démontrerait d'ailleurs directement la similitude des triangles QOr et ABC, l'énoncé précédent devient : *Pour l'équilibre entre le poids d'un corps placé sur un plan incliné et une force qui sollicite ce corps parallèlement audit plan, il faut que la*

Digitized by Google

puissance soit à la résistance comme la hauteur du plan est à sa longueur.

Fig. 52.



Dans le deuxième cas, les mêmes triangles QOr et ABC donnent.

$$Qr : QO :: BC : AB,$$

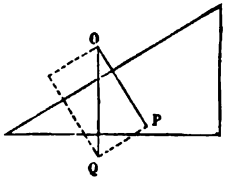
ou, *la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan incliné est à sa base.*

Remarque. — La pression sur le plan, ou la résultante Or, est égale à $\sqrt{Q^2 - P^2}$ dans le cas d'une puissance parallèle au plan, et à $\sqrt{P^2 + Q^2}$ dans celui d'une puissance horizontale.

71. Si, dans l'hypothèse d'une puissance horizontale, nous supposions que le plan incliné se relevât jusqu'à devenir vertical, sa base AB deviendrait nulle, et le rapport de la puissance à la résistance serait infini; ce qui prouve que, abstraction faite du frottement, il n'y a pas de force horizontale finie qui soit capable de maintenir un corps pesant contre un plan vertical.

Plus généralement, on ne peut, avec une force normale P, quelque grande qu'elle soit, retenir un corps pesant sur un plan incliné parfaitement poli. Le poids Q du corps peut en effet être décomposé en deux forces : l'une, normale au plan et qui est détruite, ainsi que la force P elle-même, par la résistance dudit plan; l'autre, parallèle à ce plan et qui obtient son effet. On voit donc que l'équilibre ne peut en général avoir lieu que si la force P, au lieu d'être normale, est inclinée de manière à donner une composante parallèle au plan pour détruire celle du poids du corps. Nous répétons que l'existence du frottement et d'une inévitable déformation au contact des corps, vient seule donner un démenti apparent à ce résultat de la théorie.

Fig. 53.



72. Nous allons maintenant reprendre un à un le cas général et les deux cas particuliers ci-dessus examinés, pour établir directement sur chacun deux l'égalité du travail moteur et du travail résistant.

Soient (69), dans le cas d'une force P quelconque, OO' un déplacement du corps parallèlement au plan incliné, et Oa, Ob les projections de ce déplacement sur les directions des forces P et Q; les triangles rectangles semblables OaO', OPp donneront

$$OP \text{ ou } P : OO' :: Op : Oa.$$

Digitized by Google

et, par la même raison, les triangles $Ob O'$, OQq fourniront

$$OQ \text{ ou } Q : OO' :: Qq \text{ ou } Op : Ob.$$

Ces deux proportions ont les mêmes moyens, et leurs extrêmes donnent la nouvelle proportion

$$P : Q :: Ob : Oa,$$

ou

$$P \times Oa = Q \times Ob,$$

ce que nous voulions démontrer.

Inversement, pour passer de cette égalité à la condition d'équilibre, il suffit de remarquer que la seconde des proportions qui précèdent donne

$$Op : Q :: Ob : OO',$$

et que les triangles semblables $Ob O'$, ABC fournissent également la proportion

$$Ob : OO' :: BC : AC;$$

on a, par conséquent,

$$Op : Q :: BC : AC;$$

c'est la condition exprimée plus haut

73. La direction de la force P étant quelconque dans le numéro qui précède, le principe dont il s'agit se trouve ainsi démontré généralement; mais, pour répondre plus directement au but spécial de cet ouvrage, nous allons répéter sur les deux cas particuliers la démonstration qui se simplifie considérablement, comme on va le voir.

Dans le premier (70), le déplacement a lieu sur la force P elle-même, et il suffit d'établir que l'on a

$$P \times OO' = Q \times Ob.$$

Or, d'un côté, la condition d'équilibre fournit

$$P : Q :: BC : AC;$$

de l'autre, les triangles semblables ABC, $Ob O'$ donnent

$$BC : AC :: Ob : OO',$$

et de l'ensemble de ces deux proportions on conclut immédiatement l'égalité posée.

Inversement, ladite égalité et la deuxième proportion conduisent directement à la première, c'est-à-dire à la condition d'équilibre.

Dans le deuxième cas, la puissance est horizontale et la condition d'équilibre est exprimée par

$$P : Q :: BC : AB.$$

Or, les triangles semblables ABC, $Oa O'$ fournissent

$$BC : AB :: O'a \text{ ou } Ob : Oa;$$

Digitized by Google

par conséquent, on obtient encore

$$P : Q :: Ob : Oa,$$

ou

$$P \times Oa = Q \times Ob,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il est aussi facile, dans ce cas que dans les précédents, de remonter de la troisième proportion ci-dessus à la première qui exprime la condition d'équilibre.

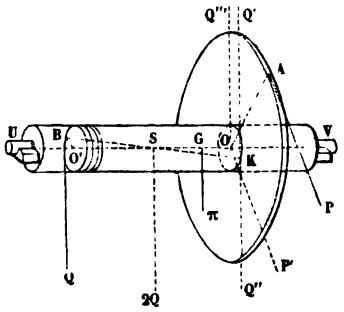
Remarque. — Le point d'application de la puissance se confondant avec celui de la résistance, le rapport entre les espaces parcourus par ces deux points est toujours l'unité. Il en serait d'ailleurs encore ainsi, quand même ces deux points ne coïncideraient pas, puisque tous les points du corps se meuvent parallèlement à eux-mêmes et en ligne droite sur le plan incliné.

LE TREUIL.

74. Le treuil se compose d'un cylindre ordinairement horizontal, perpendiculairement à l'axe duquel est montée une roue solidaire avec lui. Il se termine de part et d'autre par des cylindres de même axe que lui, mais d'un plus petit diamètre et appelés *tourillons;* c'est par ces tourillons que la machine repose sur ses appuis ou *coussinets*, et le seul mouvement qu'elle est censée pouvoir prendre est un mouvement de rotation autour de l'axe commun.

Une corde fixée par un bout au cylindre reçoit, à l'autre bout, l'action d'une résistance qui peut être, par exemple, un poids Q à élever; une force motrice ou puissance P, agissant tangentiellement à la roue par le moyen d'une corde, d'un système de chevilles ou d'une manivelle, doit faire équilibre au poids, ou bien l'élever en faisant tourner le treuil autour de son axe.

Fig. 54.



Soient O le centre de cette roue et de l'intersection de son plan avec le cylindre, O′ le centre d'une autre section faite dans le cylindre perpendiculairement à son axe par la verticale du cordon qui tient à la résistance; dans le plan horizontal passant par l'axe de la machine, traçons les deux rayons de sens contraires OK, O′B, et tirons KB qui rencontre l'axe au milieu S de OO′.

Au point K appliquons en sens contraires deux forces Q′, Q″ égales et parallèles à Q; l'équilibre, s'il existe, n'en sera nullement troublé et pourra être considéré comme établi de la manière suivante entre les quatre

Digitized by Google

forces P, Q, Q' et Q''. Les deux forces Q et Q'', égales, parallèles et de même sens, auront une résultante 2Q appliquée en S et détruite par la résistance de l'axe. Resteront à considérer les deux forces P et Q', agissant dans un même plan où se trouve également un point fixe O. Comme dans le cas de la poulie, ce système partiel peut être assimilé à un levier coudé, et, en raison de ce que les bras sont inégaux, l'équilibre des deux forces, c'est-à-dire l'équilibre de la machine elle-même, exige que l'on ait la relation

$$P \times OA = Q' \times OK.$$

Mais Q' n'est autre chose que Q, et si nous désignons respectivement par R et r les rayons de la roue et du cylindre, la condition d'équilibre, qui deviendra

$$P \times R = Q \times r,$$

pourra s'énoncer ainsi : *pour l'équilibre du treuil, il faut que la puissance soit à la résistance comme le rayon du cylindre est à celui de la roue.*

Remarque. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les cordes enroulées sur le cylindre et sur la roue étaient infiniment déliées; mais les cordes sont toujours d'un diamètre fini dont il faut, pour plus d'exactitude, ajouter la moitié aux rayons R et r dans la condition d'équilibre. Cette relation deviendra donc, si l'on désigne par ρ le rayon de la corde de la roue, et par ρ' celui de la corde du cylindre,

$$P(R + \rho) = Q(r + \rho').$$

75. Les forces qui, en des points différents, exercent des pressions sur l'axe du treuil sont : 1° la force verticale 2Q, appliquée au milieu S de la distance OO' qui sépare la roue du point d'application de la résistance; 2° les deux forces P et Q', dont la résultante passe nécessairement au point O et qui peuvent, par conséquent, être considérées comme transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point, suivant OP' et OQ''.

Or, la force 2Q appliquée en S peut se décomposer en deux forces Q appliquées chacune en l'un des points O et O'; la première de celles-ci sera égale et directement opposée à la force Q' que nous y avons transportée, et ces deux forces se détruiront; il ne restera donc plus que les deux forces P et Q transportées sur l'axe parallèlement à elles-mêmes et dans leurs plans perpendiculaires respectifs.

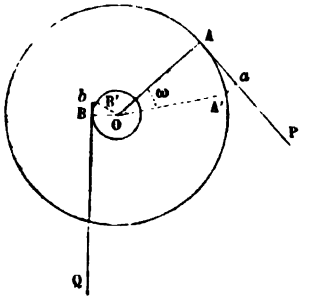
Si l'on veut avoir égard au poids π de l'appareil, il faut considérer que ce poids représente encore une force verticale appliquée en un point G de l'axe; enfin, pour obtenir les pressions individuelles sur les deux appuis U et V, il faudra décomposer chacune des trois forces P, Q, π en deux autres parallèles passant par ces deux points, et la résultante faite en

Digitized by Google

chaque appui avec ces trois nouvelles composantes représentera la pression qu'il supporte.

76. Faisons subir maintenant au treuil en équilibre un petit déplacement angulaire ω, et projetons sur les directions des forces P et Q les arcs élémentaires AA', BB' parcourus par les points d'application, lesquels arcs sont d'ailleurs entre eux comme les rayons R, r et respectivement exprimés par ωR, ωr.

Fig. 55.



Les quadrilatères OAaA', OBbB' qui ont leurs angles égaux chacun à chacun et pareillement disposés, sont semblables, et par suite aussi les triangles AA'a, BB'b qui donnent

$$Aa : Bb :: AA' \text{ ou } \omega R : BB' \text{ ou } \omega r :: R : r.$$

D'un autre côté, l'équilibre exige que l'on ait

$$P : Q :: r : R;$$

on a donc

$$P : Q :: Bb : Aa,$$

ou

$$P \times Aa = Q \times Bb;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, de cette dernière relation supposée démontrée et de la première proportion, on déduit la seconde comme condition d'équilibre.

Remarque. — Les valeurs de AA' et BB' font voir que les déplacements des points d'application sont entre eux comme les rayons R, r, et, par suite, en raison inverse des intensités des forces qui y sont appliquées.

LES MOUFLES.

77. On donne le nom de *moufle* à un système de plusieurs poulies égales réunies dans une chape commune sur le même axe; la mise en œuvre de cette machine s'effectue au moyen de deux systèmes analogues: l'un fixé, comme une poulie simple, par sa chape; l'autre, mobile et relié au premier par un cordon dont une extrémité est attachée à l'une des chapes, ordinairement celle du moufle fixe, ainsi que le représente la *fig.* 56, et qui passe successivement sur toutes les poulies, pour recevoir, à sa seconde extrémité, l'action de la puissance P. Au crochet de la chape mobile est appliquée la résistance Q, laquelle est généralement un poids à soulever.

Digitized by Google

Fig. 56.

Si l'on suppose que l'appareil entier comporte un nombre n de poulies et, ce qui doit avoir toujours lieu d'une manière sensible, que les cordons de suspension soient tous parallèles, ces derniers, en nombre n, auront tous la même tension P imprimée par la puissance et transmise par chaque poulie (62); la résistance Q sera donc en réalité soutenue, dans l'état d'équilibre, par n forces égales à cette tension, et l'on aura la relation

$$Q = nP,$$

qui exprime que *la puissance est à la résistance comme l'unité est au nombre de cordons qui vont d'un moufle à l'autre.*

Quelquefois, mais beaucoup plus rarement, les poulies d'un même moufle sont disposées sur la même chape, les unes à la suite des autres et sur des axes différents; cette disposition, qui exige que les poulies soient de différents diamètres, pour conserver autant que possible le parallélisme des deux cordons qui embrassent chacune d'elles, ne change rien à ce que nous venons de dire, puisque la condition d'équilibre ne dépend pas de la longueur des cordons, mais seulement de leur tension.

78. L'effort que supporte le point fixe auquel est attaché le système de moufles est évidemment égal, comme dans la poulie simple et abstraction faite du poids propre π de la machine, à la résultante de la puissance P et de la résistance Q ou nP.

Lorsque les directions de ces deux forces sont sensiblement parallèles, leur résultante est égale à leur somme

$$P + nP, \quad \text{ou} \quad (n+1)P,$$

et si toutes deux sont verticales, la charge totale du point fixe est exprimée par

$$\pi + (n+1)P.$$

79. Pour démontrer que, dans cette machine, le travail moteur est égal au travail résistant, nous supposerons que la résistance Q ait marché d'une longueur Bb sur la direction rectiligne dans laquelle cette force agit; ce mouvement n'a pu avoir lieu que par un raccourcissement de la même quantité de chacun des n cordons, raccourcissement qui a nécessairement eu pour effet un allongement du cordon de la puissance égal à

Digitized by Google

la somme des raccourcissements partiels ; si donc le point A de ce cordon a marché de A en a, nous aurons

$$A a = n \times B b,$$

et, comme on a déjà pour l'équilibre

$$n P = Q,$$

il en résulte

$$P \times A a = Q \times B b, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Inversement, la première et la dernière de ces trois égalités conduiraient à la seconde, c'est-à-dire à la relation d'équilibre.

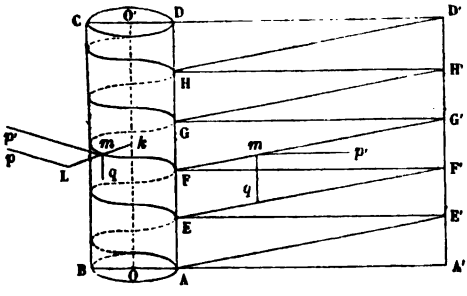
Remarque. — Les espaces $A a$, $B b$, parcourus par les points d'application sont entre eux dans le rapport inverse des forces correspondantes ; cela résulte directement de la dernière des relations qui précèdent.

LA VIS.

80. Une *vis* est formée d'un noyau cylindrique sur lequel s'enroule une saillie à laquelle on donne le nom de *filet*. Il est, avant tout, nécessaire de donner de la forme et de la position de cette saillie une description rigoureuse.

Soient ABCD un cylindre circulaire droit ; OO′ son axe ; OA son rayon, que nous désignerons par r. Développons, à partir de l'arête AD, la surface du cylindre suivant le rectangle AA′D′D, et divisons AD en un nombre quelconque de parties égales ; par les points de division menons les lignes EE′, FF′, etc., parallèles à AA′, et enfin les diagonales AE′, EF′, FG′, etc., des rectangles ainsi obtenus. Si maintenant nous enroulons de nouveau le rectangle AD′ sur le cylindre, chacune des diagonales formera une portion appelée *spire* d'une courbe continue qui porte le nom d'*hélice ;* la distance constante qui sépare les extrémités d'une même spire ou la hauteur d'un des rectangles générateurs s'appelle le *pas* de l'hélice ; désignons-le par h.

Fig. 57.



D'après sa génération, l'hélice a nécessairement tous ses éléments également inclinés sur le plan de la base du cylindre, et cette inclinaison n'est autre chose que l'angle A′AE′ de l'un des triangles rectangles qui

Digitized by Google

ont pour côtés de l'angle droit le pas h de l'hélice et le développement AA′ ou $2\pi r$.

Cela posé, pour simplifier le discours, supposons que le cylindre soit vertical, et cherchons d'abord la condition d'équilibre d'un point matériel m placé sur l'hélice et sollicité, d'une part, par une force verticale q, d'autre part, par une force horizontale p agissant à l'extrémité L du rayon km prolongé et perpendiculairement à ce rayon ; soit enfin $k\mathrm{L} = \mathrm{R}$.

Nous pouvons d'abord remplacer la force p par une force p', parallèle à la première et appliquée au point m lui-même, pourvu que, d'après les conditions de l'équilibre du levier, nous déterminions cette force nouvelle par la relation

$$p \times k\mathrm{L} = p' \times km, \quad \text{ou} \quad p\mathrm{R} = p'r,$$

d'où

$$p' = p\frac{\mathrm{R}}{r}.$$

Le point m se trouve d'ailleurs dans les mêmes conditions que s'il était placé sur le plan incliné FG′ et sollicité à la fois par la force verticale q et par la force horizontale p'. Or, on a vu (70) qu'il fallait, dans ce cas, que la force horizontale fût à la force verticale comme la hauteur du plan incliné est à sa base, et cette condition se traduit pour nous par la proportion

$$p' \quad \text{ou} \quad p\frac{\mathrm{R}}{r} : q :: h : 2\pi r,$$

laquelle équivaut à celle-ci :

$$p : q :: h : 2\pi\mathrm{R}.$$

Ce résultat signifie que, *pour qu'un point, placé sur une hélice*, dans les conditions ci-dessus, *soit en équilibre, il faut que la puissance horizontale soit à la résistance verticale comme le pas de l'hélice est à la longueur de la circonférence que tend à décrire la puissance.*

Observons, en passant, que le rayon r du cylindre n'entre plus dans cette dernière proportion ; on aura donc toujours le même rapport entre la puissance et la résistance, quel que soit le cylindre sur lequel l'hélice soit tracée, pourvu que le pas de l'hélice reste le même, ainsi que le bras de levier de la puissance. Il ne faut, en outre, pas perdre de vue que ce n'est que pour plus de commodité dans le langage que nous avons supposé le cylindre vertical ; tout ce qui vient d'être dit et tout ce que nous allons dire encore sur ce sujet doit s'entendre en général d'une force parallèle à l'axe du cylindre et d'une autre agissant dans un plan perpendiculaire à cet axe.

81. Concevons maintenant qu'un carré ou un rectangle, ayant l'un de ses côtés confondu avec une génératrice du cylindre et l'un des points de ce côté, son milieu, par exemple, appliqué sur l'hélice, descende ou

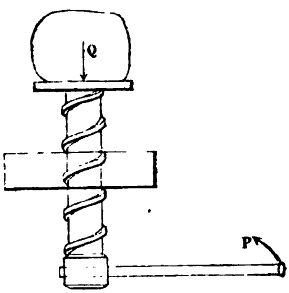
Digitized by Google

monte le long de la surface, de manière que son plan contienne toujours l'axe et que le point en question décrive la courbe ; il est évident que, dans ce mouvement, tous les points de l'aire du rectangle décriront des hélices de même pas, de même axe, mais de rayons différents. Quoi qu'il en soit, nous aurons engendré le filet d'une vis dont le *pas* sera le pas commun à toutes les hélices.

Imaginons enfin une seconde pièce solide, présentant exactement en creux la forme que la première offre en relief : ce sera l'*écrou* de la vis ; celle-ci pourra y pénétrer exactement et s'y mouvoir d'un double mouvement de rotation autour de son axe et de translation dans le sens de cet axe. Réciproquement, si c'est la vis qui est fixe, l'écrou pourra cheminer le long de l'axe en tournant en même temps autour de lui, et il s'avancera, à chaque tour entier, d'une quantité égale au pas de la vis.

82. Pour fixer les idées, nous allons supposer que l'écrou soit immobile et que la vis elle-même soit sollicitée, 1° par une force horizontale P qui agit dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis et qui tend à la faire monter ; 2° par une force verticale Q qui, comme ferait un poids à soulever, tend à s'opposer à son ascension. Soit toujours (*fig.* 57) $kL = R$ la perpendiculaire abaissée de l'axe sur la direction de la force P, dans le plan horizontal qui la contient.

Fig. 58.



Cela posé, on comprend que l'action des forces P et Q se fait sentir exclusivement sur chacun des éléments de la surface inférieure du filet de la vis, lesquels seuls s'appuient sur l'écrou.

Soient donc m, m', m'', etc., les divers éléments de contact ;
q, q', q'', etc., les composantes ou parties de la force Q qui y sont respectivement appliquées ;
enfin p, p', p'', etc., les éléments de la force P divisée au point L en autant de parties qu'il y a d'éléments de contact.

Pour chacun de ces éléments, quelle que soit sa distance à l'axe, nous aurons la relation établie plus haut pour l'équilibre d'un point sur l'hélice et, par conséquent, nous devrons poser la suite indéfinie de proportions :

$$\begin{array}{lll} \text{pour l'élément } m & \ldots\ldots & p : q :: h : 2\pi R, \\ \quad — \quad m' & \ldots\ldots & p' : q' :: h : 2\pi R, \\ \quad — \quad m'' & \ldots\ldots & p'' : q'' :: h : 2\pi R, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Digitized by Google

En se rappelant maintenant que $p+p'+p''+\ldots=\mathrm{P}$, et $q+q'+q''+\ldots=\mathrm{Q}$, on déduit facilement de la suite de rapports égaux qui précède, la proportion

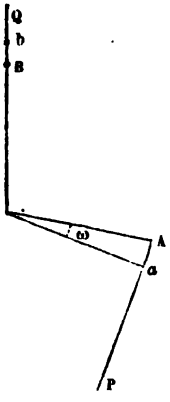
$$\mathrm{P} : \mathrm{Q} :: h : 2\pi\mathrm{R},$$

c'est-à-dire que, *pour l'équilibre d'une vis, la puissance qui tend à faire tourner doit être à la résistance qui presse dans le sens de l'axe, comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance.*

On voit par là que, pour contre-balancer une résistance donnée, on a besoin d'une puissance d'autant moindre qu'elle agit avec un bras de levier plus grand et que le pas de la vis est plus petit.

83. Si la vis tourne d'un petit angle ω, l'arc élémentaire Aa décrit par le point d'application de la puissance, dans la direction même de cette force qui tourne avec la machine, sera égal à $\omega\mathrm{R}$, et la résistance avancera d'une quantité rectiligne Bb facile à calculer ; car, puisque la vis monte de h pour un tour entier $2\pi\mathrm{R}$, nous aurons la proportion

Fig. 59.



$$B b : h :: \omega\mathrm{R} : 2\pi\mathrm{R};$$

d'où

$$B b = \frac{h\omega}{2\pi},$$

et, par conséquent,

$$A a : B b :: \omega\mathrm{R} : \frac{h\omega}{2\pi} :: \mathrm{R} : \frac{h}{2\pi} :: 2\pi\mathrm{R} : h.$$

Or, la condition d'équilibre était

$$\mathrm{Q} : \mathrm{P} :: 2\pi\mathrm{R} : h;$$

il vient donc, si l'on combine ces deux proportions,

$$A a : B b :: \mathrm{Q} : \mathrm{P},$$

ou

$$\mathrm{P} \times A a = \mathrm{Q} \times B b,$$

c'est-à-dire le travail moteur égal au travail résistant.

Inversement, la proportion exprimant la condition d'équilibre se déduirait facilement de la combinaison des deux autres.

L'égalité $\mathrm{P} \times A a = \mathrm{Q} \times B b$ se retrouve encore et peut s'étendre au travail total correspondant à une période finie et déterminée du mouvement, en appliquant aux deux forces P et Q les considérations dévelop-.

Digitized by Google

pées au n° 50. La force P, en effet, rentre dans le premier des deux cas examinés, et son travail est égal à son intensité P, multipliée par l'arc Aa décrit par son point d'application ; la force Q, qui correspond évidemment au second cas, donne pour expression du travail total, l'intensité Q multipliée par la distance Bb comprise entre les projections des positions extrêmes du mobile.

Remarque. — La même égalité montre que, dans la vis, les espaces Aa et Bb parcourus par les points d'application sont en raison inverse des intensités des forces.

Digitized by Google

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

1. La trigonométrie a pour objet spécial de fournir des méthodes qui permettent de calculer toutes les parties d'un triangle, quand on a des données suffisantes pour les déterminer.

Pour atteindre ce but, il importait de trouver des relations unissant entre eux les côtés et les angles et, pour faciliter l'introduction simultanée de ces quantités de nature différente dans les formules, il était convenable de remplacer les angles, ou les arcs qui les mesurent, par des lignes droites liées avec eux d'une manière précise, variant avec eux et les déterminant dès qu'ils sont eux-mêmes déterminés. Parmi les lignes qui ont été adoptées, celles dont l'usage est le plus fréquent sont au nombre de six ; elles portent les noms suivants :

sinus, *cosinus*, *tangente*, *cotangente*, *sécante* et *cosécante*,

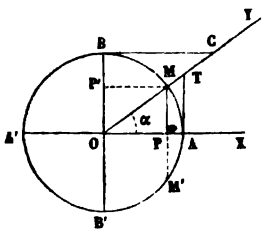
et prennent dans l'écriture, quand elles précèdent immédiatement l'arc auquel elles se rapportent, les abréviations ci-après :

sin, *cos*, *tang*, *cot*, *séc* et *coséc*.

2. Nous allons donner la définition de chacune de ces lignes :

Soit décrite, du sommet O d'un angle XOY comme centre, une circonférence de rayon OA = R; dans cette circonférence, l'angle XOY que nous supposerons provisoirement plus petit qu'un quadrant et que nous désignerons, pour abréger, par α, est mesuré par l'arc AM, qui croît proportionnellement avec lui depuis zéro jusqu'à la circonférence entière, quand, le côté OA restant fixe, l'angle α croît de zéro à 360 degrés.

Fig. 1.



Cela posé, la perpendiculaire MP abaissée de l'extrémité M de l'arc AM sur le rayon OA qui passe par l'autre extrémité, s'appelle, dans la circonférence de rayon R, le *sinus* de l'angle AOM ou $\sin\alpha$.

La ligne OP qui va du centre au pied P du sinus de α, s'appelle le *cosinus* de cet angle ou $\cos\alpha$; on voit que cette longueur est précisément égale à celle MP' du sinus de l'angle MOB, qui lui-même est le *complément* de l'angle α, c'est-à-dire qui forme avec lui une somme égale à 90 degrés.

Digitized by Google

La portion de la tangente à l'origine AT, comprise entre le point A et le point de rencontre T du prolongement du rayon qui passe par l'autre extrémité, s'appelle trigonométriquement la *tangente* de l'angle α ou *tang* α, et la longueur BC, mesurée sur la tangente en B entre ce point et le point de rencontre du même rayon, est dite la *cotangente* de α ou *cot* α; elle est de même égale à la tangente de l'angle complémentaire MOB ou $90° - \alpha$.

Enfin, la *sécante* de l'angle AOM, ou *séc* α, est la portion OT du rayon OM comprise entre le centre du cercle et l'extrémité de la tangente; la portion du même rayon qui va du centre à l'extrémité C de la cotangente est dite la *cosécante* de l'angle α ou *coséc* α; c'est encore la sécante du complément de α, et c'est cette relation qu'on a eu pour but de rappeler en plaçant la syllabe *co* en tête des mots cosinus, cotangente et cosécante.

En résumé, l'ensemble des six lignes trigonométriques de l'angle α est, relativement à la circonférence R, dans la figure ci-dessus :

$$\sin\alpha = MP, \quad \operatorname{tang}\alpha = AT, \quad \operatorname{séc}\alpha = OT,$$
$$\cos\alpha = OP, \quad \cot\alpha = BC, \quad \operatorname{coséc}\alpha = OC.$$

Remarque. — Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que, si l'on prolonge le sinus MP au-dessous du diamètre AA', on obtient la corde MM' qui est double du sinus et sous-tend l'arc MAM', double lui-même de AM. On peut donc dire en général que *le sinus d'un arc moindre qu'une demi-circonférence, est la moitié de la corde qui sous-tend un arc double.* C'est cette relation simple et remarquable que l'on exprime algébriquement par la formule

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\,\text{corde}\,2\alpha.$$

3. Les définitions qui précèdent s'appliquent non-seulement à un angle aigu quelconque, comme on vient de le voir, mais encore à tous les angles compris entre o et 360 degrés, soit qu'il s'agisse d'un angle obtus proprement dit, c'est-à-dire se terminant dans le second quadrant, soit que l'on considère un angle ou une somme d'angles se terminant dans le troisième ou dans le quatrième quadrant. Les trois figures ci-dessous présentent un exemple de chacun de ces cas, et il ne reste que quelques observations de détail à ajouter pour rendre complète leur interprétation.

Fig. 2.

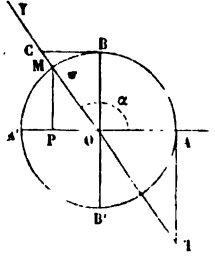


Fig. 3.

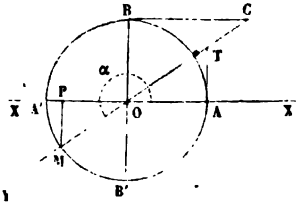
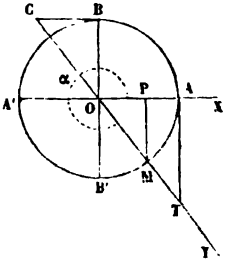


Fig. 4.



Digitized by Google

En suivant avec attention la marche de chacune des lignes trigonométriques, à mesure que l'angle α augmente, on voit sans peine que, dès que cet angle franchit le premier quadrant ou 90 degrés, quelques-unes de ses lignes, tracées et mesurées comme il a été exposé dans le numéro précédent, repassent par des valeurs déjà observées, mais qui cependant diffèrent de celles-ci par leur position ou par le sens dans lequel elles sont comptées; or, ce sont précisément ces différences qui vont nous servir à distinguer entre eux des angles qui se terminent dans telle ou telle région de la circonférence.

C'est ainsi que, de 90 à 270 degrés, le cosinus qui se mesurait à droite du centre sur le diamètre horizontal AA', se porte maintenant vers la gauche, parce que c'est de ce côté que se trouve l'extrémité de l'arc et, par suite, le pied de son sinus; de 180 à 360 degrés, les sinus se trouvent tous au-dessous du même diamètre, puisque c'est dans cette partie du plan que se trouve l'extrémité de l'arc considéré; dans le deuxième et le quatrième quadrant, les tangentes et cotangentes se trouvent les unes au-dessous de l'origine A, les autres à gauche du point B; de 90 à 270 degrés, la sécante qui, mesurée à partir du centre sur le rayon extrême de l'angle, était dirigée dans le sens de ce rayon, se trouve en sens opposé à ce dernier, et la même circonstance se reproduit pour la cosécante quand l'angle considéré varie entre 180 et 360 degrés.

Pour utiliser ces différences au profit de la distinction des arcs ou angles, on a introduit dans les lignes trigonométriques un élément algébrique en affectant du signe des quantités négatives et en introduisant comme tels dans les calculs : 1° les sinus qui seraient géométriquement situés au-dessous du diamètre fixe AA'; 2° les cosinus mesurés à gauche du centre; 3° les tangentes au-dessous de l'origine A; 4° les cotangentes à gauche du point B; 5° les sécantes et les cosécantes qui, à partir du centre, seraient portées en sens inverse du rayon extrême.

Il résulte de ces conventions que, pour des valeurs de α comprises entre 0 et 90 degrés,

$$\begin{array}{l|l|l} \sin\alpha \text{ varie de } 0 \text{ à } +r, & \text{tang}\,\alpha \text{ varie de } 0 \text{ à } +\infty, & \text{séc}\,\alpha \text{ varie de } +r \text{ à } +\infty, \\ \cos\alpha \text{ varie de } +r \text{ à } 0, & \cot\alpha \text{ varie de } +\infty \text{ à } 0, & \text{cosec}\,\alpha \text{ varie de } +\infty \text{ à } +r; \end{array}$$

entre 90 et 180 degrés,

$$\begin{array}{l|l|l} \sin\alpha \text{ varie de } +r \text{ à } 0, & \text{tang}\,\alpha \text{ varie de } +\infty \text{ à } 0, & \text{séc}\,\alpha \text{ varie de } -\infty \text{ à } -r, \\ \cos\alpha \text{ varie de } 0 \text{ à } -r, & \cot\alpha \text{ varie de } 0 \text{ à } -\infty, & \text{cosec}\,\alpha \text{ varie de } +r \text{ à } +\infty; \end{array}$$

entre 180 et 270 degrés,

$$\begin{array}{l|l|l} \sin\alpha \text{ varie de } 0 \text{ à } -r, & \text{tang}\,\alpha \text{ varie de } 0 \text{ à } +\infty, & \text{séc}\,\alpha \text{ varie de } -r \text{ à } -\infty, \\ \cos\alpha \text{ varie de } -r \text{ à } 0, & \cot\alpha \text{ varie de } +\infty \text{ à } 0, & \text{cosec}\,\alpha \text{ varie de } -\infty \text{ à } -r; \end{array}$$

Digitized by Google

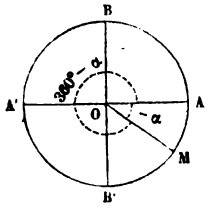
enfin, de 270 à 360 degrés,

$\sin\alpha$ varie de $-r$ à 0,	$\operatorname{tang}\alpha$ varie de $-\infty$ à 0,	$\sec\alpha$ varie de $+\infty$ à $+r$,
$\cos\alpha$ varie de 0 à $+r$,	$\cot\alpha$ varie de 0 à $-\infty$,	$\operatorname{cosec}\alpha$ varie de $-r$ à $-\infty$.

4. Si, comme cela se présente fréquemment dans les applications, on a à considérer une somme d'angles qui dépasse 4 angles droits ou 360 degrés, il est facile de voir que l'extrémité d'un pareil angle venant forcément prendre l'une des positions déjà considérées dans l'un des quatre quadrants, ses lignes trigonométriques seront respectivement les mêmes que celles de l'angle résultant de la soustraction de la circonférence entière ou d'un nombre entier de circonférences, et qu'en général, *deux angles qui ne diffèrent que par un nombre quelconque de circonférences ont les mêmes lignes trigonométriques.*

Par le même motif, si, au lieu de faire croître les angles à partir de zéro vers les valeurs supérieures, on considère *des angles négatifs* comptés en sens contraire à partir de la même origine, les lignes trigonométriques reprendront, mais dans un ordre inverse, les valeurs assignées dans le tableau précédent, et, si l'on considère en particulier un angle négatif $-\alpha$, il est évident que ses lignes trigonométriques, en valeur absolue et en signes, seront les mêmes que celles de l'angle positif $360^\circ - \alpha$ qui en diffère de 360 degrés ou d'une circonférence.

Fig. 5.

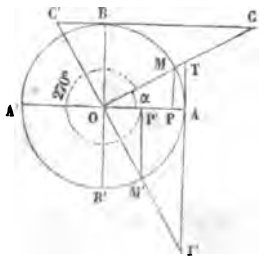


5. *Si la différence des deux arcs était de trois quadrants*, on verrait, à la seule inspection de la *fig.* 6 et par la comparaison deux à deux des triangles qu'elle comporte, que

$M'P' = OP,$	$OP' = MP,$
$AT' = BC,$	$BC' = AT,$
$OT' = OC,$	$OC' = OT.$

En tenant compte des signes suivant les règles posées au n° 3, ces égalités se traduisent trigonométriquement dans les suivantes :

Fig. 6.



$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha;$$

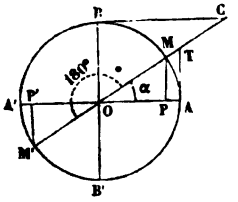
$$\operatorname{tang}(270^\circ + \alpha) = -\cot\alpha,$$
$$\cot(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha;$$

$$\sec(270^\circ + \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(270^\circ + \alpha) = -\sec\alpha.$$

Digitized by Google

Si deux angles diffèrent entre eux de deux quadrants ou d'une demi-circonférence, la figure ci-contre établit de même que leurs sinus et cosinus sont respectivement égaux et de signes contraires; les tangentes et les cotangentes sont les mêmes: les sécantes et les cosécantes sont égales et de signes contraires; en sorte que l'on a

Fig. 7.



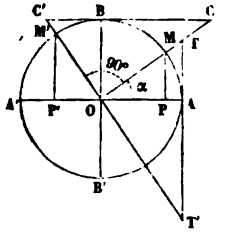
$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tang}(180° + \alpha) = \operatorname{tang}\alpha,$$
$$\cot(180° + \alpha) = \cot\alpha;$$

$$\operatorname{séc}(180° + \alpha) = -\operatorname{séc}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(180° + \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Si deux angles diffèrent d'un quadrant, c'est-à-dire s'ils s'expriment par α et $90° + \alpha$, on reconnaît de même que

Fig. 8.



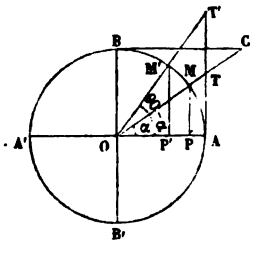
$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tang}(90° + \alpha) = -\cot\alpha,$$
$$\cot(90° + \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha;$$

$$\operatorname{séc}(90° + \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(90° + \alpha) = \operatorname{séc}\alpha.$$

6. Nous avons déjà dit, en définissant les lignes trigonométriques, que les cosinus, cotangente, cosécante d'un angle étaient respectivement les sinus, tangente et sécante du *complément* de cet angle; il résulte nécessairement de là que cette réciprocité s'étend aux six lignes trigonométriques et que l'on a

Fig. 9.



$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\operatorname{tang}(90° - \alpha) = \cot\alpha,$$
$$\cot(90° - \alpha) = \operatorname{tang}\alpha;$$

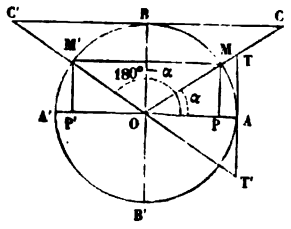
$$\operatorname{séc}(90° - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(90° - \alpha) = \operatorname{séc}\alpha.$$

L'inspection de la *fig.* 9 établit du reste, de la façon la plus évidente, ces nouvelles relations.

Quand deux angles sont supplémentaires, c'est-à-dire lorsque leur somme équivaut à 180 degrés, on a, toujours en combinant les indica-

Digitized by Google

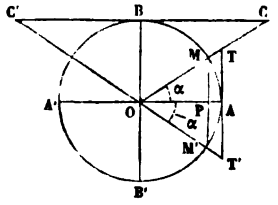
Fig. 10.



tions de la figure avec les règles données plus haut pour les signes,

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tang}(180° - \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha,$$
$$\operatorname{cot}(180° - \alpha) = -\operatorname{cot}\alpha;$$
$$\operatorname{séc}(180° - \alpha) = -\operatorname{séc}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(180° - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Fig. 11.



Enfin, si deux angles sont égaux et de signes contraires, on aura

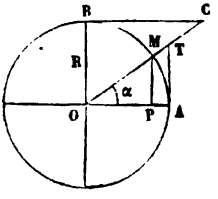
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tang}(-\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha,$$
$$\operatorname{cot}(-\alpha) = -\operatorname{cot}\alpha;$$
$$\operatorname{séc}(-\alpha) = \operatorname{séc}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ARC.

7. Nous avons établi, dans ce qui précède, la nomenclature des six lignes trigonométriques des arcs ou angles, et nous avons fait voir que, quelle que soit la grandeur ou le signe d'un angle, chacune de ses lignes trigonométriques se lie par une relation très-simple à celles d'un angle compris dans le premier quadrant, à tel point que toutes les lignes d'un angle quelconque sont respectivement égales, en valeur absolue et sauf le signe, à quelqu'une de celles d'un angle moindre que 90 degrés.

Nous allons maintenant établir, pour un même angle α, les relations qui unissent entre elles ses six lignes trigonométriques; ces relations sont au nombre de cinq :

Fig. 12.



Soient R le rayon arbitraire, mais constant, de la circonférence dans laquelle nous prenons les mesures angulaires, et α un angle quelconque; soient également construites les six lignes trigonométriques de cet angle.

Le triangle rectangle MOP donne immédiatement

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = R^2,$$

d'où

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = R^2.$$

Digitized by Google

Les triangles semblables OMP, OTA donnent ensuite

$$TA : MP :: OA : OP, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\alpha : \sin\alpha :: R : \cos\alpha,$$
$$OT : OM :: OA : OP, \quad \text{ou} \quad \operatorname{séc}\alpha : R :: R : \cos\alpha,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha = R\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{séc}\alpha = \frac{R^2}{\cos\alpha}.$$

De même, les triangles semblables OMP, BOC fournissent

$$BC : OP :: OB : MP, \quad \text{ou} \quad \operatorname{cot}\alpha : \cos\alpha :: R : \sin\alpha,$$
$$OC : OB :: OM : MP, \quad \text{ou} \quad \operatorname{coséc}\alpha : R :: R : \sin\alpha;$$

d'où

$$\operatorname{cot}\alpha = R\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{et} \quad \operatorname{coséc}\alpha = \frac{R^2}{\sin\alpha}.$$

8. Ces cinq relations, que nous réunissons ici :

$$1^\circ \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = R^2, \qquad 2^\circ \quad \operatorname{tang}\alpha = R\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad 4^\circ \quad \operatorname{séc}\alpha = R^2\frac{1}{\cos\alpha},$$
$$3^\circ \quad \operatorname{cot}\alpha = R\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad 5^\circ \quad \operatorname{coséc}\alpha = R^2\frac{1}{\sin\alpha},$$

sont les seules équations distinctes qui lient entre elles les six quantités $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{cot}\alpha$, $\operatorname{séc}\alpha$, $\operatorname{coséc}\alpha$; si donc l'une des six lignes trigonométriques d'un angle était donnée, il serait toujours facile, au moyen de ces cinq équations, de déterminer chacune des cinq autres.

Comme exemple de ce problème, nous appliquerons ce que nous venons de dire à une question qui se présente assez fréquemment; nous voulons parler de la détermination du sinus et du cosinus d'un angle dont on connaît seulement la tangente.

Les formules propres à conduire à la solution cherchée sont les deux premières de celles qui précèdent; tirant successivement $\cos\alpha$, puis $\sin\alpha$ de la deuxième et les reportant dans la première, nous obtenons d'une part :

$$\cos\alpha = R\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}, \quad \sin^2\alpha\left(1 + \frac{R^2}{\operatorname{tang}^2\alpha}\right) = R^2,$$

d'où

$$\sin^2\alpha = \frac{R^2}{1 + \dfrac{R^2}{\operatorname{tang}^2\alpha}} = \frac{R^2\operatorname{tang}^2\alpha}{R^2 + \operatorname{tang}^2\alpha};$$

d'autre part :

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tang}\alpha\cos\alpha}{R}, \quad \cos^2\alpha\left(1 + \frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{R^2}\right) = R^2,$$

d'où

$$\cos^2\alpha = \frac{R^2}{1 + \dfrac{\operatorname{tang}^2\alpha}{R^2}} = \frac{R^4}{R^2 + \operatorname{tang}^2\alpha},$$

Digitized by Google

enfin,

$$\sin\alpha = \frac{R\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{R^2 + \mathrm{tang}^2\alpha}} \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \mathrm{tang}^2\alpha}};$$

ce sont les deux valeurs cherchées.

On peut, d'ailleurs, facilement vérifier sur la *fig.* 12 la justesse des deux relations qui viennent d'être trouvées; cette figure donne en effet, à cause de la similitude des triangles OMP, OTA et parce que $OT = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{TA}^2}$,

$$MP : TA :: OM : OT, \quad \text{ou} \quad \sin\alpha : \mathrm{tang}\,\alpha :: R : \sqrt{R^2 + \mathrm{tang}^2\alpha},$$

$$OP : OA :: OM : OT, \quad \text{ou} \quad \cos\alpha : R :: R : \sqrt{R^2 + \mathrm{tang}^2\alpha}.$$

9. Dans toutes les formules qui précèdent, le rayon R a conservé une valeur constante, mais quelconque, en ce sens que nous n'avons encore fait aucune hypothèse particulière sur la grandeur du cercle dans lequel nous comptions les angles; il est, en effet, évident *à priori* que les vérités que nous avons déduites sont complétement indépendantes de cet élément. Toutefois, pour la simplification des calculs ultérieurs et pour donner plus de précision aux règles qui vont être posées, il est convenable d'assigner au rayon une valeur déterminée et convenue; celle qu'il était le plus simple et le plus naturel d'adopter était l'*unité* de longueur; la généralité des déductions que nous tirerons des formules n'est, nous le répétons, nullement altérée par cette supposition; seulement, au lieu de représenter des longueurs géométriques, les lignes trigonométriques qui entrent dans les calculs ne sont plus alors que les *rapports*, constants pour un même angle, qui existent entre les sinus, cosinus, tangentes, etc., mesurés dans une circonférence d'un rayon quelconque, et ce même rayon; ces rapports prennent le nom de *lignes trigonométriques naturelles*, et rien n'est si simple que de revenir d'une formule dans laquelle entrent des lignes trigonométriques naturelles à la relation qui lui serait analogue dans une circonférence de rayon R, en remplaçant chacune de ces lignes par le rapport de la même ligne au nouveau rayon.

Ceci posé, les cinq relations fondamentales deviennent, quand on y fait $R = 1$,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \mathrm{séc}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \mathrm{coséc}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},$$

et les formules du sinus et du cosinus en fonction de la tangente donnent

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tang}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tang}^2\alpha}}.$$

Digitized by Google

Ces deux dernières expressions sont également d'un usage fréquent et veulent être retenues ; elles prennent encore une forme plus symétrique et par conséquent plus simple, quand la tangente est donnée sous la forme d'une fraction $\frac{m}{n}$; on a en effet, toutes réductions faites,

$$\sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Exemples. Quel est le sinus et quel est le cosinus de l'angle dont la tangente est $\frac{3}{4}$?

Les formules ci-dessus donnent $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ et $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Si l'on avait $\operatorname{tang}\alpha = \frac{17}{5}$, les formules donneraient de la même manière

$$\sin\alpha = \frac{17}{\sqrt{314}} \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{314}}.$$

Remarque. — Les deux valeurs de $\operatorname{tang}\alpha$ et de $\cot\alpha$ sont telles que leur produit est égal au carré du rayon ou, dans l'hypothèse nouvelle, à l'unité ; il est donc bon de se rappeler que, quelle que soit la valeur de l'angle α, sa tangente et sa cotangente sont des quantités inverses l'une de l'autre et liées par la relation

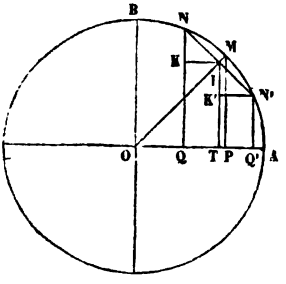
$$\operatorname{tang}\alpha \cot\alpha = 1.$$

PRINCIPALES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DE DEUX ANGLES ET CELLES DE LEUR SOMME OU DE LEUR DIFFÉRENCE.

10. Soient deux arcs AM, MN, que nous appellerons respectivement a et b ; leur somme $a+b$ sera représentée par l'arc AN ; de la sorte, les lignes MP, OP, NI, OI, NQ et OQ représenteront respectivement $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$, $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$.

Fig. 13.



Abaissons du point I les deux perpendiculaires IT et IK sur OA et OB ; cette construction nous donne

$$NQ \text{ ou } \sin(a+b) = KQ + NK = IT + NK,$$
$$OQ \text{ ou } \cos(a+b) = OT - QT = OT - IK.$$

Digitized by Google

Or, les triangles semblables OIT, OMP et KNI donnent, le rayon étant égal à l'unité,

$$\begin{aligned}
&IT : MP :: OI : OM, \quad \text{ou} \quad IT : \sin a :: \cos b : 1, \quad \text{d'où} \quad IT = \sin a \cos b,\\
&NK : OP :: NI : OM, \quad \text{ou} \quad NK : \cos a :: \sin b : 1, \quad \text{d'où} \quad NK = \cos a \sin b,\\
&OT : OP :: OI : OM, \quad \text{ou} \quad OT : \cos a :: \cos b : 1, \quad \text{d'où} \quad OT = \cos a \cos b,\\
&IK : MP :: NI : OM, \quad \text{ou} \quad IK : \sin a :: \sin b : 1, \quad \text{d'où} \quad IK = \sin a \sin b,
\end{aligned}$$

et, par la substitution de ces valeurs dans celles de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$, il vient

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Ces deux expressions sont les formules fondamentales de la Trigonométrie; elles viennent d'être établies pour des angles tels que $a+b<90°$; mais rien ne serait plus facile que de faire une série de démonstrations analogues pour montrer directement qu'elles s'appliquent à tous les cas, quelles que soient les valeurs absolues et relatives de a et de b: cette propriété peut d'ailleurs s'établir aussi par une discussion qui, bien que simple, sort des limites de notre cadre. Nous regarderons, en conséquence, les deux formules ci-dessus comme ayant une généralité complète et pouvant s'appliquer à deux angles quelconques, pourvu que l'on ait égard aux valeurs corrélatives des lignes.

Remarque. — Puisque $\cos a$ et $\cos b$ sont nécessairement des fractions proprement dites, $\sin a \cos b$ est plus petit que $\sin a$, et $\sin b \cos a$ est plus petit que $\sin b$; par suite, $\sin(a+b)$ est toujours plus petit que $\sin a + \sin b$.

11. Les formules les plus importantes parmi celles qui peuvent se déduire des précédentes, sont celles qui fournissent le sinus et le cosinus de la différence de deux arcs a et b.

Nous pourrions simplement y remplacer l'arc b par l'arc négatif $-b$, et nous obtiendrions immédiatement

$$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Mais les formules primitives n'ayant été démontrées directement que pour des arcs positifs, on trouvera peut-être plus satisfaisant de procéder ainsi qu'il suit :

Les relations du n° 10 étant supposées vraies, quels que soient les arcs positifs a et b, rien ne nous empêche de poser

$$a + b = a',$$

d'où

$$a = a' - b,$$

Digitized by Google

et d'y substituer ces valeurs ; il vient alors

$$\sin a' = \sin(a' - b)\cos b + \sin b \cos(a' - b),$$
$$\cos a' = \cos(a' - b)\cos b - \sin(a' - b)\sin b.$$

Si maintenant, après avoir multiplié tous les termes de la première de ces équations par $\cos b$ et ceux de la seconde par $\sin b$, nous retranchons l'une de l'autre les deux relations obtenues, nous trouverons

$$\sin a' \cos b - \cos a' \sin b = \sin(a' - b)(\cos^2 b + \sin^2 b).$$

Or, nous savons (9) que $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$, et la relation précédente se réduit par conséquent à

$$\sin(a' - b) = \sin a' \cos b - \cos a' \sin b.$$

De même, en multipliant la première des équations ci-dessus par $\sin b$ et la seconde par $\cos b$, puis faisant leur somme, on obtient

$$\sin a' \sin b + \cos a' \cos b = \cos(a' - b)(\cos^2 b + \sin^2 b),$$

ou

$$\cos(a' - b) = \cos a' \cos b + \sin a' \sin b.$$

On voit donc que, en supprimant l'accent de a' et ayant soin de ne regarder comme se correspondant que les signes supérieurs ou les signes inférieurs, les valeurs de $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$ et $\cos(a - b)$, en fonction de $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$ et $\cos b$, peuvent se grouper comme il suit :

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

Les valeurs de $\sin(a - b)$ et $\cos(a - b)$ pourraient d'ailleurs aussi s'obtenir directement par une démonstration géométrique tout à fait analogue à celle qui a servi à établir les valeurs de $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$. La *fig.* 13 montre en effet que, en prolongeant NI en IN' de façon que $MN' = b$ et $AN' = a - b$, tirant ensuite N'K' parallèle à OA, on forme le triangle K'N'I semblable aux deux triangles OIT, OMP, et au moyen duquel la démonstration s'achève identiquement comme la première.

Il est inutile d'ajouter que les deux nouvelles expressions comportent un caractère de généralité qui s'établirait par les mêmes moyens qui ont été indiqués plus haut pour $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$.

12. La tangente d'un angle étant, avec le sinus et le cosinus, l'une des lignes trigonométriques le plus usuellement employées, nous allons encore déduire des formules précédentes les valeurs de la tangente de la somme et de la différence des arcs a et b en fonction des tangentes de ces arcs.

Nous avons en effet

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b},$$

Digitized by Google

et si, dans cette expression, nous divisons le numérateur et le dénominateur par $\cos a \cos b$, en remplaçant ensuite $\frac{\sin a}{\cos a}$ par $\operatorname{tang} a$, $\frac{\sin b}{\cos b}$ par $\operatorname{tang} b$, il viendra

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b}{1 \mp \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}.$$

Cette expression montre que si, les angles a et b étant complémentaires, la tangente de leur somme devient infinie, le dénominateur $1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b$ est forcément nul et l'on a

$$\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b = 1.$$

Ce résultat était d'ailleurs facile à prévoir; car, si $a + b = 90°$, $\operatorname{tang} b$ n'est autre chose que $\cot a$, et nous savons (9, Rem.) que, pour un angle quelconque, $\operatorname{tang} a \cot a = 1$.

Des calculs semblables nous conduiraient, sans aucune difficulté, à des valeurs analogues de $\cot(a \pm b)$, $\sec(a \pm b)$ et $\operatorname{cosec}(a \pm b)$; mais ces expressions sont moins usuelles que les premières, et nous ne nous y arrêterons pas.

13. En changeant b en $b + c$ dans les formules ci-dessus et introduisant les valeurs connues de $\sin(b + c)$, $\cos(b + c)$, $\operatorname{tang}(b + c)$, etc., on arriverait ainsi sans peine à trouver $\sin(a + b + c)$, $\cos(a + b + c)$, $\operatorname{tang}(a + b + c)$, etc., et, en général, les lignes trigonométriques d'un arc composé de la somme ou de la différence de tant d'autres que l'on voudrait; sans aller plus loin dans ces calculs qui n'offrent pas d'intérêt pour le but que nous nous proposons, nous mettrons néanmoins en évidence un résultat remarquable qui ressort de la valeur de $\operatorname{tang}(a + b + c)$.

Si dans $\operatorname{tang}(a + b)$ nous changeons b en $b + c$, il vient

$$\operatorname{tang}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang}(b + c)}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang}(b + c)};$$

puis, en remplaçant $\operatorname{tang}(b + c)$ par sa valeur connue, nous aurons

$$\operatorname{tang}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tang} a + \dfrac{\operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c}}{1 - \operatorname{tang} a \dfrac{\operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c}},$$

ou, en chassant les doubles dénominateurs,

$$\operatorname{tang}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c}{1 - (\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} c + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c)}.$$

Or, on peut conclure de cette valeur deux choses :

Digitized by Google

1°. Si $a+b+c=90°$, on a

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\operatorname{tang}90°=\infty,$$

d'où

$$\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}a\operatorname{tang}c+\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c=1.$$

2°. Si $a+b+c=180°$, comme cela a lieu dans tout triangle, on a

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\operatorname{tang}180°=0,$$

t, par suite,

$$\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}c=\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c.$$

Ces deux résultats peuvent ainsi se traduire en langage ordinaire :

1°. *Si trois angles forment une somme égale à 90 degrés, la somme des produits deux à deux de leurs tangentes est égale à l'unité.*

2° *Dans tout triangle, la somme des tangentes des trois angles est égale au produit de ces mêmes tangentes.*

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ANGLE ET CELLES DE L'ANGLE DOUBLE, TRIPLE, QUADRUPLE, ETC.

14. Ces relations se déduisent immédiatement des précédentes, en y supposant que l'angle b devienne égal à l'angle a; ce qui donne

$$\left.\begin{aligned}\sin 2a&=2\sin a\cos a,\\ \cos 2a&=\cos^2 a-\sin^2 a,\end{aligned}\right|\qquad \operatorname{tang}2a=\frac{2\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}^2 a}.$$

Remarquons en passant que la valeur de $\cos 2a$ se prête à une simplification notable qui permet de faire disparaître de la formule le cosinus ou le sinus de l'arc a, au moyen de la relation connue $\sin^2 a+\cos^2 a=1$; on obtient ainsi à volonté :

$$\cos 2a=1-2\sin^2 a,\quad \text{ou}\quad \cos 2a=2\cos^2 a-1.$$

15. Pour passer de là à $\sin 3a$, $\cos 3a$, $\operatorname{tang}3a$, il suffit de faire $b=2a$ dans $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\operatorname{tang}(a+b)$, et d'y substituer les valeurs trouvées plus haut pour $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tang}2a$.

C'est ainsi qu'on obtient, toutes réductions faites,

$$\left.\begin{aligned}\sin 3a&=3\sin a-4\sin^3 a,\\ \cos 3a&=4\cos^3 a-3\cos a,\end{aligned}\right|\qquad \operatorname{tang}3a=\frac{3\operatorname{tang}a}{1-3\operatorname{tang}^2 a}.$$

En faisant enfin $b=3a$, puis $b=4a$, et ainsi de suite, dans les formules fondamentales du n° 10, on arriverait aux relations qui existent entre les lignes trigonométriques d'un multiple quelconque de a et celles de l'angle a lui-même.

Par la même raison que dans le paragraphe précédent, nous ne nous

Digitized by Google

arrêterons pas à établir les valeurs des cotangentes, sécantes et cosécantes des arcs multiples; les méthodes exposées ci-dessus s'appliquent évidemment aussi à ces lignes.

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ANGLE a ET CELLES DES ANGLES $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, ETC.

16. Si, dans les formules relatives à l'arc $2a$, nous remplaçons $2a$ par a, et par conséquent a par $\frac{a}{2}$, elles deviendront

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2},$$

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2} = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1.$$

De la dernière on tire

$$2\sin^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a, \quad \text{ou} \quad \sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}};$$

$$2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a, \quad \text{ou} \quad \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}};$$

et, en divisant l'une par l'autre ces deux valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$, on trouve immédiatement

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}, \quad \cot\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}.$$

17. Il est facile aussi de trouver les sinus, cosinus et tangente de $\frac{a}{2}$ en fonction du sinus de a; pour cela, on combine les formules

$$\sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} = 1, \quad 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a.$$

En les ajoutant ensemble, puis en les retranchant l'une de l'autre, on obtient successivement

$$\left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)^2 = 1 + \sin a, \quad \left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)^2 = 1 - \sin a,$$

ou

$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1+\sin a} \quad \text{et} \quad \sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1-\sin a}.$$

Connaissant maintenant la somme et la différence des deux quantités $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$, il vient, pour les expressions de ces quantités elles-

Digitized by Google

mêmes (*Algèbre*, 2),

$$\sin\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}}{2},\quad \cos\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}}{2},$$

et pour celle de $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$,

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}}{\pm\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}},$$

lesdites expressions admettant autant de valeurs distinctes qu'il peut être fait de combinaisons différentes des signes qu'elles comportent.

18. La valeur trouvée ci-dessus pour $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$, en fonction de $\cos a$, est

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}};$$

et si, dans cette expression déjà simple, nous multiplions sous le radical les deux termes de la fraction alternativement par $1+\cos a$ et par $1-\cos a$, il vient

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 a}{(1+\cos a)^2}}=\pm\frac{\sin a}{1+\cos a}$$

et

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos a)^2}{1-\cos^2 a}}=\pm\frac{1-\cos a}{\sin a}.$$

Ces nouvelles valeurs sont surtout précieuses, parce qu'elles sont débarrassées de radicaux.

19. Enfin, si l'on voulait avoir $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tang} a$, on devrait, dans la formule $\operatorname{tang} 2a=\frac{2\operatorname{tang} a}{1-\operatorname{tang}^2 a}$, remplacer $2a$ par a, et l'on aurait aussi la relation

$$\operatorname{tang} a=\frac{2\operatorname{tang}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{a}{2}},$$

qui revient à l'équation du deuxième degré

$$\operatorname{tang}^2\frac{a}{2}+\frac{2}{\operatorname{tang} a}\operatorname{tang}\frac{a}{2}=1.$$

La résolution de cette équation par la méthode connue (*Algèbre*, 36) conduit à l'expression suivante :

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=-\frac{1}{\operatorname{tang} a}\pm\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tang}^2 a}+1}=\frac{1}{\operatorname{tang} a}\left(-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 a}\right),$$

Digitized by Google

laquelle présente, comme l'on voit, une double valeur de $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ pour chaque valeur de $\operatorname{tang} a$.

20. Pour obtenir les lignes trigonométriques de l'angle $\frac{a}{3}$ en fonction de celle de a, il faut, dans les expressions

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a,$$
$$\operatorname{tang} 3a = \frac{3\operatorname{tang} a}{1 - 3\operatorname{tang}^2 a},$$

remplacer $3a$ par a et, en conséquence, a par $\frac{a}{3}$; il vient alors

$$\sin a = 3\sin\frac{a}{3} - 4\sin^3\frac{a}{3},$$
$$\cos a = 4\cos^3\frac{a}{3} - 3\cos\frac{a}{3}$$

et

$$\operatorname{tang} a = \frac{3\operatorname{tang}\frac{a}{3}}{1 - 3\operatorname{tang}^2\frac{a}{3}}.$$

Ces trois relations sont autant d'équations du troisième degré dans lesquelles les inconnues sont respectivement $\sin\frac{a}{3}$, $\cos\frac{a}{3}$, $\operatorname{tang}\frac{a}{3}$; l'impossibilité de les résoudre algébriquement nous force à les présenter sous cette forme.

Il en serait de même, et à plus forte raison, des lignes relatives à des angles tels que $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{5}$, etc.; nous ne pourrions qu'indiquer les relations qui lient ces lignes à celles de l'angle a, et la méthode pour arriver à ces relations est absolument la même que celle qui a servi pour $\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{3}$.

21. Il nous reste maintenant à expliquer pourquoi, lorsqu'un angle est donné par son sinus, son cosinus ou sa tangente, on obtient plusieurs valeurs pour le sinus, le cosinus et la tangente de la moitié de cet angle et, en général, pour les lignes trigonométriques d'un sous-multiple quelconque dudit angle.

On comprend en effet que, quand on donne le sinus, par exemple, d'un arc AM ou a, on désigne en même temps et au même titre l'arc a et l'arc supplémentaire AM′ ou $\pi - a$, qui a le même sinus; ce sinus appartient en outre à la série indéfinie des arcs que l'on obtient en ajoutant

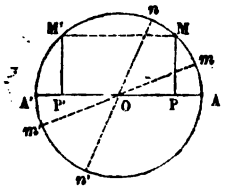
Digitized by Google

à chacun des deux sus-indiqués un nombre quelconque k de circonférences 2π, et tous ces arcs sont par conséquent compris dans l'un des deux groupes représentés par

$$a + 2k\pi, \quad \pi - a + 2k\pi.$$

Si donc on cherche l'expression de l'une des lignes trigonométriques de la moitié de l'arc dont le sinus est a, on ne peut manquer de trouver en même temps la valeur de cette ligne pour les angles égaux à la moitié de tous ceux que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire pour tous les angles groupés dans les deux expressions

Fig. 14.



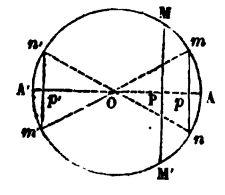
$$\frac{a}{2} + k\pi, \quad \frac{\pi - a}{2} + k\pi,$$

k devant recevoir successivement toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à l'infini; or, ces angles s'obtiennent évidemment tous en ajoutant séparément aux moitiés Am et An des deux angles AM et AM', ou a et $\pi - a$, un nombre croissant de demi-circonférences. Quand on aura ajouté à chacune de ces moitiés deux demi-circonférences, on retombera nécessairement encore sur les points m et n; les arcs dont il s'agit se termineront donc tous en l'un des quatre points m, n, m', n', et, par conséquent, chacune de leurs lignes trigonométriques ne sera susceptible que de quatre valeurs différentes au plus.

La même conclusion s'applique au cas où, l'angle a étant donné par son cosinus, ce cosinus correspond également à l'arc négatif $-a$; elle subsiste aussi quand c'est la tangente de a qui est donnée, car on doit considérer en même temps l'arc $\pi + a$ qui a la même tangente que a. Toutefois, dans certains cas, comme lorsqu'il s'agit de déterminer les lignes trigonométriques de la moitié de a en fonction de cos$a$, les quatre valeurs peuvent devenir égales deux à deux et se réduire à deux, ainsi qu'on l'a vu plus haut (16).

En effet, quand on donne le cosinus OP de l'arc AM et de l'arc négatif AM', le calcul doit conduire aux sinus et cosinus

Fig. 15.



1° de l'arc Am ou $\frac{AM}{2}$ et de ce même arc augmenté d'un nombre quelconque de demi-circonférences, c'est-à-dire d'arcs qui tous se terminent en m ou en m'; 2° de l'arc négatif An et de ce même arc augmenté d'un nombre quelconque de demi-circonférences, c'est-à-dire d'arcs terminés en n ou en n'; or, ces quatre points m, m', n, n' étant symétriques deux à deux par rapport aux deux diamètres principaux du cercle, correspondent à des arcs qui deux à deux ont même sinus et même

Digitized by Google

cosinus, et ceci explique comment on n'a trouvé, pour chacune des lignes $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\cos a$, que deux valeurs égales et de signes contraires.

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion, qui pourrait, par des considérations tout à fait analogues, s'étendre aux autres lignes trigonométriques et à des sous-multiples quelconques de l'arc a. On établirait facilement, par exemple, qu'en général, si l'on cherche à exprimer $\sin\frac{a}{n}$ et $\cos\frac{a}{n}$ en fonction soit de $\sin a$, soit de $\cos a$, on doit trouver $2n$ valeurs, sauf quelques cas où ce nombre se réduit à n, lesquels cas sont signalés dans le tableau suivant :

ÉTANT DONNÉ	TROUVER	NOMBRE DE VALEURS DISTINCTES.	
		n pair.	n impair.
$\sin a$	$\sin\frac{a}{n}$	$2n$	n
	$\cos\frac{a}{n}$	$2n$	$2n$
$\cos a$	$\sin\frac{a}{n}$	n	$2n$
	$\cos\frac{a}{n}$	n	n

AUTRES RELATIONS IMPORTANTES TIRÉES DES FORMULES FONDAMENTALES.

22. Remontons aux formules fondamentales :

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a, \quad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a, \quad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b.$$

En combinant par addition et soustraction ces quatre relations deux à deux, on obtient

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b),$$
$$2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b),$$
$$2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$
$$2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

Digitized by Google

et ces nouvelles formules servent à transformer le produit de deux lignes trigonométriques en une somme ou une différence.

23. Si, dans ces dernières relations, nous faisons

$$a+b=p \quad \text{et} \quad a-b=q,$$

d'où

$$a=\frac{p+q}{2} \quad \text{et} \quad b=\frac{p-q}{2},$$

elles deviendront

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

$$\cos q-\cos p=2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

formules d'un fréquent usage, surtout dans le calcul logarithmique, pour changer une somme ou une différence en un produit.

24. En divisant deux à deux ces quatre dernières formules, et en se rappelant que, en général,

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\operatorname{tang} A=\frac{1}{\cot A},$$

on obtient encore des résultats remarquables, dont toutefois les plus saillants sont ceux-ci :

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\operatorname{tang}\frac{p+q}{2}}{\operatorname{tang}\frac{p-q}{2}},$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\operatorname{tang}\frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\operatorname{tang}\frac{p-q}{2}.$$

Le premier, en particulier, dont nous indiquerons plus loin une application à la résolution des triangles, peut s'énoncer ainsi : *La somme des sinus de deux angles est à leur différence comme la tangente de la demi-somme de ces angles est à la tangente de leur demi-différence.*

C'est ici le lieu de faire remarquer que les diverses formules qui précèdent n'étant que des transformations des relations fondamentales éta-

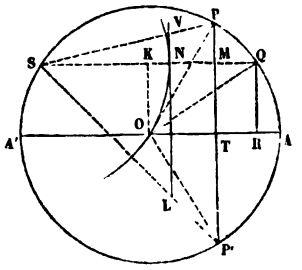
Digitized by Google

blies géométriquement dans les nos 7 et 10, peuvent toutes plus ou moins facilement se démontrer, ou, si on le préfère, se vérifier géométriquement. Comme exemple et comme exercice utile, nous appliquerons cette observation aux trois importantes formules ci-dessus.

Soient, à cet effet, l'angle $AOP = p$, l'angle $AOQ = q$.

Tirons l'horizontale QS et, du point S comme centre avec le rayon du cercle, décrivons l'arc ON; traçons les verticales PTP', QR, KO et VNL, cette dernière étant tangente en N au cercle dont le centre est en S. Il résultera de cette construction :

Fig. 16.



$$QOP' = p + q,$$
$$QOP = p - q;$$
$$QSP' = \frac{QOP'}{2} = \frac{p+q}{2},$$
$$QSP = \frac{QOP}{2} = \frac{p-q}{2};$$

$$\left.\begin{array}{l} PT = \sin p,\ QR = \sin q, \\ OT = \cos p,\ OR = \cos q, \end{array}\right| \begin{array}{l} MP' = P'T + MT = PT + QR = \sin p + \sin q, \\ MP = PT - MT = PT - QR = \sin p - \sin q, \\ MS = MK + KS = OT + OR = \cos p + \cos q; \end{array}$$

$$LN = \operatorname{tang} QSP' = \operatorname{tang} \frac{p+q}{2}, \quad VN = \operatorname{tang} QSP = \operatorname{tang} \frac{p-q}{2}.$$

Cela posé, les trois lignes SP, SQ, SP', coupées par les deux parallèles VL et PP', fournissent immédiatement les trois proportions suivantes :

$$MP' : MP :: LN : VN,$$
$$MP' : MS :: LN : NS \text{ ou } 1,$$
$$MP : MS :: VN : NS \text{ ou } 1,$$

lesquelles ne sont autre chose que les trois relations sus-indiquées.

25. Enfin, en revenant aux formules fondamentales rappelées au n° 22, si nous multiplions membre à membre les deux égalités de chaque couple, nous obtiendrons, par une transformation extrêmement simple et que, pour cette raison, il serait superflu de développer ici, les relations

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a,$$
$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a,$$

qui peuvent servir à remplacer par des produits des différences de sinus ou cosinus carrés.

Digitized by Google

USAGE DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

26. Il n'entre pas dans notre cadre de faire connaître les méthodes qui ont servi à calculer les divers éléments des Tables trigonométriques; nous devons nous borner à exposer : 1° que ces Tables contiennent les sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de tous les angles croissant de minute en minute ou de dix secondes en dix secondes depuis o jusqu'à 90 degrés, les lignes des angles supérieurs à un quadrant étant, comme on l'a vu (3 et suivants), numériquement les mêmes que les premières; 2° qu'au lieu de présenter les valeurs propres des lignes trigonométriques, les Tables renferment les logarithmes de ces lignes, lesquels sont d'un usage beaucoup plus fréquent; 3° qu'enfin ces logarithmes ont été tous augmentés de dix unités, pour éviter les logarithmes négatifs d'un grand nombre de lignes trigonométriques qui, en ce qui concerne les sinus et cosinus, sont toujours moindres que le rayon, de même que les tangentes des angles inférieurs à 45 degrés et les cotangentes des angles plus grands. Ceci revient évidemment à multiplier les lignes trigonométriques naturelles par l'unité suivie de dix zéros, ou à prendre pour rayon des Tables la dixième puissance de 10, sauf à avoir égard à cette circonstance (9) dans l'application des formules, en ne perdant pas de vue que *le logarithme du rayon est* alors *égal à* 10.

27. Les Tables du baron Reynaud renferment les logarithmes à 7 décimales des lignes trigonométriques pour tous les degrés et minutes du quart de la circonférence. Pour tous les angles moindres que 45 degrés, les degrés sont placés au haut des pages et les minutes dans la première colonne à gauche; pour les angles compris entre 45 et 90 degrés, les degrés sont placés au bas des pages et les minutes dans la dernière colonne à droite. Cette disposition, basée sur la propriété des angles complémentaires, évite des répétitions inutiles et réduit de moitié l'étendue de la Table. D'après cette indication, nous trouvons, à la simple lecture, que

$$\log \sin 17^\circ 23' = \log \cos 72^\circ 37' = 9,4753271,$$
$$\log \operatorname{tang} 34^\circ 29' = \log \cot 55^\circ 31' = 9,8368636.$$

La différence entre les logarithmes des sinus et cosinus des angles consécutifs qui diffèrent entre eux d'une minute, est placée dans une colonne spéciale à la droite de l'espace qui sépare ces deux logarithmes; comme pour les logarithmes des nombres, ces différences expriment des unités décimales du septième ordre, et leur emploi se fait aussi par le moyen d'une proportion, dans les calculs relatifs à des angles dont l'expression contient des secondes ou parties de seconde. Une autre colonne, placée entre celles qui sont relatives aux tangentes et cotangentes, renferme les différences communes aux logarithmes de ces deux lignes.

Digitized by Google

Cela posé, l'usage des Tables n'offre aucune difficulté, comme on va le voir par les exemples suivants :

PROBLÈME I. — Soit à *calculer le logarithme du sinus de* 37° 5′ 9″.

Ce logarithme tombe entre log sin 37° 5′, qui est 9,7803000, et log sin 37° 6′, lesquels diffèrent entre eux, d'après la Table, de 0,0001671. Comme pour les nombres, nous aurons ce qu'il faut ajouter au log sin 37° 5, pour avoir celui qui est cherché, en établissant la proportion

$$60'' : 9'' :: 0,0001671 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0,0000251.$$

Par conséquent,

$$\log \sin 37° 5' 9'' = 9,7803000 + 0,0000251 = 9,7803251.$$

Remarque. — Il est entendu que, si l'angle donné était obtus, il faudrait le remplacer par son supplément qui a même sinus que lui.

Soit encore à *calculer log cot* 52° 54′ 51″.

Un premier moyen se présente qui consiste à considérer, au lieu de la cotangente de 52° 54′ 51″, la tangente de son complément 37° 5′ 9″.

Pour opérer directement, la méthode est la même que pour le sinus et la tangente, avec cette différence que, la cotangente diminuant à mesure que l'angle augmente, il faut retrancher le résultat de la proportion du logarithme correspondant au plus petit des deux angles qui comprennent l'angle donné.

Ainsi, l'angle donné étant compris entre 52° 54′ et 52° 55′, le logarithme cotangente cherché tombe entre les logarithmes tabulaires de ces deux angles, c'est-à-dire entre 9,8786907 et 9,8784281, qui diffèrent de 0,0002626.

La proportion

$$60 : 51 :: 0,0002626 : x$$

donne $x = 0,0002232$ qu'il faut retrancher de 9,8786907, et le reste 9,8784675 est le log cot 52° 54′ 51″ cherché.

PROBLÈME II. — *Calculer l'angle dont le log tang est* 9,7803251.

Pour la facilité des recherches, remarquons que le logarithme en question est plus petit que le logarithme 10 de tang 45°; l'angle qui nous occupe est donc moindre que 45 degrés, et nous devons chercher le logarithme donné dans les colonnes dont le titre supérieur est *tang;* nous trouvons ainsi qu'il tombe entre les logarithmes tabulaires 9,7802034 et 9,7804891 de tang 31° 5′ et tang 31° 6′; l'angle cherché est donc composé de 31° 5′, plus un nombre de secondes ou parties de seconde qu'il s'agit de calculer. La proportion à poser dans ce cas est celle-ci :

0,0002857, différence tabulaire : 0,0001217, différence entre le logarithme donné et le logarithme tabulaire immédiatement inférieur :: 60″ : x; d'où

$$x = 26'',7.$$

L'angle cherché est donc 31° 5′ 26″,7.

Digitized by Google

Comme deuxième exemple, *cherchons l'angle dont le log cos est* 9,4755274.

Ce logarithme étant moindre que 9,8494850, c'est-à-dire moindre que log cos de 45°, l'angle cherché est plus grand que 45 degrés; nous devons donc chercher le logarithme donné dans la colonne dont le titre inférieur est cosinus.

Ce logarithme tombe entre 9,4757304 et 9,4753271 qui correspondent respectivement à cos 72° 36′ et cos 72° 37′, et qui diffèrent entre eux de 0,0004033; la proportion qui donne ce qu'il faut retrancher à l'arc 72° 37′ est donc la suivante;

$$0{,}0004033 : 0{,}0002030 :: 60'' : x, \quad \text{et donne} \quad x = 30'',198.$$

L'angle cherché est par conséquent

$$72° 37' - 30'',198, \quad \text{ou} \quad 72° 36' 29'',802.$$

28. Les Tables de Callet sont disposées d'une façon tout à fait analogue à celles de Reynaud, dont elles ne diffèrent essentiellement qu'en ce qu'elles contiennent les logarithmes des lignes trigonométriques des angles de dix en dix secondes pour tout le quart de cercle. On y remarque les degrés écrits hors du cadre en haut et en bas de chaque page; les minutes et secondes qu'on voit à la première et à la seconde colonne se rapportent aux degrés qui sont écrits en haut; les minutes et secondes qu'on trouve à l'avant-dernière et à la dernière colonne se rapportent aux degrés qui sont marqués au bas de la page.

La manière d'opérer avec cette Table est absolument la même que pour celle de Reynaud, à laquelle elle est supérieure, 1° en ce qu'elle donne des résultats plus exacts, puisqu'elle fournit, calculés par les moyens directs, les éléments relatifs à des arcs croissants de 10 secondes en 10 secondes, et qu'elle restreint ainsi considérablement l'étendue des intervalles dans lesquels on est obligé d'avoir recours à une proportion plus ou moins rigoureuse; 2° en ce que, ces intervalles étant moindres, la proportion, plus exacte en elle-même, s'établit en outre entre des différences moindres et présente toujours un terme égal à 10, circonstances qui rendent les calculs plus faciles et plus prompts.

Nous allons répéter, en nous servant des Tables de Callet, la solution des deux problèmes précédents.

PROBLÈME I BIS. — *Calculer le logarithme du sinus de* 39° 23′ 47″.

La Table fournit pour celui de 39° 23′ 40″ le nombre 9,8025381, et pour la différence avec celui de 39° 23′ 50″ la quantité 0,0000256. La proportion différentielle à établir est donc

$$10 : 7 :: 0{,}0000256 : x,$$

d'où

$$x = 0{,}00001792,$$

Digitized by Google

et le logarithme cherché devient ainsi

$$9{,}8025381 + 0{,}0000179 \quad \text{ou} \quad 9{,}8025560.$$

Remarquons, en passant, que les calculs exigés par la proportion ci-dessus peuvent se traduire en une règle générale fort simple; ils reviennent en effet à *multiplier la différence tabulaire par la partie de l'angle donné qui excède le nombre des dizaines de secondes, à supprimer le dernier chiffre à droite du produit et à ajouter le reste au logarithme inférieur, en considérant ce reste comme exprimant des unités décimales du septième ordre.*

Si le nombre donné renferme, outre les secondes, des tierces, des quartes, etc., on réduira ces subdivisions sexagésimales de la seconde en parties décimales, et l'on opérera comme il a été dit plus haut; seulement, dans la pratique, au lieu de retrancher purement et simplement un chiffre à droite du produit des différences, on comprend que, ce produit renfermant nécessairement des figures décimales en nombre indéterminé et variable, la division par 10 devra se faire en avançant la virgule d'un rang vers la gauche, et non plus en supprimant un chiffre à droite.

PROBLÈME II BIS. — *Déterminer à quel angle appartient le log cot* 10,3269785.

Cherchant ce logarithme dans les colonnes *cot* de la Table, nous trouvons qu'il est compris entre 10,3269440 et 10,3269986, qui appartiennent respectivement aux angles 25° 13′ 26″ et 25° 13′ 10″, et qui diffèrent entre eux de 546 unités du septième ordre.

Le logarithme donné différant de celui qui lui est immédiatement inférieur de 345 unités du même ordre, la proportion

$$546 : 345 :: 10 : x$$

nous donne $x = 6''{,}31$, et l'angle cherché est 25° 13′ 13″,69.

On obtient ainsi les unités de secondes et les parties décimales de seconde, qu'il est ensuite facile de convertir, s'il en est besoin, en subdivisions sexagésimales.

Le calcul ci-dessus se réduit encore à la règle générale suivante : *Multiplier par* 10 *les unités décimales du septième ordre qui représentent l'excès du logarithme donné sur celui qui lui est immédiatement inférieur; diviser le produit par la différence tabulaire, et retrancher les secondes obtenues au quotient de l'angle qui correspond au logarithme tabulaire employé.*

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

29. *Étant donnés trois des six éléments linéaires ou angulaires d'un triangle, déterminer numériquement les trois autres;* tel est le but spécial de la trigonométrie; tel est le problème qui nous reste maintenant à traiter, et qui porte le nom de *résolution des triangles*. Hâtons-nous d'ajouter

Digitized by Google

que ce problème n'est susceptible d'une solution complète qu'à cette condition que, parmi les trois données, il entre au moins un côté; car la géométrie nous enseigne que la connaissance des trois angles d'un triangle ne suffit pas pour le déterminer, puisque tous les triangles semblables ont leurs trois angles égaux chacun à chacun.

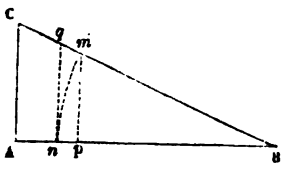
Cela posé, nous allons examiner successivement le cas où, le triangle proposé étant rectangle, deux autres données, dont un côté, suffisent, et celui où le triangle n'a que des angles aigus ou obtus. Nous commencerons toutefois par établir, au moyen des vérités précédemment démontrées, des relations qui lient entre eux les angles et les côtés de tout triangle, et, pour simplifier autant que possible les calculs, nous conviendrons, comme il est d'usage de le faire, de désigner invariablement les trois angles par A, B, C et par a, b, c les côtés respectivement opposés à ces angles; il sera de plus admis que, s'il s'agit d'un triangle rectangle, c'est toujours l'angle A qui sera droit et, par conséquent, a l'hypoténuse.

RELATIONS ENTRE LES COTÉS ET LES ANGLES D'UN TRIANGLE.

30. Théorème I. — *Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent, ou par le sinus de l'angle opposé.*

Soit, en effet, pris $mB = 1$ et soit décrit, avec ce rayon, l'arc de cercle mn, puis tracé le sinus mp de l'angle B. Les triangles semblables ABC, Bmp donnent

Fig. 17.



$$AC : mp :: BC : 1, \quad \text{ou} \quad b : \sin B :: a : 1,$$

d'où l'on tire

$$b = a \sin B = a \cos C,$$

puisque, B et C étant complémentaires, $\sin B = \cos C$.

On a de même

$$c = a \sin C = a \cos B.$$

31. Théorème II. — *Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier, ou par la cotangente de l'angle opposé au second.*

Cette vérité peut se déduire de la précédente, puisque des égalités $b = a \sin B$, $c = a \cos B$, on conclut immédiatement

$$\frac{b}{c} = \frac{a \sin B}{a \cos B} = \operatorname{tang} B, \quad \text{d'où} \quad b = c \operatorname{tang} B = c \cot C,$$

puisque, B et C étant complémentaires, $\operatorname{tang} B = \cot C$.

Digitized by Google

On a de même

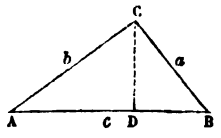
$$c = b \operatorname{tang} C = b \cot B.$$

La démonstration peut d'ailleurs aussi se faire directement en menant sur la figure la tangente nq de l'angle B, et en comparant les triangles semblables ABC et Bnq.

32. THÉORÈME III. — *Dans tout triangle, les côtés sont entre eux comme les sinus des angles opposés.*

Pour le prouver, d'un sommet C du triangle ABC tirons la perpendiculaire CD sur le côté opposé c; cette perpendiculaire détermine deux triangles rectangles ACD, BCD qui fournissent, en vertu du théorème I^er^,

Fig. 18.



$$\text{l'un } CD = b \sin A, \quad \text{l'autre } CD = a \sin B,$$

d'où

$$b \sin A = a \sin B.$$

De là la proportion

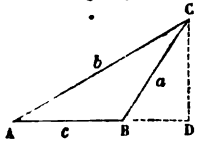
$$a : b :: \sin A : \sin B.$$

On ferait une démonstration analogue en prenant l'un des deux autres sommets A et B pour abaisser la perpendiculaire, et il serait facile d'établir ainsi que

$$a : b : c :: \sin A : \sin B : \sin C. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

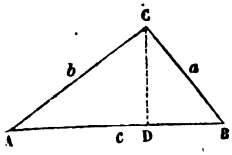
Observation. — Quand la perpendiculaire CD tombe en dehors du triangle, le triangle rectangle BCD n'a pas d'angle qui fasse directement partie de ceux du triangle ABC; mais les angles B de ces deux triangles sont supplémentaires et, par conséquent, leurs sinus sont égaux; la démonstration précédente s'applique donc encore à ce cas.

Fig. 19.



33. THÉORÈME IV. — *Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, moins le double rectangle de ces deux derniers multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

Fig. 20.



En effet, si l'on abaisse la perpendiculaire CD, les triangles rectangles BCD, ACD donnent, l'un

$$a^2 = \overline{CD}^2 + (c - AD)^2 = \overline{CD}^2 + c^2 + \overline{AD}^2 - 2c \times AD,$$

autre

$$\overline{AD}^2 = b^2 - \overline{CD}^2;$$

où, par substitution,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD.$$

Digitized by Google

Mais le triangle ACD fournit encore (30)

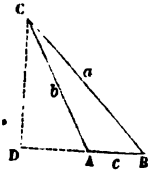
$$AD = b\cos A;$$

donc enfin,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'angle A était obtus, la formule resterait la même; dans ce cas, en effet, la perpendiculaire CD tomberait en dehors du triangle et l'on aurait, d'une part,

Fig. 21.



$$a^2 = \overline{CD}^2 + (c + AD)^2 = CD^2 + c^2 + AD^2 + 2c \times AD,$$

de l'autre,

$$\overline{AD}^2 = b^2 - \overline{CD}^2;$$

d'où

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD.$$

Mais $AD = b\cos CAD$ et, cet angle CAD étant le supplément de l'angle A du triangle, les cosinus de ces deux angles sont égaux et de signes contraires; on a donc

$$AD = -b\cos A,$$

et, par suite encore,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

34. Problème I. — *Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et l'un des angles aigus* B, *par exemple.*

Il s'agit de déterminer, 1° le deuxième angle aigu C qui est le complément de B et égal, par conséquent, à 90° − B; 2° les deux côtés de l'angle droit b et c, lesquels (30) sont donnés par les relations $b = a\sin B$, $c = a\cos B$.

La substitution des valeurs données de a et B dans ces expressions et l'emploi des logarithmes conduiront immédiatement aux valeurs numériques de b et c.

35. Problème II. — *Résoudre un triangle rectangle, connaissant un côté* b *et l'angle aigu opposé* B.

Comme dans le problème précédent, C = 90° − B.

La même relation $b = a\sin B$ donne $a = \dfrac{b}{\sin B}$.

Enfin, la relation (31) $b = c\,\text{tang}\,B$ donnera $c = \dfrac{b}{\text{tang}\,B}$.

36. Problème III. = *Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et un autre côté* b.

Le côté c sera donné par la relation connue

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)};$$

Digitized by Google

l'équation $b = a \sin B$ donnera

$$\sin B = \frac{b}{a};$$

puis enfin,

$$C = 90^\circ - B.$$

Remarque. — L'angle B obtenu par son sinus est déterminé sans aucune incertitude possible, puisque cet angle, faisant partie d'un triangle rectangle, ne saurait être confondu avec son supplément, qui est nécessairement obtus.

37. PROBLÈME IV. — *Résoudre un triangle rectangle, connaissant les deux côtés* b *et* c *de l'angle droit.*

On a (31)

$$b = c \operatorname{tang} B, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} B = \frac{b}{c}.$$

Le second angle aigu C est donc à égal $90^\circ - B$, et l'hypoténuse a se tire de la relation $b = a \sin B$, qui donne

$$a = \frac{b}{\sin B}.$$

RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES.

38. PROBLÈME I. — *Résoudre un triangle, connaissant deux angles* A *et* B *et le côté* a *opposé à l'un d'eux.*

Dans tout triangle, la somme des angles étant égale à 180 degrés, on a de suite

$$C = 180^\circ - (A + B);$$

les trois angles sont donc connus.

D'après le théorème III (32), on peut poser ensuite les proportions

$$\sin A : \sin B :: a : b, \quad \text{d'où} \quad b = a \frac{\sin B}{\sin A},$$

$$\sin A : \sin C :: a : c, \quad \text{d'où} \quad c = a \frac{\sin C}{\sin A},$$

et toutes les inconnues se trouvent déterminées.

39. PROBLÈME II. — *Résoudre un triangle, connaissant deux côtés* a *et* b, *et l'angle* A *opposé à l'un d'eux.*

De la proportion

$$\sin A : \sin B :: a : b$$

nous tirons sur-le-champ

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A;$$

nous avons ensuite

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

Digitized by Google

puis,

$$\sin A : \sin C :: a : c, \quad \text{d'où} \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Discussion. — Cette solution demande quelques éclaircissements : en effet, l'angle B a été obtenu par son sinus qui correspond à deux angles supplémentaires dont l'un est aigu, l'autre obtus. Or, la question posée ne sera complétement résolue que quand nous saurons avec précision lequel des deux angles convient aux données, ou s'il faut les admettre tous les deux comme formant deux solutions distinctes, ou enfin si, par suite d'incompatibilité dans les données, la question n'est susceptible d'aucune solution.

Cette dernière circonstance se présentera nécessairement quand, a étant plus petit que $b \sin A$, la valeur qui en résulterait pour $\sin B$ serait plus grande que 1; la condition pour que la question admette au moins une solution est donc écrite dans la relation

$$a \gtrless b \sin A.$$

Cette condition est du reste identique avec celle que fournit la géométrie, quand on veut construire avec les données le triangle lui-même; on fait en effet un angle A en un point d'une ligne indéterminée; on prend sur le côté ainsi tracé et à partir du point A une longueur $CA = b$; puis, du point C, avec un rayon égal à a, on décrit un arc qui coupe la ligne indéterminée en deux points, qui la touche en un seul ou qui ne la rencontre pas, selon que le côté a est supérieur, égal ou inférieur à la perpendiculaire CD, laquelle n'est autre que $b \sin A$, soit que l'angle A soit aigu, soit que, cet angle étant obtus, la perpendiculaire tombe du côté de son supplément.

Fig. 22.

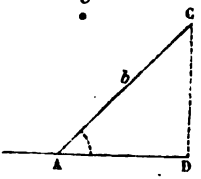
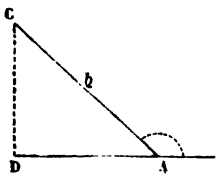
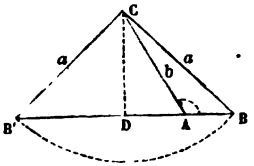


Fig. 23.



Voyons maintenant ce que devient la condition ci-dessus suivant les diverses valeurs de A, c'est-à-dire selon que cet angle est obtus, droit ou aigu.

Fig. 24.

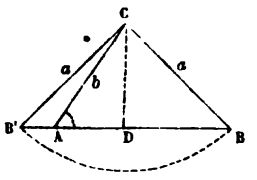


1°. *Si l'angle* A *est obtus ou droit*, l'angle inconnu B est nécessairement aigu, et toute incertitude est levée sur celle des deux valeurs qu'il faut admettre pour l'angle correspondant à $\sin B$; il y a donc, dans ce cas, une solution unique; c'est le triangle ABC de la figure ci-contre.

Digitized by Google

Il est bien entendu que le côté a, qui est donné, doit être forcément plus grand que le côté b aussi donné, puisque l'angle B est nécessairement plus petit que l'angle A ; si cette condition n'était pas remplie, la question serait insoluble, à cause de l'incompatibilité manifeste des données.

Fig. 25.

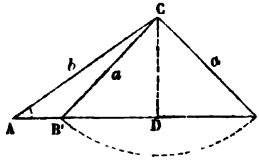


2°. *L'angle* A *étant aigu*, le côté a peut être supérieur, égal ou inférieur à b.

Si $a > b$, l'angle A est encore plus grand que l'angle B, qui est par conséquent aigu, et il y a une solution unique ABC qui ne saurait embarrasser.

Si $a = b$, le triangle est isocèle et l'angle B est égal à l'angle A.

Fig. 26.



Mais si $a < b$, l'angle B, qui est plus grand que l'angle aigu A, peut être lui-même aigu ou obtus, et il y a alors deux solutions ABC, AB'C qui ne se réduisent à une seule que pour le cas limite où, a étant égal à $b \sin A$, les deux côtés CB et CB' se confondent en un seul CD perpendiculaire sur le troisième côté.

40. Si, au lieu de commencer par déterminer les angles B et C, puis le côté c au moyen de l'angle C, on avait désiré se procurer ce côté en fonction des seules données, il eût fallu recourir à la formule suivante, établie au n° 33 :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

elle représente une équation du deuxième degré par rapport à l'inconnue c, et sa résolution donne (*Algèbre*, 36)

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2\cos^2 A} = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}.$$

L'examen de cette expression conduit aux mêmes conséquences que la valeur de $\sin B$ précédemment trouvée, puisque la condition nécessaire pour que la valeur de c soit réelle est, comme l'enseignent les principes élémentaires de l'Algèbre, que la quantité sous le radical soit nulle ou positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$a^2 \gtrless b^2\sin^2 A \quad \text{ou} \quad a \gtrless b\sin A.$$

Mais on renonce le plus souvent à l'avantage plus spécieux que réel que procurerait l'emploi de cette valeur de c, parce qu'il faudrait lui faire préalablement subir une transformation qui permît d'y appliquer le calcul logarithmique.

41. Problème III. — *Résoudre un triangle dans lequel on connaît deux côtés* a *et* b *et l'angle* C *compris par ces côtés.*

Digitized by Google

Nous poserons à cet effet la proportion à deux inconnues A et B,

$$\sin A : \sin B :: a : b,$$

laquelle se transforme, par une propriété connue des proportions (*Arith.*, 94, 2°), en celle-ci :

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B :: a + b : a - b,$$

et nous remplacerons encore cette dernière, au moyen d'une formule établie au n° 24, par la suivante :

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2} : \operatorname{tang}\frac{A-B}{2} :: a+b : a-b.$$

Or, quoique A et B soient tous deux inconnus, nous savons que leur somme est le supplément de l'angle donné C, en sorte que

$$A + B = 180^\circ - C.$$

La proportion qui précède ne renferme donc plus d'inconnu que le terme $\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}$, et elle donne la valeur

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tang}\frac{180^\circ - C}{2},$$

de laquelle on déduit A − B.

La somme et la différence des angles A et B étant alors connues, ces angles le sont par là même (*Algèbre*, 2), et il ne reste plus à déterminer que le côté a: ce côté est donné par la proportion $\sin A : \sin C :: a : c$, de laquelle on tire

$$a = c\frac{\sin A}{\sin C}.$$

42. PROBLÈME IV. — *Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.* Des formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad \text{on tire} \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \quad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Pour vérification, on s'assure ensuite que les valeurs de A, B, C déterminées ainsi satisfont à la condition de rigueur

$$A + B + C = 180^\circ.$$

43. Les trois valeurs ci-dessus de cos A, cos B, cos C, ont l'inconvénient de ne pas admettre commodément l'emploi des logarithmes; mais

Digitized by Google

il est facile de les transformer en d'autres beaucoup plus favorables sous ce rapport. Souvenons-nous en effet (16) que $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$, et mettons dans cette relation la valeur de $\cos A$ que nous venons de trouver; il viendra

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc};$$

d'où nous tirons, en extrayant la racine carrée,

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Or, si l'on pose

$$a+b+c = 2p,$$

d'où

$$a+b-c = 2(p-c) \quad \text{et} \quad a-b+c = 2(p-b),$$

il vient enfin

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

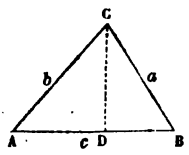
Les mêmes calculs conduisent à

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Remarquons encore que les trois angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ et $\frac{C}{2}$ étant nécessairement aigus, il ne peut y avoir d'incertitude sur le choix entre les deux angles respectivement fournis par les valeurs de $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$ et $\sin\frac{C}{2}$, et, par suite, il n'y a aucun doute possible sur les valeurs à prendre pour A, B, C.

44. Comme corollaire du numéro précédent, nous allons montrer comment les transformations qui y ont été faites conduisent à une expression très-remarquable de la surface d'un triangle en fonction seulement de ses trois côtés.

Fig. 27.



Cette surface est en effet, comme l'on sait,

$$S = \frac{1}{2}AB \times CD = \frac{1}{2}c \times b\sin A,$$

ou, en remplaçant $\sin A$ par sa valeur $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ (16),

$$S = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Digitized by Google

Or, nous savons déjà que

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

et la valeur de $\cos\frac{A}{2}$ tirée de celle-ci se réduit à

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

nous avons donc, en substituant dans S,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

formule simple et symétrique par rapport aux trois côtés a, b, c, et qui, appliquée comme exemple aux données

$$a = 2^{m}, \quad b = 1^{m},80 \quad \text{et} \quad c = 1^{m},70,$$

donne

$$S = \sqrt{2,75 \times 0,75 \times 0,95 \times 1,05} = 1^{mc},43.$$

45. Enfin, nous terminerons par une application numérique de résolution d'un triangle, et nous choisirons le *cas douteux* (39).

Soit donc proposé de résoudre le triangle dans lequel on connaît

$$a = 2^{m},50, \quad b = 3^{m},20 \quad \text{et} \quad A = 46°21'35''.$$

Calculant d'abord B par la formule

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A,$$

qui devient, par l'application des logarithmes,

$$\log\sin B = \log b + \log\sin A - \log a,$$

nous avons

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \log b = 3,20 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,5051500 \\ \log\sin A = \log\sin 46°21'35'' = 9,8595507 \end{array}\right\} 10,3647007 \\ \log a = \log 2,50 \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0,3979400 \end{array}\right\} 9,9667607 = \log\sin 67°52'5'',41.$$

B étant ainsi égal à $67°52'5'',41$, on a

$$A + B = 46°21'35'' + 67°52'5'',41 = 114°13'40'',41,$$

et, par suite,

$$C = 180° - (A + B) = 65°46'19'',59.$$

Il reste maintenant à trouver c qui vient de la formule $c = a\frac{\sin C}{\sin A}$. On en tire

$$\log c = \log a + \log\sin C - \log\sin A,$$

Digitized by Google

et l'application numérique de cette relation aux données se fait comme il suit :

$$\left.\begin{array}{l}\log a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,3979400 \\ \log \sin C = \log \sin 65^\circ 46' 19'',59 = 9,9599569 \\ \log \sin A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 9,8595507\end{array}\right\} \begin{array}{l}10,3578919 \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} 0,4983462 = \log 3,15.$$

En rapprochant des données les résultats obtenus, nous voyons que les éléments du triangle dont il s'agit se résument ainsi :

$$\begin{array}{l|l} a = 2^m,50, & A = 46^\circ 21' 35'', \\ b = 3^m,20, & B = 67^\circ 52' 5'',41, \\ c = 3^m,15, & C = 65^\circ 46'' 19'',59. \end{array}$$

46. Comme on l'a vu dans la discussion générale (39), il y a ici lieu d'examiner attentivement les diverses circonstances de la question posée. Sans rentrer dans les déductions précédemment établies, nous pouvons dire sur-le-champ que, l'angle donné A étant aigu et le côté donné a plus petit que b, il y a nécessairement deux solutions, c'est-à-dire un second triangle satisfaisant aux données, et dont l'angle B' est le supplément $112^\circ 7' 54'',59$ de l'angle B déterminé plus haut. L'angle C' de ce second triangle sera, comme pour le premier, le supplément de la somme A + B' et égal par suite à $21^\circ 30' 30'',41$.

Enfin, le côté c' sera fourni par la relation $c' = a\dfrac{\sin C'}{\sin A}$, ou

$$\log c' = \log a + \log \sin C' - \log \sin A,$$

et se calculera de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\log a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,3979400 \\ \log \sin C' = \log \sin 21^\circ 30' 30'',41 = 9,5642380 \\ \log \sin A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 9,8595507\end{array}\right\} \begin{array}{l}9,9621780 \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} 0,1026273 = \log 1,27.$$

Les six éléments de ce nouveau triangle sont donc :

$$\begin{array}{l|l} a = 2^m,50, & A = 46^\circ 21' 35'', \\ b = 3^m,20, & B' = 112^\circ 7' 54'',59, \\ c' = 1^m,27, & C' = 21^\circ 30' 30'',41. \end{array}$$

47. Quand on a résolu un triangle, comme nous venons de le faire, il est bon de soumettre les résultats à quelques *vérifications* sommaires, capables de faire reconnaître les erreurs capitales, s'il s'en était glissé.

Dans ce but, on s'assure d'abord généralement que les trois angles forment exactement une somme égale à 180 degrés; mais, dans le cas présent où nous avons calculé l'angle C d'après cette condition, la vérification tirée de cette condition elle-même serait naturellement illusoire.

Digitized by Google

On examine en outre si *à un plus grand angle* correspond bien *un plus grand côté ;* cette condition est satisfaite dans nos deux triangles.

Si l'on tenait à des vérifications plus sérieuses, il faudrait les chercher dans une reprise attentive des calculs ou dans d'autres combinaisons de formules, ainsi que nous en avons fait entrevoir un exemple au n° 40.

Remarque essentielle. — Pour les calculs logarithmiques des n^os^ 45 et 46, nous n'avons pas eu à nous occuper d'introduire (26) dans les formules le rayon tabulaire 10^{10}, par la raison que les relations employées n'eussent été nullement modifiées par cette introduction, ainsi qu'on peut le voir en remplaçant, dans la formule $\sin B = \frac{b}{a}\sin A$, par exemple,

$$\sin B \text{ par } \frac{\sin B}{R}, \quad \text{et} \quad \sin A \text{ par } \frac{\sin A}{R}.$$

Mais il n'en est généralement pas ainsi, et il ne faut jamais perdre de vue que, sauf les cas particuliers, toutes les formules qui lient les lignes trigonométriques naturelles entre elles ou avec d'autres quantités, demandent à être préparées algébriquement avant l'emploi des Tables logarithmiques. Toutefois, avec un peu d'habitude, on se dispense le plus souvent d'effectuer ces transformations préalables, et les corrections nécessaires se font au cours des calculs ; une omission de cette nature serait d'ailleurs bientôt signalée par des anomalies grossières, et les résultats ne sauraient jamais en être affectés.

Digitized by Google

Digitized by Google

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PRÉLIMINAIRES. — MÉTHODE DES PROJECTIONS.

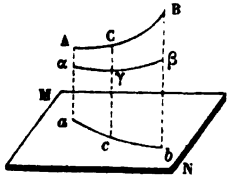
1. L'objet spécial de la *Géométrie descriptive* est de résoudre, par des constructions effectuées sur un seul plan, les questions qui embrassent les trois dimensions de l'étendue. On a compris, en effet, que les figures qui nous ont servi pour exposer les vérités relatives à la Géométrie dans l'espace, n'étaient que de simples représentations perspectives, complétement impropres à la détermination pratique de la véritable grandeur des éléments inconnus des problèmes. Nous savons bien, par exemple, que la distance d'un point à un plan se mesure par la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan; mais, sans le secours de procédés particuliers, dont l'ensemble constitue la Géométrie descriptive, nous resterions complétement impuissants pour fixer la grandeur de cette distance entre un plan et un point donnés.

Plusieurs méthodes sont susceptibles de remplir ce but; la plus simple, la plus féconde de toutes est précisément celle dont nous avons à développer ici les principes; c'est la *méthode des projections*. Elle consiste sommairement à projeter par des perpendiculaires tous les points de l'espace sur deux plans qui se coupent; à établir par la pensée les relations géométriques qui lient les données aux inconnues du problème, et celles qui en résultent entre les projections; à rabattre enfin les deux plans l'un sur l'autre pour y exécuter les opérations indiquées et y déterminer, d'une part, les projections des quantités cherchées, afin de fixer par une conception inverse leur position dans l'espace; d'autre part, leurs véritables grandeurs.

Les détails qui suivent vont bientôt éclaircir ce que cette première indication peut conserver d'obscur.

2. Nous avons déjà plus d'une fois employé dans cet ouvrage le mot *projection;* appliqué à un point, il désigne le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur un plan; s'il s'agit d'une ligne, c'est le lieu des projections de tous les points de cette ligne.

Fig. 1.



Ainsi, les points A, B, C ont respectivement pour projections sur le plan MN les points a, b, c, et la projection de la courbe ACB est la courbe acb. La perpendiculaire Aa est la *droite proje-*

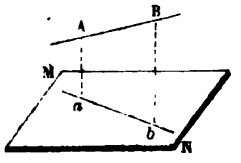
Digitized by Google

tante du point A, et la surface cylindrique A*acb*BC formée par la série des droites projetantes, ou par l'une d'elles A*a*, glissant sur les deux courbes *acb* et ACB, est le *cylindre projetant* de cette dernière.

Remarque. — Il est évident que le point *a* est en même temps la projection de chacun des points α situés sur la droite projetante A*a*, et que toute ligne $\alpha\gamma\beta$ tracée sur le cylindre projetant de la courbe ACB a aussi pour projection la ligne *acb*.

3. Si la ligne ACB était plane et située dans un plan perpendiculaire au plan MN, sa projection serait évidemment la droite d'intersection des deux plans. Cette circonstance se présente toujours, quand la ligne à projeter est elle-même droite; or, comme une ligne droite est déterminée par deux points, il suffira, pour avoir la projection d'une droite donnée AB sur un plan donné MN, d'y projeter deux points A et B de cette ligne, et de réunir par une droite ces deux projections *a* et *b*.

Fig. 2.



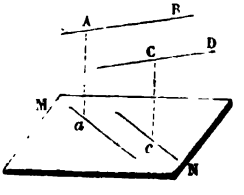
Remarque. — On voit que le plan projetant d'une droite n'est autre que celui qui serait mené par la droite elle-même et par la ligne projetante de l'un de ses points.

Corollaire I. — Si la droite AB était parallèle au plan MN, une portion quelconque de cette droite s'y projetterait en vraie grandeur; car la figure AB*ba* serait, dans ce cas, un rectangle, dans lequel les côtés AB et *ab* seraient égaux.

Corollaire II. — Quand la droite à projeter est perpendiculaire au plan de projection, elle se confond avec les droites projetantes de chacun de ses points, et sa projection se réduit au seul point où elle perce le plan de projection.

Corollaire III. — *Lorsque deux droites* AB, CD, *sont parallèles, leurs projections sur un même plan* MN *sont parallèles.*

Fig. 3.



En effet, les angles BA*a*, DC*c*, dont les côtés sont parallèles deux à deux, ont leurs plans parallèles (*Géom.*, 173), et les intersections de ces derniers avec le plan MN, ou les projections des deux droites AB, CD, sont parallèles entre elles.

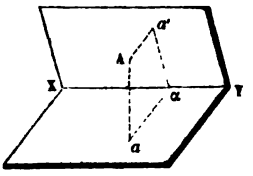
4. La connaissance de la projection d'un point sur un plan donné ne suffit pas pour déterminer ce point, puisque cette projection appartient en même temps à tous les points de la droite projetante; mais le point serait complétement déterminé, si l'on possédait sa projection sur deux

Digitized by Google

plans non parallèles, puisque ce point serait nécessairement situé à la rencontre des deux droites projetantes dont chacune doit le contenir.

On comprend dès lors que deux projections données a, a', sur deux plans qui se coupent, ne peuvent appartenir à un même point A de l'espace, qu'autant que les deux droites projetantes se rencontrent, condition qui équivaut à dire que les perpendiculaires menées par les deux projections sur l'intersection des deux plans tombent au même point de cette intersection.

Fig. 4.

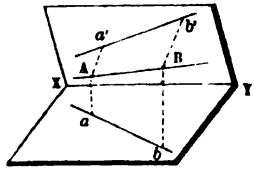


Il est clair, en effet, que le plan des deux droites $a\alpha$, $a'\alpha$ est alors perpendiculaire à l'intersection XY (*Géom.*, 164) et, par suite, à chacun des deux plans de projection (*Géom.*, 180); les deux perpendiculaires élevées en a et a' à ces deux plans sont donc situées dans ce même plan $a\alpha a'$ et s'y rencontrent en A.

Réciproquement, si le point A est projeté en a et a' sur les deux plans, le plan aAa' des droites projetantes sera perpendiculaire à chacun des plans de projection et, par suite, à leur intersection XY (*Géom.*, 180 et 182); ce plan aAa' coupera donc les deux plans de projection suivant deux droites $a\alpha$ et $a'\alpha$ réunies au point α, et toutes deux perpendiculaires à XY.

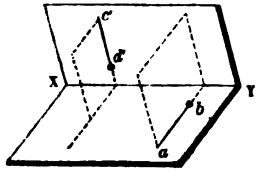
5. Nous avons vu (2, Rem.) que la projection d'une droite sur un plan appartient à toutes les lignes et en particulier à toutes les droites qui seraient tracées dans le plan projetant correspondant; mais si deux projections rectilignes ab, $a'b'$, sur deux plans qui se coupent, sont données comme appartenant à une même droite de l'espace, cette droite sera complétement déterminée, puisqu'elle ne pourra être que l'intersection unique AB des deux plans projetants $abBA$, $a'b'BA$.

Fig. 5.



Il est surabondant de remarquer que deux droites tracées sur deux plans ne peuvent représenter les projections d'une même droite sur ces plans, qu'autant que les deux plans projetants correspondants se coupent dans l'espace; cette condition est généralement remplie, sauf cependant le cas où les deux projections sont toutes deux perpendiculaires à l'intersection XY des deux plans donnés. On voit, en effet, que les deux plans projetants sont tous deux perpendiculaires à chacun des plans de projection et, par suite, à l'intersection XY de ces derniers; ils sont donc parallèles entre eux et ne peuvent se rencontrer.

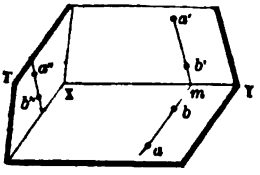
Fig. 6.



Digitized by Google

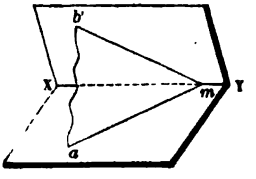
Si cependant les deux projections perpendiculaires à l'intersection rencontraient cette ligne en un même point m, elles détermineraient un plan projetant unique ama' dont une ligne quelconque se projetterait sur ab et $a'b'$; il faudrait donc, pour déterminer une droite AB située dans ce plan, connaître les projections a et a', b et b', de deux de ses points A et B; ou encore, avoir sa projection $a''b''$ sur un troisième plan TX qui ne passât pas par l'intersection XY des deux premiers.

Fig. 7.



6. Un plan serait naturellement et suffisamment déterminé par les projections de trois de ses points non situés en ligne droite; on trouve plus commode de se servir, pour cet usage, de deux des droites qui y sont situées, et celles que l'on a choisies sont les *traces* du plan sur les deux plans de projection, c'est-à-dire les droites suivant lesquelles il coupe ces derniers.

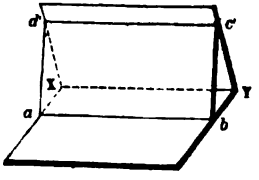
Fig. 8.



Ainsi, le plan amb' sera représenté par le système des deux traces ma, mb' qui se rencontrent nécessairement en un même point de l'intersection XY, attendu que, la rencontre des deux traces devant avoir lieu en un point commun aux deux plans de projection, elle ne peut se trouver que sur leur intersection.

Remarque I. — Ce point de rencontre des deux traces pourrait se trouver à l'infini si, le plan donné étant parallèle à l'intersection XY, ses deux traces ab, $c'd'$ étaient elles-mêmes parallèles à cette intersection.

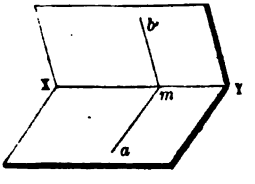
Fig. 9.



Remarque II. — Les traces de deux plans parallèles sur un troisième sont toujours parallèles entre elles, comme étant les intersections de deux plans parallèles par un troisième (*Géom.*, 169).

7. Il importe de bien constater et retenir quel est le caractère distinctif des traces d'un plan, dans chacune des positions particulières qu'il peut affecter par rapport aux plans de projection. Les principales sont les suivantes :

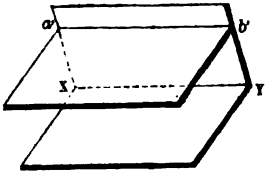
Fig. 10.



1° Si le plan donné est perpendiculaire à l'intersection XY des plans de projection (*fig.* 10), ses traces ma, mb', sont elles-mêmes perpendiculaires à cette ligne.

Digitized by Google

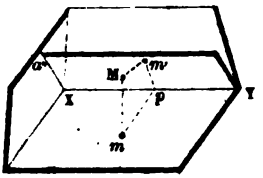
Fig. 11.



2°. Si le plan est parallèle à l'un des plans de projection (*fig.* 11), il n'a pas de trace sur ce dernier plan, et sa trace $a'b'$ sur l'autre est parallèle à l'intersection.

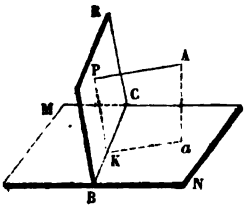
3°. Si le plan passe par l'intersection (*fig.* 12), ses deux traces se confondent avec cette ligne, et il ne peut être déterminé qu'au moyen des projections m et m' de l'un de ses points non situé sur l'intersection, ou mieux au moyen de sa trace Xa'' sur un troisième plan qui ne contienne pas l'intersection des deux premiers.

Fig. 12.



8. Il existe un rapport remarquable entre la position de la projection d'une droite perpendiculaire à un plan et la trace de ce dernier sur un plan commun de projection.

Fig. 13.



Soient BCR un plan dont la trace sur le plan MN est BC, et AP une droite perpendiculaire audit plan BCR. D'un point A de la droite menons Aa perpendiculaire sur le plan MN; le plan PAa sera le plan projetant de AP et coupera le plan MN suivant la projection Ka de cette droite; il coupera en même temps le plan BCR suivant la ligne KP.

Or, le plan PAa qui passe par les deux droites AP et Aa, respectivement perpendiculaires aux plans BCR et MN, est perpendiculaire à leur intersection BC (*Géom.*, 182); cette ligne BC, qui n'est autre chose que la trace du plan BCR, est par conséquent perpendiculaire à la droite Ka située dans le plan PAa, c'est-à-dire à la projection de la droite AP.

De là ce théorème important: *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de cette droite sur un autre plan est perpendiculaire à la trace du premier.*

9. Les explications qui précèdent sont déjà suffisantes pour faire voir comment, sur un système de deux plans qui se coupent suivant une inclinaison convenue, on peut représenter avec exactitude les données et les résultats de tous les problèmes qui se rapportent aux trois dimensions de l'étendue. L'esprit doit s'exercer et s'habitue facilement à voir et à combiner dans l'espace les éléments de semblables questions, au seul aspect des projections et traces sur les deux plans fixes.

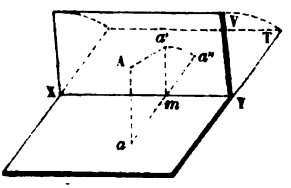
Digitized by Google

Toutefois, le but de la Géométrie descriptive ne serait qu'incomplétement atteint par cette première simplification, et un effort de plus est nécessaire; il consiste à rabattre l'un des deux plans de projection autour de l'intersection commune pour l'appliquer sur l'autre. Cette opération ne change rien à la position des points et des lignes tracés sur celui des deux plans qui n'a pas bougé. Quant aux figures contenues dans le plan rabattu, elles ont changé de position avec lui, et l'on doit les faire revenir par la pensée dans leur plan primitif, toutes les fois que l'on veut en faire usage en les rapprochant de celles auxquelles elles correspondent dans l'espace.

C'est ainsi que peuvent s'opérer graphiquement sur un seul plan les constructions auxquelles donnent lieu les problèmes de Géométrie à trois dimensions; on remplace les grandeurs de l'espace par des figures tracées sur deux plans connus qui se coupent, et l'on rabat ces deux plans l'un sur l'autre pour opérer sur ce dernier plan, en tenant mentalement compte de toutes les transformations que l'on a fait subir aux données. Les difficultés inhérentes à ce travail sont loin d'être si ardues qu'on pourrait le craindre au premier abord; elles disparaissent bientôt, si l'on possède assez familièrement la connaissance des propriétés de la Géométrie élémentaire, et notamment celles de la Géométrie dans l'espace.

10. Il est bon de remarquer que les projections d'un point de l'espace ont, après le rabattement des deux plans l'un sur l'autre, une liaison qui constitue un théorème d'un usage presque continuel.

Fig. 14.



Pendant que le plan XV tourne autour de XY, la droite $a'm$ ne cesse pas d'être perpendiculaire à cette ligne et, par conséquent, quand le plan XV sera appliqué en XT, la ligne $a'm$ sera sur le prolongement $a''m$ de am. Donc, après le rabattement, *les projections d'un même point de l'espace sont toujours situées sur une perpendiculaire à l'intersection des deux plans de projection.*

11. Dans tout ce qui précède, nous n'avons encore fait aucune hypothèse particulière sur l'inclinaison primitive des deux plans de projection; il convient de profiter de cette indétermination pour simplifier autant que possible les études et les constructions. Suivant l'usage établi, nous supposerons toujours ces plans rectangulaires entre eux; pour faciliter le langage, nous considérerons l'un comme *horizontal,* quoiqu'il puisse avoir toute autre position, et l'autre comme *vertical;* leur intersection XY se nommera la *ligne de terre.*

Chaque projection, chaque trace prendra le nom du plan dans lequel

Digitized by Google

elle sera située; ainsi l'on dira, suivant les cas : *projection horizontale* de telle ou telle droite, *trace verticale* de tel ou tel plan.

12. Examinons maintenant quelques précieuses conséquences de cette nouvelle hypothèse faite sur l'inclinaison mutuelle des plans de projection.

1°. *Si un point ou une ligne est situé dans l'un des plans de projection, sa projection sur l'autre plan est située sur la ligne de terre.*

Les perpendiculaires qui déterminent cette projection sont, en effet, dans le premier des deux plans, et tombent nécessairement sur l'intersection.

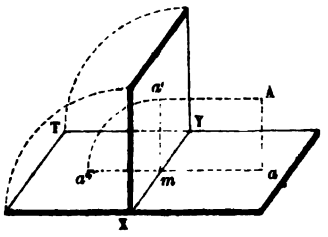
2°. *Toute ligne située dans un plan parallèle à l'un des plans de projection se projette sur l'autre suivant une droite parallèle à la ligne de terre.*

En effet, le plan de la ligne est en même temps son plan projetant (3) et les intersections de ce plan et du premier plan de projection avec le second sont nécessairement parallèles.

3°. *Si un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre est perpendiculaire à la ligne de terre.*

Cela résulte de ce que le second plan de projection est perpendiculaire à la fois au premier et au plan donné, ainsi qu'à leur intersection ou à la trace de celui-ci. Cette dernière est donc elle-même perpendiculaire à la ligne de terre située dans les deux plans de projection.

Fig. 15.



4°. *La distance d'un point de l'espace à l'un des plans de projection est égale à la distance de la ligne de terre à la projection sur l'autre plan.*

On voit, en effet, sans qu'il soit besoin d'autre explication, que la figure A*ama'* est un rectangle dans lequel $Aa = a'm = a''m$, et $Aa' = am$.

13. Ces importants préliminaires une fois posés et bien compris, nous allons établir, conformément au programme, les solutions de quelques problèmes relatifs à la ligne droite et au plan.

Nous rappellerons d'abord que les questions dont il s'agit ici sont des problèmes essentiellement *graphiques* (*Géom.*, 130) et réclament, par conséquent, des constructions faites avec la plus grande précision; l'ensemble d'un dessin de cette espèce porte le nom d'*épure*.

Dans une épure de Géométrie descriptive, on suppose, autant que faire se peut, que toutes les constructions doivent s'opérer dans l'angle formé par la partie antérieure du plan horizontal et la partie supérieure du plan vertical; on suppose, de plus, que le plan du papier, ou de l'aire sur laquelle on opère, représente le plan horizontal, et l'on partage cette aire en

Digitized by Google

deux parties à peu près égales par la ligne de terre, au-dessus de laquelle se trouvent ainsi rabattues l'une sur l'autre la région postérieure du plan horizontal et la région supérieure du plan vertical, tandis que le dessous réunit la région antérieure du plan horizontal et la région inférieure du plan vertical.

Pour éviter la confusion qui pourrait résulter de ce mélange des parties de figures appartenant à des plans différents, nous aurons soin d'attribuer aux points de l'espace les lettres de l'alphabet majuscule A, B, C, etc., dont les projections horizontales seront marquées par les lettres minuscules a, b, c, etc., et les projections verticales par les mêmes lettres affectées d'un accent, a', b', c', etc.

Quant au trait, nous figurerons par des lignes pleines la ligne de terre, ainsi que les données et les résultats de chaque problème; les lignes de construction seront marquées en traits pointillés, qu'on fera varier suivant les besoins et dans l'intérêt de la clarté. Enfin, quand une ligne principale, notamment une de celles qui représentent les données ou les résultats, sera invisible par suite de son passage derrière ou sous un plan de projection, elle sera ponctuée, c'est-à-dire tracée en points ronds.

Avec toutes ces précautions, la confection et la lecture d'une épure devient facile; nous ne voulons cependant pas dissimuler qu'il faille au début s'y exercer attentivement, et qu'il y ait avantage à soulager l'esprit par l'emploi des figures en relief que l'on peut aisément dresser soi-même au moyen de deux plaques de liége figurant les deux plans de projection, et sur lesquelles on fiche à volonté des bouts de fil de fer représentant les lignes diverses de chaque problème. Ce procédé, qui n'est applicable qu'aux problèmes les plus simples, cesse d'ailleurs bientôt d'être nécessaire et même utile.

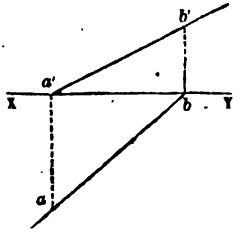
PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE ET LE PLAN.

INTERSECTION DES DROITES ET DES PLANS.

44. Problème I. — *Connaissant les projections d'une droite, trouver ses traces,* c'est-à-dire *les points où elle perce les plans de projection.*

Soient ab et $a'b'$ les deux projections de la droite; cherchons, par exemple, sa trace horizontale. Ce point, appartenant au plan horizontal, se projette verticalement sur la ligne de terre; il est sur la droite donnée, et sa projection verticale doit être aussi sur celle de cette droite; elle est donc au point a' où $a'b'$ coupe XY.

Fig. 16.



La trace horizontale cherchée a donc sa projection verticale en a'; sa projection horizontale, ou plutôt ce point lui-même

Digitized by Google

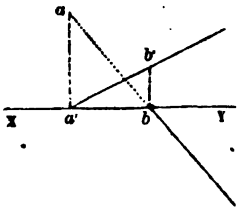
est nécessairement sur la projection horizontale *ab* de la droite, et, par suite, on l'obtiendra en menant par le point *a'* une perpendiculaire à la ligne de terre; c'est *a*.

Par le même raisonnement, on verrait que la trace verticale de la droite donnée est en *b'*, à la rencontre de la projection verticale avec la perpendiculaire menée à la ligne de terre en *b*.

De là cette règle générale : *L'une des traces d'une droite se trouve sur la projection correspondante, à la rencontre de la perpendiculaire élevée par le point où l'autre projection coupe la ligne de terre.*

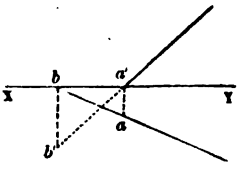
15. Appliquée aux diverses positions que peut affecter la droite par rapport aux deux plans de projection, la règle qui vient d'être formulée conduit aux résultats suivants :

Fig. 17.



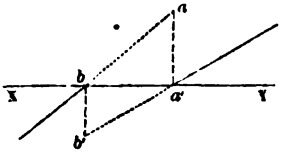
1°. Dans la *fig.* 17, la droite donnée perce le plan horizontal en arrière du plan vertical; cette circonstance fait que sa trace horizontale *a* est située, dans l'épure, au-dessus de la ligne de terre.

Fig. 18.



2°. Dans la *fig.* 18, la droite perce le plan vertical au-dessous du plan horizontal, et la trace verticale se trouve, par ce motif, au-dessous de la ligne de terre.

Fig. 19.



3°. Dans la *fig.* 19, la droite rencontre le plan vertical au-dessous du plan horizontal, et ce dernier en arrière du plan vertical; de là la trace verticale *b'* au-dessous de la ligne de terre, et la trace horizontale *a* au-dessus de cette ligne.

On voit ici déjà tout ce que la clarté gagne au système de notation adoptée.

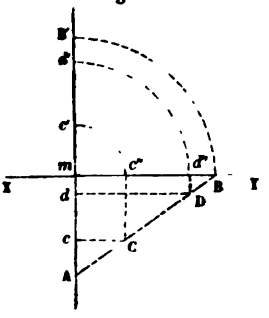
4°. Si la droite est parallèle à l'un des plans de projection, elle n'a pas de trace sur ce plan, et cette circonstance apparaît graphiquement en ce que la projection sur l'autre plan est parallèle à la ligne de terre.

Si le parallélisme a lieu par rapport aux deux plans, la droite manque de ses deux traces à la fois; ses deux projections sont, en effet, toutes deux parallèles à la ligne de terre.

5°. Examinons encore le cas où la droite est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Les traces de ce plan (7, 1°) sont perpendiculaires à la ligne de terre et servent de projection à toutes les

Digitized by Google

Fig. 20.



droites qui y sont situées, lesquelles percent par conséquent les plans de projection en des points également placés sur ces mêmes traces.

La droite donnée ne peut, du reste, être déterminée que par la connaissance des projections de deux de ces points; soient c et c', d et d' les projections de ces deux points. Rabattons le plan qui contient la droite en le faisant tourner autour de sa trace horizontale mc; dans ce mouvement, chacun des points de la droite décrit une circonférence dont le plan est parallèle au plan vertical, dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée sur la trace mc, et dont le rayon est cette perpendiculaire elle-même. On voit donc que, si nous décrivons du centre m un arc de cercle avec mc' pour rayon, si nous traçons cC parallèle à la ligne de terre et c''C perpendiculaire à cette ligne, la rencontre de ces deux droites donnera le point C rabattu.

Par le même procédé, nous obtiendrons le rabattement de D, en sorte que la droite CD sera ainsi rabattue elle-même sur le plan horizontal. Elle coupe en A la trace horizontale du plan qui la contient; c'est donc en ce point qu'est sa propre trace horizontale. Quant à la trace verticale, elle est évidemment rabattue en B, et l'arc BB' la rapporte à sa véritable position B'.

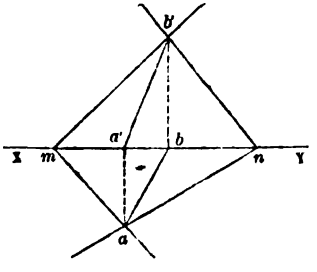
16. Problème II. — *Trouver les projections d'une droite dont les traces sont données.*

Les traces données étant deux points de la droite, il suffit de réunir leurs projections correspondantes pour avoir celles de la droite elle-même. Ainsi (*fig.* 16) on joindra les points a et b pour avoir la projection horizontale ab; la projection verticale sera de même $a'b'$.

Dans le dernier cas particulier du numéro précédent, on obtiendrait par un rabattement la droite elle-même et, par ce moyen, les projections d'autant de points de cette droite qu'on le voudrait.

17. Problème III. — *Connaissant les traces* ma *et* mb', na *et* nb' *de deux plans, déterminer les projections de leur intersection.*

Fig. 21.



Les traces horizontales se coupent en a et les traces verticales en b'; ces deux points a et b' étant tous deux dans l'un et l'autre des plans donnés, ils sont situés sur l'intersection cherchée. Il suffit dès lors de joindre leurs projections horizontales a et b pour

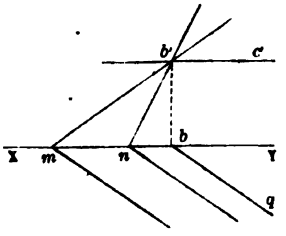
Digitized by Google

avoir la projection horizontale de cette intersection, et leurs projections verticales a' et b' pour avoir la projection verticale de cette même ligne.

18. Quelques cas particuliers de ce problème pourraient embarrasser; nous allons passer en revue les principaux d'entre eux :

1°. Si les traces horizontales, par exemple, étaient parallèles, la construction précédente serait inexécutable; mais il faut remarquer que, dans ce cas, l'intersection des deux plans est elle-même parallèle aux deux traces horizontales, et, par suite, au plan horizontal. Il suffit donc de connaître un point b' de cette intersection, et de mener par la projection verticale b' de ce point une parallèle $b'c'$ à la ligne de terre, et par sa projection horizontale b une parallèle bq aux traces horizontales.

Fig. 22.



Remarque. — Si les quatre traces étaient deux à deux parallèles entre elles, les plans donnés seraient parallèles entre eux, et il n'y aurait pas lieu de chercher leur intersection, si ce n'était dans le cas où les quatre traces seraient toutes parallèles entre elles et à la ligne de terre. Nous étudierons à part cette circonstance.

2°. Quand l'un des plans donnés est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, l'intersection cherchée est nécessairement parallèle à la trace horizontale mr du second plan, puisque ces deux lignes sont les intersections de deux plans parallèles par un troisième; elle passe toujours d'ailleurs au point b' commun aux deux traces verticales, et il suffit de mener par la projection horizontale b de ce point une parallèle à la trace horizontale mr; quant à la projection verticale de l'intersection, c'est la trace $b'p'$ elle-même.

Fig. 23.

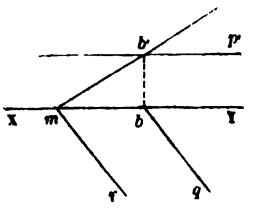
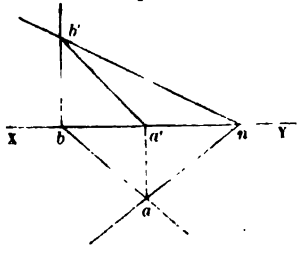


Fig. 24.



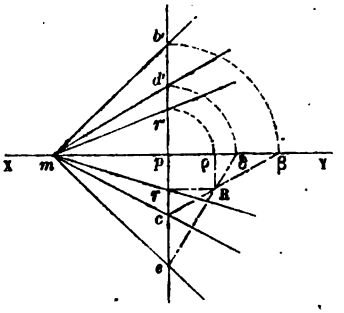
3°. Si l'un des plans donnés est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, ce plan est nécessairement le plan projetant de l'intersection sur le plan horizontal, et sa trace ab est la projection horizontale de cette ligne. La projection verticale s'obtient, comme à

Digitized by Google

l'ordinaire, en joignant les projections verticales a' et b'. La construction se simplifierait encore, si les deux plans étaient perpendiculaires l'un au plan horizontal, l'autre au plan vertical.

4°. Supposons maintenant que les deux plans donnés aient leurs quatre traces mb' et mc, md' et me, concourantes en un même point m de la ligne de terre, circonstance qui indique déjà que l'intersection cherchée passe en ce point.

Fig. 25.



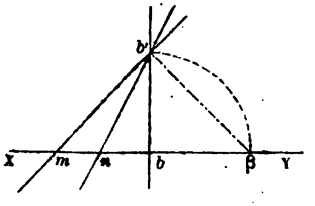
Pour obtenir un second point de cette intersection, nous couperons tout le système par un nouveau plan cpb' perpendiculaire à la ligne de terre, lequel coupera les deux plans donnés suivant deux droites dont le point de croisement appartiendra à l'intersection de ceux-ci.

Or, le plan auxiliaire coupe le plan cmb' suivant une droite qui passe en c et en b', et qu'il est facile de rabattre en $c\beta$ sur le plan horizontal; de même, l'intersection du plan auxiliaire avec le plan emd' est rabattue en $e\delta$, et le point commun à ces deux droites est aussi rabattu en R. La projection horizontale de ce point R s'obtient évidemment en r par la perpendiculaire Rr, qui représente elle-même la distance de la projection verticale à la ligne de terre; cette projection verticale est donc en r', et la jonction de ces projections r et r' du point R avec le point m donne les projections mr, mr' de l'intersection des deux plans donnés.

Remarque. — Si le point commun aux quatre traces s'éloignait à l'infini, ces quatre traces seraient parallèles entre elles et à la ligne de terre, à laquelle les deux plans donnés seraient eux-mêmes parallèles. Leur intersection serait également parallèle à la ligne de terre et aux quatre traces, et sa recherche se réduirait, comme il vient d'être dit, à celle d'un point R par les projections r et r' duquel on tracerait des parallèles à la ligne de terre.

5°. Comme dernier cas particulier, nous examinerons encore celui dans lequel chacun des deux plans donnés est tellement situé par rapport aux deux plans de projections, que le rabattement a pour effet de superposer les deux traces en une seule ligne droite.

Fig. 26.



Les deux droites mb' et nb', qui représentent alors les quatre traces des deux plans donnés, se coupent en un seul point b' qui représente aussi,

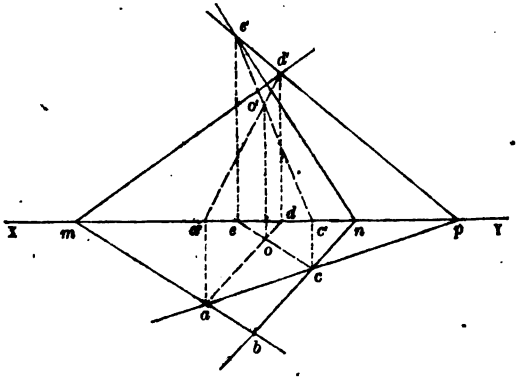
Digitized by Google

superposés par le rabattement, le point commun aux deux traces verticales et le point commun aux deux traces horizontales. La trace verticale de l'intersection des deux plans est donc b' projeté horizontalement en b, et sa trace horizontale est également b' projeté verticalement en b; cette intersection est donc tout entière contenue dans le plan bb' perpendiculaire à la ligne de terre, et elle fait avec chacun des deux plans de projection un angle de 45 degrés.

Un quart de cercle donnerait la longueur $b'6$ de cette intersection entre ses traces verticale et horizontale.

19. Problème IV. — *Connaissant les traces de trois plans, déterminer les projections de leur point d'intersection.*

Fig. 27.



La solution de ce problème est fort simple; elle consiste naturellement à établir l'intersection de deux des trois plans donnés, puis celle d'un autre couple de ces plans; le point où ces deux intersections se coupent est précisément celui qui est commun aux trois plans.

Nous ne détaillerons pas cette construction que le lecteur a déjà saisie par ce que nous venons de dire et par l'examen de l'épure; nous nous bornerons à exposer que deux vérifications précieuses sont offertes : la première consiste en ce que les projections verticales et horizontales des deux intersections de plans doivent se couper respectivement en deux points o et o' qui, si la construction est exacte, se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, puisqu'ils appartiennent au même point O de l'espace. On ferait la seconde vérification en cherchant l'intersection du troisième couple des plans donnés; cette intersection doit évidemment passer aussi par le point O, et ses projections par les points o et o'. Nous n'indiquons pas cette construction complémentaire sur la figure, afin de ne pas nuire à sa clarté.

Remarque. — Nous laissons au lecteur le soin de traiter lui-même, et c'est un exercice aussi facile qu'il est avantageux, les cas relatifs aux diverses positions que peuvent prendre les plans; aucun embarras sérieux ne saurait arrêter les commençants, puisque le problème est toujours

Digitized by Google

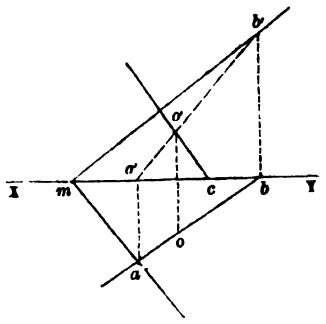
réduit à déterminer l'intersection de deux plans, problème qu'à dessein nous avons étudié d'une manière assez complète.

20. Problème V. — *Déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan donnés.*

La construction générale consiste à faire passer un plan quelconque par la droite donnée, et à chercher l'intersection de ce plan avec celui qui est donné; le point où cette intersection coupe la droite donnée est le point cherché.

Afin de simplifier le plus possible la construction, nous choisirons pour plan auxiliaire celui qui projette la droite donnée sur l'un des plans de projection, sur le plan horizontal, par exemple.

Fig. 28.



Le plan donné étant *amb'*, la droite donnée ayant pour projections *ab* et *co'*, le plan auxiliaire sera *abb'*; son interjection avec le premier est projetée horizontalement en *ab*, et verticalement en *a' b'*. Cette intersection coupe la droite donnée au point projeté en *o* et *o'*; c'est le point cherché.

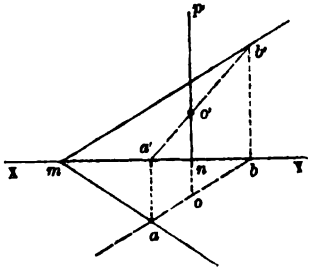
Remarque. — Comme vérification, on pourra refaire cette construction en se servant, pour plan auxiliaire, de l'autre plan projetant de la droite donnée, et l'on devra retomber sur le même point O.

Nous engageons du reste le lecteur à multiplier les exercices, et, dans le problème qui nous occupe, à faire aussi l'épure en prenant pour plan auxiliaire un plan quelconque mené par la droite donnée. Aucune difficulté ne saurait l'arrêter, quand nous aurons dit que toute droite située dans un plan a nécessairement ses traces sur les traces du plan; on aura donc les traces d'un plan passant par la droite donnée, en faisant passer par les traces de cette droite deux droites qui se coupent sur la ligne de terre.

21. Les cas particuliers que présente ce problème sont nombreux; nous nous bornerons à remarquer celui dans lequel la droite donnée est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple. Cette droite a pour projection horizontale le point *o*, qui est aussi celle du point d'intersection cherché, et sa projection verticale est la perpendiculaire *np'* à la ligne de terre. Le plan quelconque mené par la droite sera vertical, et sa trace horizontale passera par le point *o*; soient

Digitized by Google

Fig. 29.



ob cette trace, et *bb'* la trace verticale du même plan.

La construction achevée, comme dans le cas général, donne le point *o'* pour projection verticale du point cherché.

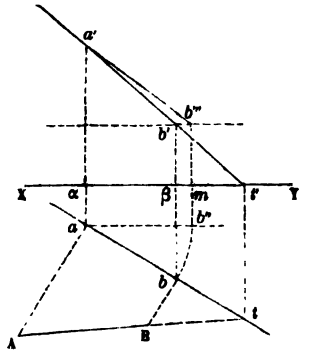
Remarque. — On peut considérer le point *o* comme étant la projection horizontale d'un point situé dans le plan donné *amb'*, lequel point n'est autre chose que l'intersection de ce plan avec la verticale *op'*. Cette construction sert donc aussi à résoudre ce problème : *Étant donnée l'une des projections d'un point situé dans un plan, trouver l'autre projection de ce point.*

DROITES ET PLANS DÉTERMINÉS PAR DIVERSES CONDITIONS.

22. Problème VI. — *Les projections des deux points étant données, trouver celles de la droite qui les unit, et la vraie grandeur de cette ligne entre ces deux points.*

Soient *a* et *a'*, *b* et *b'* les projections des deux points donnés; ils ont évidemment leurs projections sur celles de la droite qu'ils déterminent, et ces projections sont par conséquent *ab* et *a'b'*.

Fig. 30.



Pour avoir la vraie distance AB des deux points donnés, il faut considérer que cette distance est le côté supérieur d'un trapèze rectangulaire dont l'un des autres côtés est *ab*, les deux derniers étant les droites projetantes *a'α* et *b'β*. Nous pouvons donc faire pivoter ce trapèze autour de son côté vertical projeté en *a*, jusqu'à ce que son plan soit parallèle au plan vertical. Sa base est alors devenue *ab''*, et il se projette en vraie grandeur sur le plan vertical en *mαa'b'''*. Il suffit donc, pour le construire, de rapporter la base *ab'* sur la ligne de terre en *αm*, et d'élever en *m* une perpendiculaire égale à *βb'*; le côté *a'b'''* qui en résulte est la grandeur cherchée.

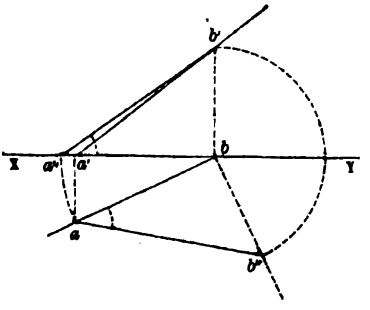
Il était plus simple encore de rabattre le trapèze AB*ba* autour de sa base *ab* sur le plan horizontal où sa construction était facile avec les élé-

Digitized by Google

ments indiqués. Cette méthode, qui peut servir de vérification à la première, se vérifie elle-même par cette considération que, avant comme après son rabattement, la droite AB ne doit pas cesser de passer par sa trace horizontale *t*.

Remarque I. — Si les deux points donnés étaient situés l'un dans le plan vertical, l'autre dans le plan horizontal, les constructions ci-dessus se simplifieraient notablement, puisque le trapèze considéré se réduirait à un triangle rectangle, comme il est indiqué dans la figure ci-contre.

Fig. 31.



On résout ainsi le problème qui a pour objet de trouver la longueur de la portion d'une droite comprise entre les deux plans de projection.

Remarque II. — Il est à peine utile d'avertir que la construction que nous venons de faire sur le plan horizontal peut également s'exécuter sur le plan vertical, et réciproquement.

23. Problème VII. — *Connaissant les projections d'une droite et d'un point, déterminer celles d'une parallèle menée à cette droite par ce point.*

Il suffit (3, Coroll. III) de mener par chaque projection du point une parallèle à la projection correspondante de la droite.

24. Problème VIII. — *Les traces d'un plan étant données, ainsi que l'une des projections d'une droite située dans ce plan, trouver l'autre projection.*

Supposons que la projection horizontale soit donnée, et imaginons un plan vertical mené par cette projection; l'intersection de ce plan vertical avec le plan donné sera la droite dont on cherche la projection verticale. Le problème est ainsi ramené à celui du n° 18, 3°. Nous y renverrons donc, en avertissant simplement que, dans la *fig.* 24, *anb'* est le plan donné, et *ab* la projection donnée.

25. Problème IX. — *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

D'abord, les traces du plan cherché seront parallèles à celles du plan donné (6, Rem. II). Essayons de les déterminer complétement en trouvant un point de chacune d'elles.

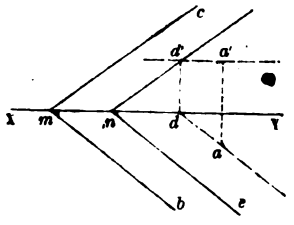
La solution générale consiste à mener dans le plan donné une droite quelconque, et par le point donné une parallèle à cette droite. Cette pa-

Digitized by Google

rallèle sera tout entière dans le plan cherché, et ses traces seront des points des traces du plan, lesquelles seront dès lors entièrement déterminées.

Pour simplifier autant que possible, prenons pour droite auxiliaire située dans le plan donné, la trace horizontale *bm* de ce plan, et menons par le point donné (*a*, *a'*) une parallèle à cette ligne. Les projections de cette parallèle (23) seront *ad* parallèle à *bm*, et *a'd'* parallèle à XY; sa trace verticale est *d''*; c'est aussi un point de celle du plan cherché.

Fig. 32.



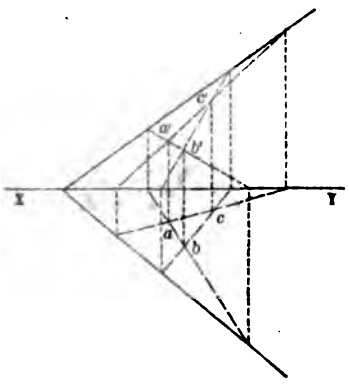
Nous tirerons donc par le point *d''* la parallèle *d''n* à *cm*, et par le point *n* la parallèle *ne* à *bm*; ce sont les traces du plan cherché.

Remarque. — On aurait pu prendre également pour droite auxiliaire la trace verticale du plan donné, et l'on aurait ainsi déterminé un point de la trace horizontale du plan cherché. Si ces deux constructions avaient été opérées simultanément, les deux traces parallèles menées par les deux points obtenus eussent dû, pour vérification, concourir sur la ligne de terre.

26. Problème X. — *Trouver les traces d'un plan qui passe par trois points donnés.*

La solution consiste à mener des droites par les points donnés, pris deux à deux, et à déterminer les traces de ces droites; ces traces sont autant de points des traces du plan cherché.

Fig. 33.



On obtient ainsi trois points de chacune des deux traces du plan, et ces deux traces doivent de plus concourir sur la ligne de terre; cette construction offre donc de nombreuses et faciles vérifications, sans lesquelles on se contenterait, dans la pratique, de trouver un point de l'une des traces et deux points de l'autre.

Corollaire. — Les trois points donnés peuvent être considérés comme les sommets d'un triangle ABC dont on possède ainsi les deux projections, avec les traces du plan dans lequel il est situé.

Nous engageons le lecteur à chercher, pour s'exercer, à rabattre ce

Digitized by Google

triangle, dans le plan horizontal, autour de la trace horizontale de son plan; il pourra ensuite y tracer, par exemple, les hauteurs, les bissectrices, etc., et ramener ensuite la figure à sa position dans l'espace pour déterminer les projections des nouveaux éléments introduits dans le triangle.

27. Le problème qui précède permet de résoudre immédiatement ceux qui ont pour objet de faire passer un plan :

1° Par deux droites concourantes ou parallèles;

2° Par un point et une droite donnés;

3° Par une droite donnée, et parallèlement à une droite donnée;

4° Par un point donné, et parallèlement à deux droites données.

Nous avons, en effet, résolu le problème X en nous procurant les traces de deux droites situées dans le plan cherché; cette condition est remplie d'elle-même dans le premier de ceux que nous venons d'énoncer. Dans le second, on l'obtient en traçant des projections par celles du point donné et d'un point quelconque de la droite donnée, ou même des projections parallèles à celles de la droite donnée. Pour le troisième problème, on prendra un point quelconque sur la première des droites données, et l'on tracera, par les projections de ce point, des projections parallèles à celles de la seconde droite. Enfin, le quatrième problème se résoudra en menant par le point donné des parallèles aux deux droites données.

Nous laissons ces solutions, ainsi que la suivante, comme exercices pour le lecteur.

28. PROBLÈME XI. — *Par un point donné, mener une droite qui coupe deux droites données.*

On construira les traces d'un premier plan passant par le point donné et par l'une des deux droites données; on construira de même les traces d'un autre plan contenant encore le point donné et la seconde droite. L'intersection de ces deux plans sera la droite qui répond à la question.

Il est facile de varier cette solution en se contentant du premier des deux plans ci-dessus, cherchant son intersection avec la seconde droite, et joignant cette intersection au point donné.

Plusieurs vérifications se présentent, et il importe de ne pas les négliger.

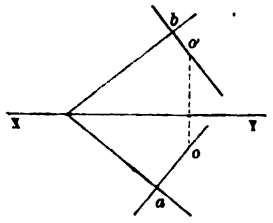
DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES.

29. PROBLÈME XII. — *Construire une droite passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné.*

Les projections de la perpendiculaire doivent passer par celles du point donné (o, o'); elles doivent être, de plus, respectivement perpendiculai-

Digitized by Google

Fig. 34.



res (8) aux traces *am* et *bm* du plan; rien n'est donc plus facile que de les construire.

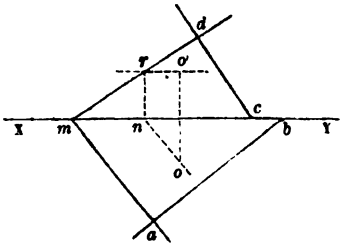
COROLLAIRE. — Il est très-simple de déterminer maintenant les projections (20, Probl. V) du point d'intersection de cette perpendiculaire avec le plan; on obtiendrait également sans difficulté la vraie grandeur (22, Probl. VI) de la ligne qui joindrait ces deux points, ou la *distance* du point au plan. Le lecteur fera bien de s'y exercer.

30. PROBLÈME XIII. — *Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

D'après ce que l'on sait, les traces du plan cherché doivent être perpendiculaires aux projections de la droite donnée; il suffira donc d'avoir un seul point de l'une de ces traces pour qu'elles soient toutes deux déterminées.

Or, puisque nous connaissons la direction des traces du plan cherché,

Fig. 35.



nous pouvons mener, par le point donné (o, o'), une parallèle à la trace horizontale; la projection horizontale de cette parallèle sera, comme la trace cherchée elle-même, perpendiculaire à la projection *ab* de la droite donnée; de plus, sa projection verticale sera parallèle à la ligne de terre, et sa trace *r* sera un point de la trace du plan cherché, puisque cette droite sera nécessairement comprise dans ce plan, comme parallèle à une droite qui y est située tout entière. Nous mènerons donc par ce point *r* la trace *rd* perpendiculaire à *cd*; puis, nous tirerons *ma* perpendiculaire à *ab*, et nous aurons ainsi les deux traces du plan demandé.

Remarque. — On serait parvenu au même résultat par une construction qui diffère un peu de la précédente. On aurait pu mener, par un point quelconque de la ligne de terre, deux traces perpendiculaires aux projections de la droite donnée. Ces traces eussent été celles d'un plan parallèle à celui que l'on cherche, et le Problème IX (25) eût donné le moyen de construire ce dernier.

31. PROBLÈME XIV. — *Mener, par un point donné, une droite perpendiculaire à une droite donnée.*

On résout facilement ce problème en menant, comme il vient d'être

Digitized by Google

dit, un plan passant par le point donné, et perpendiculaire à la droite donnée; en déterminant (20, Probl. V) l'intersection de ce plan et de la droite, et faisant passer une droite par cette intersection et le point donné.

COROLLAIRE. — Par le procédé connu, on déterminerait la distance du point donné au pied de la perpendiculaire, c'est-à-dire la distance du point donné à la droite donnée.

32. PROBLÈME XV. — *Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan donné.*

On abaissera, d'un point quelconque de la droite donnée, une perpendiculaire sur le plan donné (29, Probl. XII); cette perpendiculaire et la droite donnée seront dans le plan cherché, que l'on déterminera comme on l'a indiqué plus haut (27).

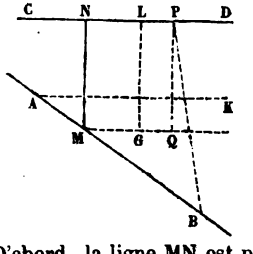
33. PROBLÈME XVI. — *Par un point donné, faire passer un plan perpendiculaire à deux plans donnés.*

Il suffit de chercher l'intersection des deux plans donnés, et d'abaisser du point donné un plan perpendiculaire sur cette intersection; ces questions ont été séparément résolues aux nos 17 et 31.

34. PROBLÈME XVII. — *Deux droites étant données dans l'espace, déterminer leur plus courte distance.*

Soient AB et CD deux droites données et non situées dans le même plan; si, par un point quelconque A de l'une d'elles, nous menons une parallèle AK à l'autre, nous déterminerons un plan KAB qui sera parallèle à CD.

Fig. 36.



D'un point quelconque L de cette dernière, nous abaisserons sur le plan KAB une perpendiculaire et, par le pied G de cette perpendiculaire, nous tirerons à CD la parallèle GM; enfin, par le point M où cette parallèle coupe AB, nous mènerons MN parallèle à LG; cette droite MN, qui rencontre CD en N, est la plus courte distance demandée.

D'abord, la ligne MN est parallèle à LG et, par suite, perpendiculaire au plan KAB; donc, elle est perpendiculaire à la droite AB, à la droite GM, et à sa parallèle CD; c'est donc une perpendiculaire commune aux deux droites données.

Maintenant, cette perpendiculaire commune est la plus courte droite que l'on puisse mener entre AB et CD. Car, si nous la comparons à une droite quelconque PB tirée entre ces deux lignes, nous pourrons mener PQ parallèle et égal à MN, et plus petit que PB comme perpendiculaire nécessairement moindre que l'oblique.

L'application de la méthode des projections à ce problème donne la série d'opérations suivantes :

Digitized by Google

1°. Mener par AB un plan parallèle à CD (27, 3°).

2°. Abaisser d'un point quelconque L de CD une perpendiculaire sur ce plan (29, Probl. XII).

3°. Mener par le pied G de cette perpendiculaire une parallèle GM à CD (23, Probl. VII).

4°. Par le point M où cette parallèle coupe AB, mener une droite MN parallèle à LG (3, Coroll. III).

5°. Déterminer la vraie grandeur de la droite comprise entre le point M et le point N où elle rencontre CD (22, Probl. VI).

Nous ne donnerons pas ici l'épure de cette suite de constructions que nous avons toutes étudiées en particulier; nous engageons le lecteur à s'y exercer et à la répéter dans diverses positions des deux droites données, et surtout à ne pas négliger les vérifications auxquelles elle donne lieu : ces vérifications consistent en ce que les deux projections de chacun des trois points G, M et N doivent se trouver situées sur une même perpendiculaire de la ligne de terre.

ANGLES FORMÉS PAR DES DROITES ET DES PLANS.

35. Problème XVIII. — *Déterminer les angles que fait une droite avec les deux plans de projection.*

L'inclinaison d'une droite sur un plan se mesure par l'angle que fait cette droite avec sa projection sur ce plan; rien n'est plus facile que de construire cet angle. On voit en effet, en se reportant à la *fig.* 31, que la droite, dont les projections sont ab et $a'b'$, forme dans l'espace l'hypoténuse commune à deux triangles rectangles dont les sommets opposés sont les points a et b sur la ligne de terre.

Ces deux triangles renferment, l'un en a l'angle de la droite avec le plan horizontal, l'autre en b' l'angle de cette droite avec le plan vertical; il suffit donc de rabattre ces figures sur les plans de projection pour les y avoir en vraie grandeur.

Dans la figure ci-contre, le triangle abb'' n'est autre que le triangle abb' rabattu autour de sa base ab, et l'angle bab'' est l'angle de la droite donnée avec le plan horizontal.

On aurait aussi l'angle avec le plan vertical en rabattant le triangle $aa'b'$ autour de $a'b'$.

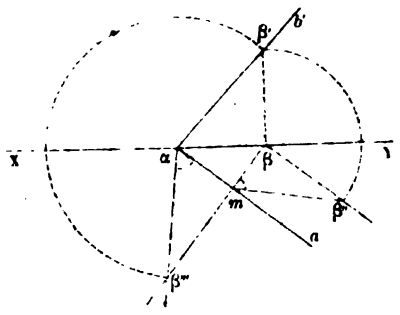
Remarque. — On aurait pu de même rabattre le triangle abb' autour du côté bb' sur le plan vertical en $a''b'b$, et l'angle $ba''b'$ eût été l'angle de la droite avec le plan horizontal; un rabattement analogue du triangle $aa'b'$ autour du côté aa' dans le plan horizontal donnerait l'angle avec le plan vertical.

36. Problème XIX. — *Déterminer les angles que fait un plan avec les deux plans de projection, et l'angle que font entre elles ses deux traces.*

Digitized by Google

Soit $a\alpha b'$ le plan donné ; pour construire l'angle qu'il forme avec le plan horizontal, on mène un plan perpendiculaire quelconque à la trace horizontale ; ce plan qui détermine l'angle cherché, a pour trace horizontale $m\beta$ et pour trace verticale $\beta\beta'$. L'angle cherché fait alors partie d'un triangle rectangle $m\beta\beta'$ que l'on rabat en $m\beta\beta''$; cet angle est $\beta m\beta''$.

Fig. 37.



On ferait la même opération par rapport au plan vertical.

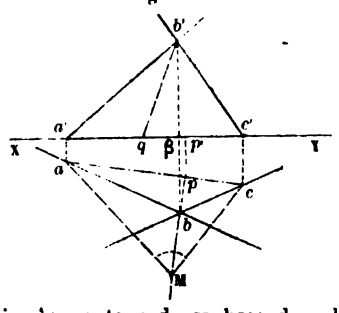
Quant à l'angle des deux traces entre elles, on l'obtient par le rabattement du triangle $m\alpha\beta'$ rectangle en m autour de son côté $m\alpha$; ce triangle vient en $m\alpha\beta'''$, et l'angle des traces est $m\alpha\beta'''$.

37. Problème XX. — *Construire l'angle de deux droites données par leurs projections.*

Si les deux droites données ne se coupaient pas, ce dont on serait averti parce que le point de rencontre de leurs projections verticales et celui de leurs projections horizontales ne seraient pas sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, on mènerait des parallèles à ces droites par un point quelconque, et l'angle formé par ces parallèles mesurerait l'angle des deux droites données. Nous n'avons donc à chercher ici que l'angle de deux droites qui se coupent.

Cela posé, soient ab et $a'b'$, bc et $b'c'$ les projections de deux droites qui se coupent au point (b, b'), et dont les traces horizontales sont respectivement a et c.

Fig. 38



L'angle cherché est évidemment l'angle au sommet d'un triangle dont l'un des côtés est ac, et dont le sommet opposé est le point B, projeté en b et b'. Il faut construire ce triangle, soit en déterminant chacun de ses deux côtés Ba et Bc, soit en le rabattant lui-même autour de sa base dans le plan horizontal.

Le premier moyen est connu, puisque nous savons trouver la vraie grandeur d'une ligne droite limitée par deux points ; nous emploierons ici le second. Pour cela, nous mènerons bp perpendiculaire à la base ac du

Digitized by Google

triangle Bac : ce sera nécessairement la trace horizontale du plan projetant de la hauteur Bp de ce triangle, laquelle hauteur se rabattra, par suite, sur la direction bp, quand on rabattra le triangle lui-même ; reste à savoir en quel point M tombera sur bp le sommet B.

Or, cette hauteur est encore la distance des deux points (b, b') et (p,p') : rien n'est donc encore plus facile que de la déterminer ; il suffit, du reste, de remarquer qu'elle est dans l'espace l'hypoténuse d'un triangle rectangle Bbp, dont l'un des côtés Bb est égal $b'\beta$, et l'autre est bp. Nous prendrons alors sur la ligne de terre βq égal à bp, et l'hypoténuse $b'q$ du triangle $b'\beta q$ sera égale à la hauteur Bp cherchée que nous porterons de p en M. Ainsi sera obtenu le rabattement M du sommet B du triangle Bac dont l'angle aMc est l'angle cherché des deux droites données.

Nous ne nous arrêterons pas à examiner les divers cas particuliers que peut offrir cette question.

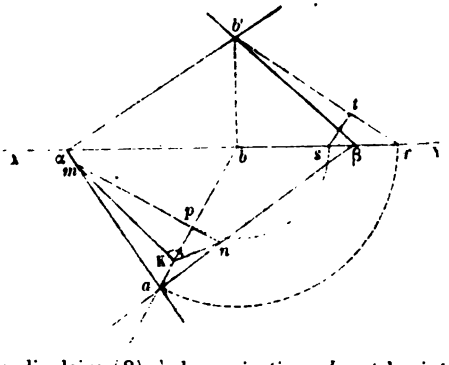
38. Problème XXI. — *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

On sait que, si d'un point quelconque de la droite on abaisse une perpendiculaire sur le plan, l'angle de ces deux droites sera le complément de l'angle cherché ; la question se trouve ainsi ramenée à la précédente, puisqu'il suffira de déterminer les projections d'une perpendiculaire au plan donné, et de déterminer l'angle que fait cette perpendiculaire avec la droite donnée.

39. Problème XXII. — *Construire l'angle de deux plans.*

Cette question peut encore être ramenée à celle du problème XX ; en effet, si d'un point quelconque pris dans l'angle des deux plans donnés, on abaisse des perpendiculaires sur ces plans, l'angle de ces perpendiculaires sera le supplément de celui des deux plans. On donne toutefois au problème actuel une solution directe que nous allons rapporter ; elle consiste à couper les deux plans donnés par un troisième plan perpendiculaire à leur intersection, suivant deux droites qui font entre elles l'angle demandé. Pour déterminer cet angle, nous rabattrons son plan sur l'un des plans de projection.

Fig. 39.



Soient $a\alpha b'$, $a\beta b'$ les deux plans donnés dont l'intersection est projetée horizontalement (17) sur ab. Si nous coupons cette intersection par un plan qui lui soit perpendiculaire, la trace horizontale mn de ce plan sera perpendiculaire (8) à la projection ab, et les intersections dudit plan avec

Digitized by Google

les deux premiers, c'est-à-dire les côtés de l'angle cherché, seront deux droites partant respectivement des points m et n, et allant se couper en un point O de l'intersection ; en d'autres termes, l'angle cherché se trouve au sommet d'un triangle dont la base est mn, et que nous allons construire dans le plan horizontal.

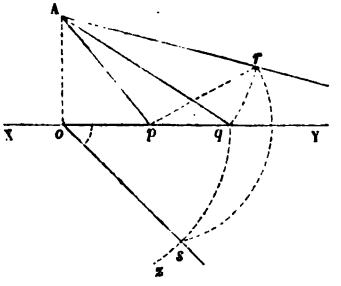
D'abord, le plan vertical abb', qui contient le sommet O, est perpendiculaire à mn, et la droite qui joint le point p au point O est, par suite, elle-même perpendiculaire à mn; c'est la hauteur Op du triangle, et il nous reste à trouver la vraie longueur de cette ligne. Or, puisque le plan du triangle est perpendiculaire à l'intersection des plans donnés, la hauteur est elle-même perpendiculaire à cette intersection; si donc on fait tourner le plan abb' qui contient l'intersection et la hauteur autour de sa trace verticale bb' jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan vertical de projection, les points a et p décriront des arcs de cercle autour du centre b et, l'intersection venant en $b'r$, la hauteur sera la perpendiculaire st abaissée du point s sur $b'r$.

Nous porterons donc la longueur st sur pK, et le triangle mOn sera construit en mKn; l'angle cherché sera donc l'angle mKn.

40. Problème XXIII. — *Réduire à l'horizon l'angle de deux droites.*

Pour réduire un angle à l'horizon, c'est-à-dire, pour déterminer la projection de cet angle sur un plan horizontal, il faut connaître, outre l'angle lui-même, ceux que forment ses deux côtés avec la verticale passant par le sommet. Supposons que le plan projetant de l'un des côtés de l'angle se confonde avec notre plan vertical de projection, et soit, dans ce plan, A le sommet de l'angle dont Ap est l'un des côtés; le second côté, s'il était ramené dans le plan vertical, serait Aq déterminé par la connaissance de l'angle oAq, et son retour à sa position réelle tracerait sur le plan horizontal l'arc de cercle qz. Il reste donc à connaître la distance qui sépare, dans le plan horizontal, le point p du point où le second côté perce ledit plan; un second arc de cercle, décrit avec cette distance pour rayon et le point p pour centre, rencontrerait le premier au point cherché. Or, cette distance est évidemment la base d'un triangle dont les côtés sont égaux à Ap et Aq comprenant entre eux l'angle donné; nous construirons ce triangle en faisant l'angle pAr égal à l'angle donné, en prenant Ar égal à Aq, et tirant pr que nous rabattrons ensuite par un arc pour déterminer le point cherché s. La droite os est donc la projection du second côté de l'angle donné, et cet angle lui-même est projeté sur pos.

Fig. 40.



Digitized by Google

EXERCICES.

41. Nous bornerons ici le développement des questions relatives à la ligne droite et au plan, et nous finirons en proposant comme exercices aux commençants les problèmes suivants :

1°. *Connaissant l'une des projections d'un point situé dans un plan donné, trouver la position qu'occupera ce point sur le plan horizontal, quand on y rabattra le plan donné.*

2°. *Connaissant le rabattement d'un point situé dans un plan donné, construire les deux projections de ce point.*

3°. *Connaissant l'une des projections d'une droite située dans un plan donné, trouver le rabattement de cette droite.*

4°. *Connaissant le rabattement d'une droite située dans un plan donné, construire les deux projections de cette droite.*

5°. *Connaissant les projections d'un triangle, rabattre cette figure dans le plan horizontal, et déterminer ensuite les projections des principaux éléments du triangle, tels que les hauteurs, les bissectrices, les centres des cercles inscrit et circonscrit, etc. Déterminer, enfin, par points les projections des circonférences inscrites et circonscrites.*

6°. *Trouver, sur une droite donnée, un point dont la distance à un point donné soit égale à une longueur donnée.*

7°. *Mener à une droite donnée et située dans un plan donné, une parallèle qui en soit distante d'une longueur donnée.*

8°. *Mener un plan parallèle à un plan donné, et qui en soit distant d'une longueur donnée.*

9°. *Par un point donné, mener une droite qui fasse avec la ligne de terre, ou avec une droite donnée, ou avec les plans de projection, des angles donnés.*

10°. *Étant données les projections et les traces horizontales de deux droites, ainsi que l'angle de ces deux droites, trouver leurs projections verticales.*

11°. *Construire un plan, connaissant sa trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal, ou avec le plan vertical.*

12°. *Par une droite donnée, faire passer un plan qui fasse avec le plan horizontal un angle donné.*

Digitized by Google

13°. *Par un point donné, faire passer un plan qui fasse avec les deux plans de projection des angles donnés.*

14°. *Par un point donné, faire passer un plan perpendiculaire à un plan donné, et faisant avec le plan horizontal un angle donné.*

15°. *Deux plans étant donnés, trouver les traces du plan qui partage leur angle en deux parties égales, ou, plus généralement, dans un rapport donné.*

FIN DU PREMIER VOLUME.

Digitized by Google

MANUEL

DU CONDUCTEUR

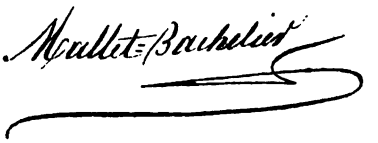
DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Digitized by Google

L'Auteur et **l'Éditeur** de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet ouvrage a été fait à Paris, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, les griffes de l'Auteur et du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces Exemplaires.



PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

Digitized by Google

MANUEL

DU CONDUCTEUR

DES PONTS ET CHAUSSÉES,

RÉDIGÉ

D'APRÈS LE NOUVEAU PROGRAMME OFFICIEL,

PAR E. ENDRÈS,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Ponts et Chaussées
et de la Compagnie des Chemins de fer du Midi.

OUVRAGE INDISPENSABLE

**Aux Conducteurs et Agents secondaires des Ponts et Chaussées
et des Compagnies de Chemins de fer,
aux Agents voyers et à tous les Candidats à ces emplois.**

Avec Figures dans le texte et Planches gravées.

DEUXIÈME ÉDITION

CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE, ET CONTENANT TOUTES LES MATIÈRES DU PROGRAMME.

TOME SECOND.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1857

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

DU SECOND VOLUME.

PARTIE PRATIQUE.

DESSIN GRAPHIQUE ET LAVIS.

Numéros.		Pages.
1.	Préliminaires. — *Dessin graphique*	1
2.	Croquis	1
4.	Instruments du dessin; leur emploi	2
16.	*Lavis*	7
17.	Matériaux et instruments du lavis; leur emploi	8
26.	Détails pratiques sur le lavis à l'encre de Chine	11
31.	Teintes conventionnelles	13

LEVER DES PLANS.

1.	Préliminaires	15
2.	*Mesure des distances.* — Chaîne d'arpenteur; son usage et sa vérification	15
6.	Stadia; son usage et sa vérification	17
12.	*Mesure des angles*	22
13.	Équerre d'arpenteur; son usage et sa vérification	23
22.	Planchette et alidade; usage et vérification	29
26.	Graphomètre; usage et vérification. — Vernier. — Pantomètre	32
31.	Boussole; usage et vérification	35
34.	*Méthodes diverses du lever des plans.* — Lever à l'équerre	39
36.	Lever à la planchette	40
41.	Lever au graphomètre	42
42.	Lever à la boussole	43
46.	*Rapport et dessin des plans.* — Échelle	45
51.	Indication des échelles adoptées dans le service des Ponts et Chaussées	48

Digitized by Google

Numéros. Pages.

52. *Copie et réduction des plans.* — Angle de réduction. — Compas de réduction. — Pantographe 49
64. *Tracé d'un axe sur le terrain.* — Piquetage 56
65. Alignements 57
67. Courbes de raccordement. — Raccordement par un arc de cercle, par un arc parabolique, par deux arcs de cercle. — Raccordement en S 59
79. Plan parcellaire 71

NIVELLEMENT.

1. Préliminaires. — Niveau apparent; niveau vrai. — Différence de niveau de deux points 73
5. *Niveaux.* — Niveau de maçon 76
8. Niveau d'eau 77
13. Niveau à bulle d'air; son usage et sa vérification 80
16. Niveau d'Égault; usage et vérification 81
19. Niveau de Lenoir; usage et vérification 86
22. *Mires.* — Mire à coulisse 88
24. Mire parlante 90
25. *Opération du nivellement.* — Carnet 92
31. *Modes de représentation du terrain adoptés dans le service des Ponts et Chaussées* 99
32. Profil en long. — Profils en travers 99
38. *Plans cotés.* — Courbes de niveau. — Ligne de plus grande pente .. 105
44. *Tracé des profils sur le terrain.* — Indication des points de hauteur pour les déblais et remblais 110
46. *Niveau de pente de Chézy.* — Notions sur les pentes et les rampes .. 112
52. Description et usage du niveau de pente. — Niveau de pente de Lefranc 117
57. Emploi du niveau de pente pour tracer sur le terrain une ligne d'une pente déterminée 120

CUBATURE DES TERRASSES ET MOUVEMENT DES TERRES.

1. *Évaluation du cube des terrassements* par la méthode dite exacte ... 123
6. Évaluation des cubes par les méthodes expéditives 127
13. Usage des Tables dressées par ordre de l'Administration 132
16. Règles générales pour la *répartition des déblais.* — Emprunt, retroussement 137

Digitized by Google

Numéros. Pages

18. *Divers modes de transport.* — Transports à la brouette. — Relais... 138
23. Transports au tombereau..... 142
31. Transports au camion..... 147
36. Transports au wagon. — Baleines de déchargement..... 150
42. Formules qui fixent la limite des distances entre lesquelles il convient de préférer tel ou tel mode de transport..... 153
45. *Détermination de la distance moyenne des transports.* — Tableau du mouvement et de la répartition des déblais et des remblais..... 157
53. Transports sur des rampes..... 163

PRATIQUE DES TRAVAUX.

1. *Notions sur les qualités et les défauts des matériaux.*..... 167
2. Pierres. — Pierres calcaires, siliceuses, argileuses..... 167
9. Briques..... 172
12. Chaux et ciments. — Chaux grasse; chaux maigre. — Chaux hydraulique. — Extinction de la chaux..... 175
18. Sables et pouzzolanes..... 179
26. Mortiers. — Solidification des mortiers..... 182
33. Bétons..... 185
39. Plâtre..... 188
42. Bitumes et mastics bitumineux..... 189
45. Bois de construction. — Défauts généraux des bois. — Essences le plus habituellement employées..... 190
58. Métaux — Fer, cuivre, zinc et plomb..... 197
70. *Emploi des matériaux dans les maçonneries et charpentes.* — *Maçonneries*..... 201
71. Maçonnerie de moellons. — Moellons bruts; moellons smillés; moellons piqués; moellons d'appareil..... 201
77. Maçonnerie de pierre de taille. — Choix des pierres, appareil, taille, bardage, montage, pose et rejointoiement..... 204
90. Maçonnerie de briques..... 215
91. Maçonnerie de béton..... 216
93. *Fondations*..... 218
94. Fondations sur terrains incompressibles..... 219
97. Fondations sur terrains compressibles..... 223
100. Machines à battre les pieux..... 225
103. Machines à épuiser..... 226
108. *Voûtes.* — Voûtes surbaissées, en plein cintre, surhaussées..... 230
109. Tracé de la directrice d'une voûte en arc de cercle..... 232
110. Tracé de la directrice d'une voûte en anse de panier..... 233

Digitized by Google

Numéros. Pages.

117. Appareil spécial des voûtes 238
118. Cintres 240
119. Épaisseur des voûtes à la clef 240
120. Épaisseur des pieds-droits ou culées 241
122. *Charpentes.* — Divers systèmes employés pour assembler ensemble deux pièces de bois 243
123. *Tracé des routes.* — Considérations générales. — Comparaison de plusieurs tracés par les longueurs horizontales équivalentes à chacun d'eux 248
127. *Construction des routes.* — Profil transversal. — Murs de soutènement. — Rouleau compresseur 253
132. *Entretien des routes* 259
133. Organisation du service. — Cantonniers 259
134. Approvisionnement et conservation des matériaux 261
140. Entretien des chaussées d'empierrement 266
142. Entretien des chaussées pavées 276
149. Entretien des parties accessoires des routes 280

LÉGENDES EXPLICATIVES DES PLANCHES.

PLANCHE I. Chaîne d'arpenteur. — Stadia — Pied ordinaire d'instrument. — Équerre d'arpenteur. — Planchette. — Déclinatoire. — Pantomètre 285

PLANCHE II. Alidades. — Graphomètre. — Boussole. — Rapporteur. — Échelle. — Compas de réduction. — Pantographe 288

PLANCHE III. Niveau d'eau. — Niveau de maçon. — Niveau d'Egault. — Niveau-cercle de Lenoir. — Niveau de pente de Chézy. — Niveau de pente de Lefranc 289

PLANCHE IV. Mire à coulisse. — Mire parlante. — Profil en long et profils en travers 292

FIN DE LA TABLE DU SECOND VOLUME.

Digitized by Google

MANUEL

DU

CONDUCTEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

DESSIN GRAPHIQUE ET LAVIS.

DESSIN GRAPHIQUE.

1. Le *dessin* est la représentation sur une surface quelconque, généralement plane, des objets qui frappent nos yeux ou de ceux qu'enfante notre imagination. Laissant de côté les productions artistiques qui constituent le *dessin pittoresque*, nous ne considérerons ici que la branche spéciale qui, sous le nom de *dessin graphique* ou *dessin au trait*, reproduit tantôt les figures géométriques pour la recherche de résultats susceptibles d'être exprimés par des lignes, tantôt des cartes et plans, tantôt encore des machines ou des monuments avec leurs véritables formes, dispositions et dimensions, soit qu'il s'agisse d'œuvres réellement existantes à copier, soit que l'on veuille fixer sur le papier les projets de travaux à exécuter. Eu égard à ces diverses applications, dont l'énumération qui précède peut bien même n'être pas complète, le dessin graphique comprend déjà le *dessin linéaire*, le *dessin topographique*, le *dessin des machines* et le *dessin d'architecture*.

Notre but n'est pas d'exposer les principes propres à chacune de ces parties et d'apprendre à nos lecteurs, sous prétexte de dessin, à dresser des projets d'architecture ou de mécanique appliquée; nous voulons au contraire et seulement leur donner la clef de quelques procédés généraux communs à tous les genres de dessin graphique, et qui, avec de l'exercice et de la dextérité naturelle, permettront à chacun d'aider ses recherches et ses travaux, dans chacune des parties qui comportent l'emploi des figures pour seconder les efforts de la mémoire et les spéculations de l'esprit.

Qu'on ne l'oublie donc pas, les indications qui vont suivre sont précieuses sans doute, mais elles ne sauraient suppléer la pratique. Elles n'enseignent pas le dessin; leur objet unique est de montrer comment s'y prennent le plus commodément ceux qui savent dessiner, et qui l'ont appris *en dessinant* d'abord mal, puis mieux, puis tout à fait bien.

CROQUIS.

2. Lorsque l'on veut copier une figure ou un objet quelconque que l'on ne peut dessiner séance tenante avec le modèle constamment sous les yeux, on doit d'abord en tracer une représentation grossière, expéditive, qui

Digitized by Google

n'imite qu'approximativement les contours, et sur laquelle on cote les véritables dimensions. Au moyen de cette première ébauche, à laquelle on donne le nom de *croquis*, on fait ensuite le dessin exact et complet.

C'est donc une opération fort importante que celle qui consiste à faire un bon croquis; de la clarté de ses indications, de l'abondance des notes et des cotes qu'il renferme, dépend la facilité, quelquefois même la possibilité de faire ensuite le dessin. L'opérateur ne doit, en pareille circonstance, rien confier à sa mémoire, et la meilleure règle est de toujours dresser un croquis comme si la mise au net devait en être faite dix ans plus tard, et par une autre personne qui n'aurait jamais vu l'objet original.

3. Il résulte de ce qui précède que l'exécution expéditive et suffisamment soignée d'un croquis repose, en grande partie, sur la plus ou moins grande dextérité naturelle ou acquise de l'opérateur. On ne saurait donc trop s'exercer à tracer à main levée des figures géométriques. Les opérations élémentaires les plus usuelles sont les suivantes :

1°. Tracer une ligne droite d'un point à un autre : le moyen le plus sûr consiste à placer d'abord le crayon ou la plume sur le premier point, et à tracer résolument la droite en fixant continuellement les yeux sur le second point;

2°. Diviser une droite en deux, trois, quatre.... parties égales;

3°. Tracer des droites horizontales, verticales, perpendiculaires ou parallèles entre elles;

4°. Tracer des angles aigus ou obtus d'une ouverture déterminée;

5°. Tracer un triangle équilatéral, un rectangle, un carré, un losange;

6°. Tracer, avec ou sans l'aide de la circonférence, des polygones réguliers d'un nombre de côtés donné;

7°. Diviser un angle en deux, trois, quatre.... parties égales;

8°. Doubler, tripler, quadrupler.... un angle;

9°. Tracer un cercle autour d'un centre donné;

10°. Décrire des cercles concentriques, équidistants;

11°. Diviser un cercle en trois, quatre, cinq, six..... parties égales.

Si le nombre des parties est pair, on mène d'abord un diamètre; s'il est divisible par 4, on trace deux diamètres rectangulaires; s'il est divisible par 8, on mène des diamètres partageant en deux également les angles des premiers, et ainsi de suite.

INSTRUMENTS DE DESSIN.

4. Le principaux instruments dont l'emploi soit nécessaire au dessinateur sont : la *règle* et l'*équerre* pour le tracé des lignes droites; le *compas* pour la description des arcs circulaires.

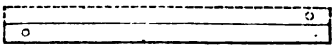
Le trait lui-même se fait d'abord au *crayon*, puis se passe à l'encre avec le *tire-ligne*.

Digitized by Google

5. La *règle* employée par les dessinateurs est tout simplement une lame de bois à bords parallèles et assez mince ; le bois dont elle est composée est ordinairement du poirier ou du pommier bien desséché, pour empêcher les altérations de forme qui surviendraient nécessairement sans cette précaution.

Une règle est un instrument fort simple ; mais, comme il est d'un usage continuel et que la moindre défectuosité rend son emploi impossible, il faut le soumettre à des vérifications fréquentes. Dans ce but, on trace une droite sur le papier en suivant l'un des bords de la règle ; puis on retourne celle-ci bout pour bout, et l'on applique le même bord de l'autre côté de la ligne. Si le trait coïncide parfaitement avec le bord de la règle dans l'une comme dans l'autre position, l'instrument est exact, et peut être employé.

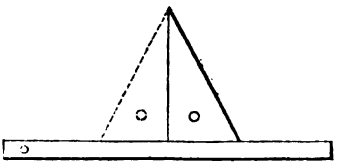
Fig. 1.



Un dessinateur doit être pourvu de plusieurs règles de longueurs différentes, afin de ne pas s'astreindre à manier inutilement un instrument d'une dimension incommode.

6. L'*équerre* est un triangle rectangle en bois de même essence et de même qualité que la règle ; son emploi dans le dessin est également précieux en ce que, concurremment avec cette dernière, il facilite singulièrement le tracé des parallèles et des perpendiculaires. Pour ce motif, il importe de vérifier souvent cet instrument, dont les deux qualités essentielles sont d'avoir les bords exactement rectilignes et son plus grand angle rigoureusement droit. On s'assure de la première de ces conditions par le procédé déjà exposé pour la règle ; quant à la seconde, on fait l'épreuve suivante : On applique l'un des côtés de l'angle droit sur une règle bien dressée et l'on trace un trait le long de l'autre côté. Si l'équerre est bien faite, et qu'on la retourne en appliquant toujours le même côté sur la règle, le second côté devra encore recouvrir exactement le même trait.

Fig. 2.

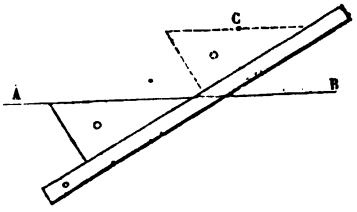


7. Nous avons dit que l'équerre pouvait servir au dessinateur de moyen expéditif pour tracer des parallèles et des perpendiculaires.

Pour le tracé d'une parallèle à une droite donnée, on place sur la ligne donnée AB l'un quelconque des côtés de l'équerre, et l'on applique une règle sur l'un des deux autres côtés ; on fait ensuite glisser l'équerre le long de la règle, jusqu'à ce qu'elle atteigne la position demandée, ou le point donné C. Il est clair en effet que, dans le mouvement de l'équerre,

Digitized by Google

Fig. 3.



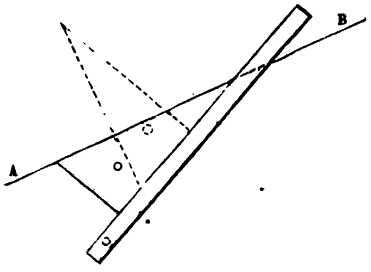
les deux côtés non adjacents à la règle n'ont pas cessé d'occuper des positions respectivement parallèles entre elles.

Remarque. — Il suffit, pour mener une parallèle à une droite par ce procédé, que l'instrument ait deux côtés rectilignes, l'un qui glisse le long de la règle, l'autre qui décrive la parallèle; le troisième côté peut avoir une forme tout à fait quelconque. Ce serait même assez que le côté qui s'appuie et glisse sur la règle eût deux points ou deux éléments qui pussent y demeurer constamment appliqués. On voit, par conséquent, qu'une équerre est toujours propre à mener des parallèles, si elle a l'un de ses côtés exactement rectiligne.

8. L'angle droit de l'équerre sert directement à mener des lignes perpendiculaires à une autre. On applique l'un des côtés de l'angle droit sur la droite donnée, et l'autre côté donne nécessairement une direction perpendiculaire à la première.

A cause de la grande différence de longueur des côtés des triangles rectangles suivant lesquels sont généralement découpées les équerres à dessiner, on trouve souvent plus commode de tracer les perpendiculaires comme il suit :

Fig. 4.



On applique l'hypoténuse de l'équerre sur la droite donnée AB; puis on place une règle sur l'un des côtés de l'angle droit. On redresse alors l'équerre pour appliquer son second côté de l'angle droit sur la règle, et il est clair que, dans ce mouvement, l'hypoténuse a, comme les deux autres côtés, fait une rotation de 90 degrés.

9. Le tracé des perpendiculaires par le moyen d'une équerre étant toujours subordonné à la plus ou moins grande exactitude de l'instrument, les dessinateurs soigneux n'emploient ce procédé que pour les lignes peu importantes de leur travail, et décrivent les autres avec le compas (*Géométrie*, 131, 132 et 133). C'est principalement pour les droites *horizontales* et *verticales* qu'il est urgent d'avoir un tracé bien irréprochable, parce que l'œil en saisit avec une exquise délicatesse les moindres déviations; aussi est-on dans l'habitude de commencer tout dessin par établir avec le plus grand soin ces deux directions dans le milieu de la feuille; les charpen-

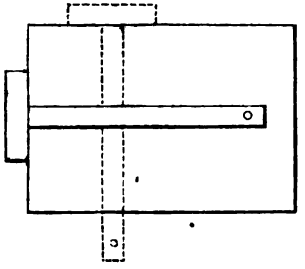
Digitized by Google

tiers prennent dans leurs épures une précaution analogue et tracent ce qu'ils appellent le *trait carré*.

On détermine ensuite, au moyen de parallèles pour lesquelles l'emploi de l'équerre est sans inconvénient, toutes les horizontales et les verticales du dessin.

10. Quelquefois on emploie, pour le tracé des horizontales et des verticales, un instrument spécial auquel sa forme a fait donner le nom de *té*.

Fig. 5.



Il se compose d'une règle portant fixée perpendiculairement à l'une de ses extrémités une barre de bois d'une épaisseur un peu plus forte ; cette barre additionnelle s'appuie et glisse le long du bord bien dressé de la planche sur laquelle a d'abord été collée la feuille à dessiner. On comprend facilement que, si les bords de la planche sont bien rectangulaires, les lignes tracées avec le té seront également perpendiculaires entre elles.

Le té a subi différentes modifications qui permettent de tracer avec cet instrument des perpendiculaires à des lignes dirigées d'une manière quelconque sur le dessin ; mais l'usage de ces instruments n'est réellement pas plus simple que celui de la règle et de l'équerre, et donne certainement beaucoup plus de chance d'inexactitude à cause des altérations du bois.

11. Le *compas*, dont tout le monde connaît l'usage, consiste en deux branches métalliques de longueurs égales, se mouvant autour d'un axe commun, et terminées par des pointes d'acier trempé. Ainsi composé dans sa simplicité la plus grande, cet instrument sert à prendre des mesures sur une ligne pour les reporter sur une autre.

Pour faire servir le compas à tracer des circonférences de cercle, on remplace une de ses pointes par une pièce portant un crayon ou un tire-ligne ; si la circonférence à tracer a un trop grand rayon pour pouvoir être commodément décrite avec le compas dont on dispose, on ajoute à la branche du tire-ligne une pièce intermédiaire appelée *rallonge*.

Nous ne dirons rien de plus sur le compas, parce que quiconque veut dessiner est généralement muni d'une cassette contenant un ou plusieurs instruments de cette espèce avec leurs accessoires. Ces boîtes renferment aussi le plus souvent une petite règle de deux décimètres gradués en millimètres, un rapporteur en corne (*Pl. II, fig.* 10), dont nous indiquerons plus loin l'usage, et un tire-ligne.

12. Un dessin quelconque s'ébauche au *crayon* et se trace ensuite avec le *tire-ligne*.

Digitized by Google

Le choix d'un bon crayon est loin d'être indifférent; trop tendre, il s'émousse sur-le-champ, devient impropre à figurer les détails et s'use promptement; trop dur, il coupe le papier et résiste au frottement de la *gomme élastique*, quand il faut effacer de faux traits.

Le *tire-ligne* se compose de deux lames d'acier terminées en pointe arrondie, soudées à leur partie supérieure, et traversées en leur milieu par une vis qui permet de les serrer à volonté l'une contre l'autre. Ces deux lames forment ainsi comme le bec d'une plume, et servent à tirer à l'encre les traits des dessins.

Dans les bons tire-lignes, les deux lames ne sont pas soudées ensemble; une seule est fixe, et l'autre peut s'abattre autour d'une charnière : cette disposition est commode pour nettoyer l'instrument.

Le tire-ligne est surmonté d'un manche lorsqu'il doit servir à tracer des lignes droites; il porte une petite tige prismatique, s'il doit s'engager dans une branche de compas pour tracer des cercles.

13. Les détails qui vont suivre sur la manière de se servir du tire-ligne paraîtront peut-être trop minutieux; mais comme ils s'adressent à des lecteurs qui n'ont pas de temps à perdre en tâtonnements rebutants et inutiles, nous ne craignons pas d'insister.

Pour tracer un dessin à l'encre, on emploie de l'*encre de Chine*, que l'on délaye dans un godet contenant quelques gouttes d'eau; il faut frotter doucement, afin d'éviter la formation de grumeaux que prendrait le tire-ligne, et qui nuiraient à la pureté des traits.

Avant d'imbiber le tire-ligne d'une quantité d'encre suffisante, on plonge d'abord son extrémité dans l'eau; l'encre s'élève mieux alors le long des lames mouillées. Il faut avoir le soin d'essuyer l'extérieur des lames du tire-ligne, pour éviter que l'encre s'attache à la règle et souille le papier.

L'encre de Chine séchant très-vite, il faut la renouveler aussi souvent que possible dans le tire-ligne, et la couvrir dans le godet pour diminuer la rapidité de l'évaporation.

Le tracé doit se faire lentement, en appuyant faiblement et bien perpendiculairement sur le papier; si l'on traçait trop vite, l'encre n'aurait pas le temps de sortir du tire-ligne, et la ligne présenterait des interruptions. Les mêmes précautions doivent être prises pour le tracé des cercles au moyen du compas à tire-ligne; c'est pour ce motif que le tire-ligne de ce compas est articulé de manière à pouvoir être toujours placé perpendiculairement au papier.

Dans les dessins soignés, il est bon de mettre sous la pointe du compas un petit morceau de corne transparente, aussi bien pour le tracé au crayon que pour le tracé à l'encre; on évite ainsi le percement du papier, défaut qui gâte le meilleur dessin, et qui produit d'ailleurs un déplacement plus ou moins prononcé du centre.

Digitized by Google

14. Les lignes droites et les lignes circulaires sont facilement et respectivement obtenues sur le papier avec la règle et le compas; quant aux autres courbes qui ne sont pas composées d'arcs de cercle, il faut en déterminer géométriquement le plus grand nombre de points possible, et réunir d'abord au crayon ces divers points par un trait continu et sans jarrets.

Ce travail est singulièrement facilité par l'emploi du *pistolet*, qui n'est autre chose qu'une lame de bois mince dans laquelle ont été d'avance découpées des courbes variées. On approche le pistolet des points déterminés que l'on cherche à faire coïncider en grand nombre avec le bord curviligne, et, par des tâtonnements que l'habitude abrége, on trace la courbe par portions plus ou moins longues. L'essentiel est de s'attacher à éviter les jarrets; on y parvient aisément en n'admettant un arc du pistolet comme convenant à la portion de courbe cherchée, qu'autant que cet arc se raccorde sur une notable longueur de chaque côté avec les portions déjà tracées ou indiquées par les points déterminés.

15. Nous terminerons ici ce que nous avons à dire touchant les divers instruments et procédés employés par les dessinateurs. Il est bon toutefois d'appeler encore l'attention sur l'utilité de se conformer à l'usage, en traçant en lignes composées de petits points ronds les parties des lignes ou des objets qui sont situées en arrière des autres et censées être cachées par elles.

On donne, dans les figures géométriques, un trait plein aux lignes qui servent de données à la question traitée, ainsi qu'à celles qui représentent les résultats obtenus; les lignes de construction sont formées de traits interrompus, quelquefois séparés par un ou plusieurs points pour conserver à chaque groupe son caractère et contribuer à la clarté de la figure.

Pour augmenter le relief des objets représentés, sans cependant admettre l'emploi des ombres, on est dans l'habitude de rendre plus apparents les contours dégagés de ces objets par un *trait de force* placé du côté où devrait être portée l'ombre, c'est-à-dire à droite et en dessous, si l'on suppose, comme l'usage en est admis, que la lumière vienne de gauche à droite sous un angle de 45 degrés en plan comme en élévation. Enfin, un dessin n'est généralement complet qu'autant qu'il comporte la représentation ou au moins l'indication de l'*échelle* qui a servi à le construire; nous trouverons plus loin (*Lever des plans, Pl. II, fig.* 11) l'occasion de parler avec détail de cet élément essentiel.

LAVIS.

16. L'emploi du lavis a pour but d'ajouter à la clarté de toutes les représentations graphiques, soit par des teintes plates purement conventionnelles, soit par des ombres destinées à mettre en relief les objets et

Digitized by Google

leurs diverses parties. Il n'entre pas dans notre programme d'exposer la théorie des ombres et d'enseigner à les répartir sur un dessin ; nous supposerons que nos lecteurs aient simplement à placer des teintes plates d'une nuance et d'une intensité données sur les diverses parties d'un plan, ou qu'il s'agisse pour eux de copier par imitation un lavis d'architecture ou de machines. Notre tâche se bornera donc à donner quelques détails pratiques sur le choix et l'emploi des matériaux et instruments qui servent au lavis, ainsi que l'énumération explicative des diverses teintes conventionnelles adoptées pour les principaux dessins relatifs au service des Ponts et Chaussées.

MATÉRIAUX ET INSTRUMENTS DU LAVIS.

17. Les matériaux du lavis sont la *feuille* de papier qui doit recevoir le dessin à laver, les *couleurs* et l'*eau*; les instruments spéciaux sont les *planches* ou autres appareils qui supportent la feuille, les *godets* et les *pinceaux*.

18. Un lavis soigné se fait sur du papier blanc, très-fort et très-bien collé. Cette dernière condition est surtout fort essentielle pour que la couleur ne pénètre pas dans le papier et ne marque pas dans le dessin des taches fâcheuses. On peut à la rigueur suppléer à ce défaut par l'application d'un *encollage* général fait avec de l'alun et de l'amidon dissous dans de l'eau ; mais c'est là une recette dont l'emploi sera toujours plus assujettissant et plus chanceux que la recherche d'un bon papier bien préparé.

Cependant, pour le cas où l'on n'aurait à sa disposition que du papier d'une qualité médiocre, il est bon de savoir que l'on peut l'améliorer par l'encollage préalable ou par une simple dissolution d'alun ; ces moyens sont d'ailleurs toujours précieux pour réparer les accidents survenus pendant le travail, et particulièrement l'enlèvement de l'épiderme du papier par la gomme élastique ou par un grattage.

19. On fait un grand emploi dans les Ponts et Chaussées de *papiers transparents* de diverses espèces pour les dessins de plans ou autres; la plupart de ces papiers sont préparés avec un vernis gras ou gommeux qui les rend à peu près impropres à être employés pour le lavis; ils se crispent sous l'action de l'humidité, et ne fournissent que des ouvrages de médiocre apparence, quel que soit le soin qu'on apporte à leur exécution.

Le *papier-toile*, dont l'usage se répand de plus en plus depuis quelques années, est en calicot très-fin, très-égal, imprégné d'un vernis gras, séché et laminé; cette toile ainsi préparée est assez transparente pour rendre comme *papier à calquer* quelques services ; mais elle est surtout précieuse en ce qu'on peut la plier et déplier longtemps sans brisure;

Digitized by Google

son principal inconvénient est sa cherté actuelle qui devra diminuer à mesure que l'emploi s'en généralisera. Ce papier ne s'accommode pas des teintes mises à grande eau, parce que le tissu s'en imprègne et se boursoufle en perdant toute translucidité et présentant des taches opaques du plus mauvais aspect. On obtient des teintes assez unies, pour les dessins qui ne demandent pas un grand fini, en appliquant le liquide à l'envers de la feuille et en le tenant plus foncé que ne doit le paraître la nuance vue de l'autre côté.

20. Les couleurs les plus usuelles dans les dessins de construction sont l'*encre de Chine*, le *carmin*, la *gomme-gutte*, le *bleu de Prusse* ou l'*indigo* et la *sépia*. En y ajoutant le *vermillon*, la *teinte neutre* et la *terre de Sienne brûlée*, on a à peu près tout ce qui est utile dans le service des Ponts et Chaussées.

L'encre de Chine est la plus importante de toutes ces couleurs, parce que c'est elle qui sert aussi, comme nous l'avons dit (13), pour mettre les dessins au trait ; il est essentiel, surtout pour le lavis, qu'elle soit de bonne qualité. Cette substance n'est autre chose que du noir de fumée dégraissé et incorporé avec une colle de gomme et de gélatine : sa qualité dépend principalement d'un dégraissage complet du noir, et l'on y supplée en partie par un procédé qui consiste à verser la teinte dans une petite cuve de papier à gros grains, et à la faire rouler sur les parties encore sèches du fond ; de cette manière, on fait adhérer au papier la plus grande partie du noir gras qui forme une couche terne à la surface de la teinte. Quoi qu'il en soit, il faut toujours s'attacher à se procurer la meilleure encre possible ; on doit, dans ce but, la choisir très-dure, à cassure luisante et d'un éclat métallique : on l'essaye en la frottant mouillée sur l'ongle, et elle doit y laisser une teinte d'un beau noir bien égal, séchant rapidement et présentant un reflet bronzé.

La *gomme-gutte* est un mélange naturel d'une gomme et d'une résine colorée ; on en trouve partout de bonne qualité.

Les autres couleurs sont des matières colorantes, broyées finement avec de la gomme, mises en pâte et séchées ; il est facile de s'en procurer de très-bonnes et, sauf le carmin, à assez bas prix.

21. L'eau potable est toujours bonne pour le lavis ; il importe seulement à la pureté des tons qu'elle soit très-claire, et que jamais une teinte foncée ne soit préparée avec le reste d'une teinte claire d'une autre nuance, ou dans un vase mal nettoyé.

22. Quand on veut préparer une feuille de papier à recevoir un lavis, on fait entre les deux côtés de cette feuille le choix de celui qui paraît le plus exempt de défectuosités ; puis, on mouille le côté opposé dans toute sa surface avec une éponge imbibée d'eau, et l'on fixe avec la colle à

Digitized by Google

bouche les quatre bords sur un fort carton ou sur une *planche* parfaitement dressée. Le papier, que l'humidité a agrandi, se retire en séchant, et reste tendu de manière à pouvoir supporter tous les lavages ultérieurs sans accident.

23. Comme les planches à dessiner sont nécessairement lourdes, on a cherché à les remplacer par de simples cadres étireurs, connus dans le commerce sous le nom italien de *stirator;* ces appareils sont composés de deux cadres s'emboîtant l'un dans l'autre et recevant entre eux les bords de la feuille mouillée, qui se trouve ainsi retenue et se tend en séchant.

Outre la légèreté qui rend plus facile le maniement du lavis, l'emploi d'un cadre permet de tenir la feuille convenablement humectée par derrière, de manière à présenter par devant une surface légèrement humide sur laquelle les teintes s'appliquent facilement, sans taches nuageuses, se laissent fondre et remanier, et conservent des bords nets, sans bavure comme sans dureté. Les inconvénients de ce système sont toutefois également sérieux; d'abord, le même cadre ne peut recevoir que des feuilles de même grandeur; ensuite, on ne peut exécuter sur le papier ainsi tendu à vide aucune opération graphique avec le compas et le tire-ligne, en sorte que le dessin doit être mis au trait d'avance, toutes les fois au moins qu'il s'agit d'un travail qui demande quelque précision. Comme les avantages signalés n'ont une importance réelle que pour les aquarelles artistiques, les planches et cartons sont à peu près exclusivement employés dans les bureaux des Ponts et Chaussées.

24. On fait des *godets* en faïence, en verre et en porcelaine; nous recommandons particulièrement l'emploi de ces derniers. Les meilleurs sont ceux qui n'ont aucun défaut dans le vernis vitreux qui en tapisse le creux; la moindre inégalité saillante mordrait le bâton d'encre de Chine ou la couleur, et en détacherait des parties mal délayées qui donneraient naissance à une sorte de boue funeste. Les inégalités rentrantes auraient moins d'inconvénients; mais elles rendraient plus assujettissant et plus difficile le nettoyage du godet.

Il importe aussi de rejeter le godet à base plus étroite que la couronne supérieure; avec une base aussi large que le bord, un godet a plus de stabilité, le broyage des couleurs est plus égal et plus facile, et le liquide n'est pas ballotté et troublé par le moindre ébranlement.

25. Le bon choix des *pinceaux* est une condition essentielle de succès dans l'exécution d'un lavis. On en trouve de toutes les dimensions, montés sur un tube de plume et que l'on assemble deux à deux par une *hampe* en bois léger, en ivoire ou en pointe de porc-épic.

Les pinceaux fins et à pointe aiguë et effilée doivent être rejetés; une pareille disposition ne favorise pas l'écoulement du liquide et l'exécution

Digitized by Google

des larges teintes; la pointe manque de fermeté, et l'opérateur a aussi la plus grande difficulté pour la diriger dans les contours resserrés. Nous conseillons fortement l'emploi des gros pinceaux emmanchés aux deux bouts d'une hampe de bois, et serrés contre elle par une douille métallique clouée; il est utile de s'habituer à les manier, même pour les détails les plus minutieux. Pour les essayer chez le marchand, il faut demander un verre d'eau claire, les y tremper, former leur pointe en les essuyant sur le bord du vase, et rejeter tous ceux qui ne donnent pas une pointe nette, mais non effilée.

DÉTAILS PRATIQUES SUR LE LAVIS A L'ENCRE DE CHINE.

26. Nous entrerons dans quelques détails pratiques sur l'exécution du lavis à l'encre de Chine; cette couleur étant la plus difficile de toutes à bien manier, c'est sur elle qu'il importe d'arrêter l'attention.

Pour faire une bonne teinte d'encre de Chine, on broie de la couleur dans un godet parfaitement propre; on prend une petite quantité de ce noir que l'on étend de la proportion d'eau nécessaire à l'intensité du ton que l'on cherche, et l'on fait passer, s'il est utile, cette teinte ainsi préparée dans le godet de papier (20) avant de la verser définitivement dans celui qui doit servir à l'emploi.

Il faut bien se garder surtout de broyer de nouveau de l'encre qui aurait séché dans un godet; cette pratique, à peine supportable pour un dessin au trait, ne donnerait pour le lavis que des teintes boueuses et ternes, inégales, dues à ce que la gélatine se détacherait par petites écailles non délayées.

27. Ayant en main deux pinceaux montés sur la même hampe, on les mouille tous les deux d'eau claire; on les appointe sur le bord du godet et on en *charge* un seul en touchant obliquement la surface de la teinte liquide avec la pointe du pinceau, qui se gonfle par l'effet de la capillarité. On doit éviter de plonger le pinceau près du fond du godet, pour ne pas prendre les parties les plus lourdes qui sont déposées ou près de l'être.

Le pinceau étant ainsi chargé, on touche obliquement avec sa pointe un garde-main en papier à gros grains, en faisant tourner en même temps la hampe dans les doigts, de façon que le contour entier du pinceau roule sur le papier et achève d'y laisser les parties grasses qui font tache. Alors seulement le pinceau est prêt à poser sur le papier une teinte pure.

28. Pour poser une teinte large et plate, il faut opérer le plus vite possible, et, si l'on peut, à grands coups, le pinceau suffisamment gonflé passant rapidement sur toute la surface qui doit recevoir la teinte, et une seule fois sur chaque point.

Les coups de pinceau doivent être autant que possible parallèles, et

Digitized by Google

mener la teinte *de front;* si l'on travaille sur une table ou un cadre incliné, on commence par le haut en laissant un bourrelet liquide s'amonceler au bas de chaque bande horizontale formée par une série de coups de pinceau; puis, la série suivante reprend ce bourrelet liquide pour le reformer plus bas, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on approche du bord inférieur de la teinte. Alors il est bon que le pinceau soit moins gonflé, pour qu'il ne se forme pas de bourrelet près du contour, ce qui obligerait à boire ce liquide excédant avec l'un des deux pinceaux mouillé, mais non gonflé.

Aussitôt qu'une teinte est posée, on n'y touche plus jusqu'à ce qu'elle soit sèche.

29. Si le dessin n'exige qu'une simple teinte plate sans graduation, il convient de la faire d'une seule fois, plutôt qu'en superposant plusieurs teintes moins intenses, manœuvre qui occasionne une perte de temps et donne des tons ternes. Lorsque l'on a à présenter des teintes fondues et dégradées pour faire tourner les reliefs, c'est par l'emploi successif du pinceau chargé et du pinceau simplement mouillé que l'on arrive à produire cet effet, que facilite du reste beaucoup la précaution indiquée au n° 23, laquelle consiste à tenir toujours le papier légèrement humecté pour empêcher l'encre de sécher sur les bords du bourrelet liquide et d'accuser des contours intempestifs.

On obtient aussi de très-bons effets de relief en superposant une série de teintes plates, en retraite et en recouvrement les unes sur les autres, laissant entre elles une série de bandes d'égale teinte. Il est inutile de fondre les teintes, lors même qu'elles sont en petit nombre, et que la différence de ton entre deux bandes consécutives est bien sensible; l'expérience prouve que les bandes d'égale teinte, pour peu qu'elles soient conformes à la vraie distribution de la lumière, ne gênent nullement l'œil du spectateur, et font au contraire mieux sentir le relief.

30. Les indications minutieuses qui précèdent montrent quel soin réclame l'exécution d'un lavis à l'encre de Chine; les autres couleurs sont d'un emploi beaucoup plus facile; mais elles exigent néanmoins de grandes précautions et de l'exercice, si l'on veut réussir dans ce genre.

Les couleurs que nous avons indiquées (20) sont les seules nécessaires dans les Ponts et Chaussées, à la condition de les mélanger quelquefois pour former des teintes composées, le vert, par exemple, avec du bleu et du jaune. Dans ce cas, il faut se garder de broyer dans le même godet les deux pains des couleurs primitives; on fait une teinte suffisamment forte de chacune d'elles dans des godets séparés, et on procède ensuite au mélange dans un autre vase, en mesurant les doses de chacune par la charge d'un pinceau destiné à cette manœuvre. A cette occasion, nous dirons que les pinceaux employés pour étendre l'encre de Chine ne doivent jamais être affectés à d'autres couleurs; car il est impossible de les nettoyer assez complétement pour les empêcher d'altérer les nuances. Il nous reste

Digitized by Google

maintenant à indiquer la nomenclature des teintes conventionnelles employées dans les dessins le plus habituellement exécutés par les agents des Ponts et Chaussées, et de celles qui sont admises pour désigner sur les plans topographiques les diverses natures de culture des terres.

TEINTES CONVENTIONNELLES.

31. Dans le service des Ponts et Chaussées, les teintes ordinairement employées pour le lavis des dessins sont les suivantes :

Terrassements	à déblayer	Gomme-gutte.
	à remblayer	Rose de carmin.
Parties coupées des maçonneries	en moellons bruts	Rose de carmin.
	en pierre de taille	Rouge vif de carmin.
	en briques	Vermillon avec un peu d'encre de Chine, haché de la même teinte plus vive.
Charpentes	En élévation	Teinte pâle de terre de Sienne brûlée.
	Coupées	Même teinte plus vive, avec hachures de sépia.
Fers et fontes	En élévation	Bleu pâle.
	Coupés	Bleu pâle haché de la même teinte plus vive.
Bronze et cuivre	En élévation	Gomme-gutte et carmin.
	Coupé	Même teinte hachée de terre de Sienne brûlée.
Plans de traverse des villes et bourgs par les routes	Maisons particulières	Encre de Chine pâle, avec liséré plus vigoureux en bas et à droite.
	Édifices publics	Encre de Chine plus noire, avec trait de force.
	Parties des bâtiments de toute nature soumis au reculement	Teinte jaune appliquée sur le gris des maisons.
	Parties de la voie publique sur laquelle les constructions riveraines devront avancer	Rose pâle.

32. Les principales teintes admises dans le lavis des plans topographiques sont désignées ci-après :

Terres labourées	Gomme-gutte, carmin et un peu d'encre de Chine.
Terres humides	Teinte de terre sur laquelle on revient avec du bleu faible pour indiquer les parties humides, avant que la première teinte soit tout à fait sèche.
Vignobles	Encre de Chine, carmin, sépia, indigo. Très-peu de chacune de ces couleurs.

Digitized by Google

Prairies	Bleu et gomme-gutte. Le bleu domine.
Forêts et bois	Bleu et gomme-gutte. Le jaune domine.
Vergers	Vert moins jaune que celui des bois, et moins vert que celui des prés.
Friches	Vert faible panaché avec une teinte de jaune et carmin; ces deux tons employés avec deux pinceaux successivement ne doivent être mêlés que par leurs extrémités.
Broussailles	Vert et jaune faibles employés avec deux pinceaux successivement.
Bruyères	Vert et carmin faibles employés avec deux pinceaux. Les bruyères humides se font de même, seulement on passe sur la première teinte une légère eau bleue.
Landes	Vert terne composé d'indigo, gomme-gutte, sépia et encre de Chine, en laissant çà et là des parties blanches que l'on remplit avec de la teinte de sable et de l'indigo.
Sables	Gomme-gutte et carmin. Les dunes doivent être moins brillantes.
Vases	Encre de Chine, un peu de carmin et de sépia.
Prés humides	Avant que la teinte de prés soit sèche, y ajouter au milieu un peu de bleu pur et léger.
Marais	Vert-pré pour les parties qui ne sont pas noyées; indigo pour les parties aquatiques. On revient sur les bords avec du vert plus fort pour les prés, et avec du bleu pour les eaux.
Étangs	Indigo et très-peu d'encre de Chine.
Fleuves, rivières, lacs	Indigo pur.
Mers	Indigo mêlé d'un peu de gomme-gutte pour obtenir un bleu verdâtre.

Digitized by Google

LEVER DES PLANS.

1. L'opération du *lever des plans* a pour objet de déterminer et de reproduire, sur un plan perpendiculaire à la verticale du lieu (*Statique*, 30), la configuration d'une portion de la surface de la terre ou, si l'on veut, les positions relatives de plusieurs points de cette surface, abstraction faite de leur hauteur; en un mot, l'ensemble des projections horizontales de ces points. Il doit être entendu que nous ne voulons parler ici que des levers qui n'embrassent pas une assez grande étendue pour que la sphéricité de la terre apporte un obstacle à la représentation sur un plan de la portion de la surface considérée.

Quoi qu'il en soit, on peut concevoir tous les points qu'il s'agit de rapporter, reliés entre eux par des lignes droites, et cet ensemble constitue un réseau de triangles dont les éléments, les uns mesurés directement sur le terrain, les autres calculés au moyen des premiers par les procédés trigonométriques, déterminent complétement les positions desdits points et servent de base à une représentation aussi fidèle que possible de la projection des lieux.

Cette division du sol en triangles et la suite des opérations nécessaires pour arriver à en connaître numériquement les divers éléments tant linéaires qu'angulaires, constituent ce qu'on appelle une *triangulation*.

On voit sans peine, d'après cet exposé, que le point de départ d'une semblable opération est, d'un côté, la *mesure des distances*, de l'autre, la *mesure des angles*. Nous allons donc examiner successivement les instruments et les méthodes qui servent à résoudre ces deux problèmes.

MESURE DES DISTANCES.

CHAINE D'ARPENTEUR. — USAGE ET VÉRIFICATION.

2. Les longueurs que l'on a généralement à mesurer sur le terrain sont des lignes droites ou des portions de courbes assez ouvertes pour être considérées comme rectilignes dans l'étendue qu'embrasse l'instrument. Cela posé, la distance entre deux points déterminés se mesure le plus souvent au moyen de la *chaîne d'arpenteur*.

Cet instrument est formé de chaînons ou tiges en gros fil de fer dont chaque bout est recourbé en boucle et qui sont réunis deux à deux par un anneau; les longueurs des tiges, des boucles et des anneaux sont déterminées de manière que, entre les centres de deux anneaux consécutifs, la

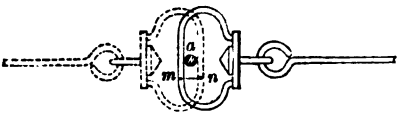
Digitized by Google

longueur entière soit de 20 centimètres; comprenant presque toujours 50 chaînons, quelquefois 100, la chaîne d'arpenteur représente donc le plus fréquemment 1 décamètre, et, dans le second cas, un double décamètre ou 20 mètres.

Dans le but de rendre plus commode la lecture des fractions de décamètre, les anneaux placés de mètre en mètre sont en cuivre et celui du milieu porte en outre, comme marque distinctive, un petit appendice en métal. Enfin, pour faciliter l'emploi de cet instrument, dont nous donnons un dessin détaillé (*Pl. I, fig.* 1 et 2), chaque bout de la chaîne a une poignée dont la longueur est prise sur les 20 centimètres du dernier chaînon.

3. Pour mesurer une distance, on commence par la *jalonner:* cette opération préliminaire consiste à tracer sur le terrain, au moyen de piquets ou de brins de bois surmontés d'un morceau de papier destiné à fixer le regard et nommés *jalons*, la ligne suivant laquelle se développe la longueur cherchée; se plaçant ensuite au premier jalon, l'opérateur tient et arrête au point de départ une des poignées de la chaîne, tandis que son aide, appelé *porte-chaîne*, marche en avant dans l'alignement, emportant l'autre poignée. Puis, après s'être assuré que la chaîne est complétement et régulièrement étendue, celui-ci, s'effaçant pour que l'opérateur puisse vérifier si la direction jalonnée a été bien suivie, et plaçant d'une main la poignée à fleur du sol, pique en terre, au point *a* de l'intérieur de la poignée, une fiche en fer qui servira de point de départ à la mesure du second décamètre.

Fig. 1.



La poignée d'arrière étant, dans la mesure du second décamètre, arrêtée à la face *arrière* de la fiche, de même que, dans l'opération précédente, la poignée d'avant était arrêtée à la face *avant* de cette même fiche, il est clair que l'on perd chaque fois, sur la dimension de la chaîne, une longueur *mn* égale à l'épaisseur de la fiche, augmentée du double de l'épaisseur du fil de fer de la poignée. C'est pour cela surtout que l'on donne généralement à la chaîne, de dehors en dehors, une longueur de $10^{m},005$ au lieu de 10 mètres.

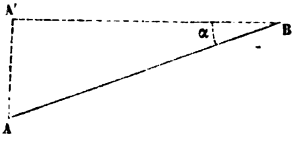
L'agent principal enlève la fiche après la mesure de chaque décamètre, et, quand il se trouve avoir en main les dix fiches remises avant l'opération au porte-chaîne, il les lui remet de nouveau, en inscrivant une dizaine de décamètres ou *portée*.

4. L'effort constamment exercé pour tendre la chaîne finit par allonger les anneaux et les boucles; il faut donc, dans les opérations qui exigent de l'exactitude, vérifier fréquemment la longueur de la chaîne sur une longueur préalablement préparée avec soin pour servir d'*étalon*.

Digitized by Google

5. Si le terrain est ondulé, on tâche de développer la chaîne dans un plan horizontal élevé au-dessus des inégalités du sol, en maintenant les poignées dans les verticales passant par les fiches; mais, quoi qu'on fasse en pareil cas pour la tendre en ligne droite, elle prend toujours une courbure assez prononcée : c'est pour ce motif que, quand il s'agit d'une longue pente régulièrement inclinée, il vaut mieux mesurer la longueur suivant la pente, dont on détermine ensuite l'inclinaison par les moyens qui seront indiqués plus loin; un calcul très-simple permet alors de réduire la distance mesurée AB à l'horizontale A'B que l'on cherche.

Fig. 2.



On remarque, en effet, que, si l'on désigne par α l'angle que fait avec l'horizontale la ligne inclinée AB, le triangle rectangle AA'B fournira la relation

$$A'B = AB \times \cos\alpha.$$

Lors donc que l'on aura mesuré directement AB et que l'on connaîtra la valeur de l'angle α, il suffira, pour avoir la distance A'B qui, d'après la définition du lever des plans, est un des éléments essentiels de l'opération, de multiplier la première longueur par le cosinus de cet angle.

STADIA. — USAGE ET VÉRIFICATION.

6. Avant de décrire l'instrument qui porte le nom de *stadia*, il importe que nous disions quelques mots sur la construction des lunettes dites *lunettes astronomiques*, qui servent non-seulement à l'observation des astres, comme leur nom l'indique, mais qui entrent encore comme élément essentiel dans un grand nombre d'instruments employés aux opérations géodésiques et topographiques.

La lunette astronomique se compose simplement de deux lentilles de verre enchâssées aux deux extrémités d'un tube. L'un de ces verres, que l'on nomme *objectif*, c'est-à-dire placé du côté de l'objet, a pour but de former une image en un point de l'axe de la lunette où convergent sensiblement tous les rayons lumineux partis des divers points de cet objet. Ce point de convergence est appelé le *foyer principal* de l'objectif ou de la lunette; tous les points de l'objet considéré viennent donc s'y reproduire dans leurs positions respectives; ils y forment une image renversée et beaucoup plus petite que le corps lui-même. Le renversement de l'image est un inconvénient dont on cesse de s'apercevoir avec un peu d'habitude; quant à ses dimensions, on les amplifie en les regardant avec un verre grossissant; c'est l'*oculaire* placé à l'autre bout du tube, près de l'œil, et dont la distance à l'image doit être réglée, suivant la portée de la vue de chaque observateur, par un tirage spécial.

Digitized by Google

7. La stadia peut, dans bien des cas, remplacer avec avantage la chaîne d'arpenteur et donner même plus de précision que celle-ci, quand il faut la développer sur un terrain accidenté; rarement employée dans le service des Ponts et Chaussées, elle est surtout utile pour les reconnaissances et les levers à vue.

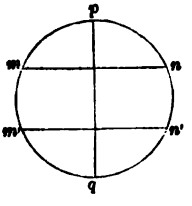
La construction de cet instrument est fondée sur ce principe que, plusieurs objets de grandeurs différentes étant embrassés par le même angle visuel, les distances qui les séparent de l'observateur sont proportionnelles à leurs dimensions respectives. Si donc on forme un angle fixe dans une lunette, soit au moyen d'un diaphragme placé au foyer de l'objectif et percé d'une fenêtre à bords horizontaux, soit simplement par deux fils horizontaux placés au même endroit dans un plan perpendiculaire à l'axe de la lunette, cet angle embrassera une plus ou moins grande longueur d'une règle ou *mire* verticale, suivant que la distance de cette mire au sommet de l'angle sera plus ou moins considérable.

D'après cette disposition, il est facile de voir que, si la mire est graduée convenablement et marquée de divisions que le grossissement de la lunette permette d'apercevoir à la distance que l'on veut apprécier, rien ne sera plus simple que l'usage de la stadia.

8. La graduation de la mire se fait de la manière suivante : on mesure exactement sur le terrain une longueur de 100 à 200 mètres, et l'on place la lunette à l'une des extrémités de cette ligne ; la règle destinée à former la mire est portée et maintenue verticalement à l'autre extrémité. Dans cette position, on marque exactement sur la règle la longueur interceptée par les bords du diaphragme ou par les fils horizontaux qui remplacent ces bords ; on divise cette longueur en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans la distance de la lunette à la mire, et l'on trace des divisions égales dans toute la longueur de cette dernière. Pour connaître ensuite, dans tous les cas, la distance qui sépare la lunette de la mire, il suffit de compter le nombre des divisions visibles entre les prolongements des côtés de l'angle de la lunette.

Outre les deux fils horizontaux mn, $m'n'$ consacrés à la mesure des distances, le porte-fils ou *réticule* a toujours un troisième fil pq qui les coupe verticalement et qui n'est pas inutile pour fixer avec précision le rayon visuel de l'observateur sur la mire ; il est superflu d'ajouter que cette mire est ordinairement peinte en blanc avec des divisions noires, et que des chiffres ou mieux des signes de convention, tels que de gros points placés différemment les uns des autres, sont destinés à aider la lecture.

Fig. 3.



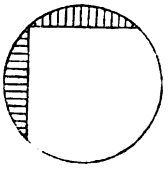
9. En résumé, la stadia se compose d'une lunette montée sur un pied

Digitized by Google

ordinaire à trois branches (*Pl. I, fig.* 9 et 10) et disposée intérieurement de manière à contenir un angle invariable, et d'une mire graduée dont les divisions dépendent essentiellement de la grandeur de cet angle. Il résulte de cette corrélation que, si les fils qui déterminent cet angle viennent à se détendre ou à se casser, si les bords de la fenêtre du diaphragme se dérangent par suite d'un accident quelconque, il faut nécessairement refaire une nouvelle graduation pour éviter les erreurs considérables que la plus petite différence dans la position des côtés de l'angle entraînerait dans l'évaluation des distances. On remédie à cet inconvénient à l'aide de l'une des dispositions suivantes qui permettent d'employer les mires divisées en centimètres comme celles qui servent pour les nivellements.

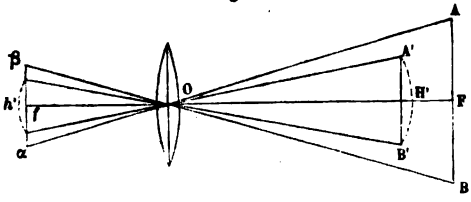
L'une de ces dispositions consiste à remplacer le diaphragme en cuivre ou les fils fixes dont nous venons d'expliquer l'usage, par une plaque de verre sur laquelle est gravée horizontalement et verticalement une division en millimètres; chacun de ces millimètres est lui-même partagé en 8 ou en 10 parties égales que le pouvoir grossissant de l'oculaire permet d'ailleurs de lire et de compter avec la plus grande facilité.

Fig. 4.



Soient alors H la hauteur connue en mètres d'un objet AB; D la distance aussi connue OF de cet objet à l'objectif O de la lunette; h la hauteur de son image $\alpha\beta$, mesurée à l'aide de l'échelle de la plaque de verre placée sur cette image, et enfin φ la distance Of de l'image à l'objectif, en d'autres termes, la *distance focale* de l'objectif; on a évidemment

Fig. 5.



$$D : \varphi :: H : h,$$

d'où

$$\varphi = D\frac{h}{H}.$$

Connaissant ainsi et une fois pour toutes la constante φ relative à une lunette donnée, si l'on veut mesurer avec le même instrument la distance D' d'un objet quelconque A'B', il suffira de lire le nombre h' des divisions interceptées sur l'échelle du diaphragme par une longueur donnée H' de la mire placée en A'B', pour conclure immédiatement de la proportion qui précède :

$$D' = \varphi\frac{H'}{h'}.$$

10. L'autre moyen de rendre la graduation de la mire indépendante de

Digitized by Google

l'écartement des fils, consiste à rendre au contraire cet écartement, et avec lui l'angle visuel, dépendant des divisions invariables de la mire, en faisant en sorte que l'un des deux fils soit mobile et puisse prendre la position qui convient à la distance qu'il s'agit de mesurer. Les calculs précédents s'appliquent encore identiquement à cet instrument, et la distance D d'un point auquel une longueur H de la mire donne une image d'une longueur h, est encore donnée par la relation $D = \varphi \frac{H}{h}$, dans laquelle φ a été déterminé comme il a été dit ci-dessus; toute la différence consiste dans le mécanisme qui, à défaut de lecture directe sur une plaque graduée, permet de mesurer exactement la hauteur de l'image h ou l'écart des deux fils.

Pour y parvenir, on adapte un *micromètre* (*) à l'instrument; il se compose d'une vis qui fait mouvoir l'un des fils, et d'une aiguille qui parcourt extérieurement un cadran fixé sur le tube de la lunette et divisé en 100 parties égales. A chacune de ses révolutions, cette aiguille fait mouvoir une roue dentée dans laquelle elle engrène; les dents sont numérotées, et celle qui porte le zéro est sous la pointe, quand les deux fils coïncident. Après une révolution entière, les fils sont distants d'une quantité égale au pas de la vis qui sert de pivot à l'aiguille, et chaque nouveau tour correspond à un nouveau pas.

Ainsi, par les combinaisons de cet ingénieux mécanisme, en comptant le nombre des dents qu'a rencontrées l'aiguille et les divisions du cadran qu'elle a parcourues ensuite, on arrive à apprécier l'écartement des fils avec une grande exactitude.

Dans les stadias plus récemment construites par MM. Lerebours et Secretan, il n'y a pas de roue dentée, et l'écartement des deux fils se mesure au moyen de divisions égales au pas de la vis, tracées sur le côté du diaphragme; les fractions du pas de la vis se déterminent toujours au moyen du cadran et de son indicateur. Nous donnons (*Pl. I, fig.* 4, 5, 6, 7 et 8) un dessin d'ensemble et de détail de ce dernier modèle.

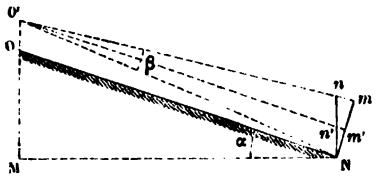
11. Les mesures obtenues au moyen de la stadia doivent, comme celles que l'on prend à la chaîne, être ramenées à l'horizontale, quand le terrain est incliné. Il y a même ici un double motif; car, outre que l'inclinaison du terrain donne directement une distance plus grande que la véritable, l'obliquité forcée de la mire verticale par rapport à l'axe de la lunette qui est sensiblement parallèle au terrain, exagère encore la portion de cette mire qui se présente entre les deux fils dans l'angle visuel et de laquelle dépend l'évaluation de la distance.

(*) On donne en général le nom de *micromètre* à tout appareil propre à mesurer avec précision de très-petites longueurs.

Digitized by Google

Soit donc ON la surface d'un terrain faisant avec le plan horizontal MN un angle α que nous apprendrons plus tard à déterminer. L'observateur est en O, et OO' est la hauteur de la lunette au-dessus du sol; la mire, étant placée verticalement en N suivant Nn, est oblique par rapport à l'axe de la lunette O'n', et la partie Nn comprise dans l'angle de visée β est trop grande; il faut donc la réduire à Nm, perpendiculaire au terrain ON et à l'axe de la lunette.

Fig. 6.



Pour trouver le rapport de Nm à Nn, remarquons que ces deux longueurs font partie du triangle Nmn dont l'angle en N est égal à α, puisque les côtés de ces angles sont perpendiculaires chacun à chacun. D'un autre côté, le triangle NO'm est isocèle, et, par suite, l'angle en m est égal à l'angle O'Nm, lequel est égal à l'angle droit mNO moins l'angle ONO', ou, à cause des deux parallèles O'm' et ON, moins $\frac{\beta}{2}$; l'angle en m est donc représenté par $90^\circ - \frac{\beta}{2}$, et, par suite, l'angle Nnm, qui est le supplément de la somme des deux autres, est égal à $90^\circ - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)$.

Cela posé, le triangle Nmn nous donne

$$\mathrm{N}m : \mathrm{N}n :: \sin\left(90^\circ - \alpha + \frac{\beta}{2}\right) : \sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right),$$

ou, en remplaçant les sinus par les cosinus des angles complémentaires,

$$\mathrm{N}m : \mathrm{N}n :: \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) : \cos\frac{\beta}{2};$$

d'où

$$\mathrm{N}m = \mathrm{N}n\frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}} = \mathrm{N}n\frac{\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \mathrm{N}n\left(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{tang}\frac{\beta}{2}\right).$$

Mais l'angle α étant très-petit dans tous les cas pratiques, son sinus l'est aussi; l'angle de visée β est toujours aussi très-petit, et la tangente de sa moitié est à plus forte raison très-petite: d'où il résulte que le produit de ces deux lignes trigonométriques est négligeable comparativement à $\cos\alpha$, et que l'on peut, sans erreur sensible, poser

$$\mathrm{N}m = \mathrm{N}n\cos\alpha.$$

Telle est donc la valeur de la quantité Nm qui, au lieu de Nn observé

Digitized by Google

directement, doit servir à calculer la véritable longueur ON; ce calcul est facile au moyen de ce qui précède, si l'on remarque que, d'après le principe fondamental sur lequel repose la stadia (7), la distance δ, fournie par la lecture de Nn, est à la distance véritable ON, qui serait fournie par la lecture de Nm, dans le rapport de ces deux quantités, c'est-à-dire que

$$\delta : \text{ON} :: \text{N}n : \text{N}m :: \text{N}n : \text{N}n \cos\alpha :: 1 : \cos\alpha;$$

d'où

$$\text{ON} = \delta \cos\alpha.$$

Mais enfin, la véritable distance horizontale cherchée MN, que nous appellerons D, est égale elle-même à ON $\cos\alpha$, comme nous l'avons vu pour la chaîne d'arpenteur (5); cette distance est donc, en définitive, égale à

$$\delta \cos^2\alpha.$$

Concluons en résumé que, *pour réduire à l'horizontale une distance δ fournie par la stadia sur un terrain faisant avec l'horizon un angle α, il faut multiplier cette longueur par le carré du cosinus de l'angle.*

Toutefois, dans un grand nombre de circonstances, l'inclinaison α du terrain est assez petite pour que la correction ne porte que sur des fractions de mètre; on la néglige alors, puisque l'erreur provenant de la lecture peut généralement atteindre 1 mètre.

Il est des Tables qui donnent toutes les valeurs de $\cos\alpha$ et de $\cos^2\alpha$ pour les valeurs de α croissantes de minute en minute entre 0 et 90 degrés; pour abréger les opérations de la correction, on en a même construit qui donnent toutes calculées les valeurs des distances réduites à l'horizontale, au moyen de l'angle de pente du terrain et du nombre de mètres indiqué par la lecture. Toutes ces Tables peuvent être d'une grande utilité, quand on a des distances nombreuses à mesurer dans un pays très-accidenté, et leur usage est trop simple pour que nous ayons besoin d'insister sur ce sujet.

MESURE DES ANGLES.

12. Nous avons vu (*Géométrie*, 93) de quelle manière on mesurait les angles au moyen de leur évaluation en degrés et fractions sexagésimales de degré, et nous avons montré que cette mesure était complétement indépendante de la grandeur du rayon de la circonférence dans laquelle on la considérait. Nous avons maintenant à faire l'application pratique de ces principes, en indiquant par quels procédés et à l'aide de quels instruments on peut relever sur le terrain l'angle de deux objets éloignés, c'est-à-dire, l'angle sous lequel ces deux objets sont vus d'un point ou sommet déterminé.

Les instruments qui servent à cet usage sont généralement de deux espèces; parmi ceux que nous avons à décrire ici, les uns, comme l'é-

Digitized by Google

querre d'arpenteur, le graphomètre et la boussole, fournissent l'évaluation numérique de l'amplitude de l'angle; le quatrième, la planchette, donne le moyen de le tracer immédiatement sur le papier sans en connaître la graduation. C'est pour consacrer cette distinction que quelques auteurs ont appelé génériquement les premiers *goniomètres*, et classé la planchette dans la catégorie des *goniographes*.

Nous allons examiner les uns et les autres, en conservant toutefois pour cette étude l'ordre établi par le programme.

ÉQUERRE D'ARPENTEUR. — USAGE ET VÉRIFICATION.

13. Le plus simple des instruments, parmi ceux qui servent à mesurer ou à tracer des angles sur le terrain, est l'*équerre d'arpenteur*. Elle se compose ordinairement d'un cylindre en cuivre de $0^m,06$ à $0^m,08$ de diamètre, dans lequel sont pratiquées quatre fentes verticales ou *pinnules* déterminées par deux diamètres rectangulaires. Le plus souvent ce système de fentes est double, et deux diamètres consécutifs font ensemble un angle de 45 degrés. Souvent, enfin, la surface cylindrique est enlevée et remplacée par le prisme octogonal régulier inscrit, dont chacune des faces porte une pinnule en son milieu; le tout, monté à vis sur une douille en cuivre, se place sur un bâton ferré qu'on enfonce en terre dans une position sensiblement verticale. On voit alors facilement que, si l'on dirige l'un des diamètres suivant un alignement quelconque, les trois autres pinnules détermineront trois alignements, dont l'un sera perpendiculaire et les deux autres inclinés de 45 degrés à droite et à gauche sur le premier. (Voir le dessin de l'équerre, *Pl. I, fig.* 11, 12 et 13.)

On remplace quelquefois, et toujours au moins pour les deux plans diamétraux principaux, la moitié de la hauteur de chaque fente par un fil tendu dans une fenêtre; au moyen de cette disposition, on vise avec beaucoup plus de précision, en appliquant l'œil près de la fente et en faisant en sorte que le fil de la fenêtre opposée couvre exactement le point visé.

14. La première vérification à laquelle on doive soumettre cet instrument consiste à s'assurer que les deux diamètres principaux se coupent bien à angle droit. Pour cela, après avoir planté l'instrument aussi verticalement que possible, on vise à travers deux des pinnules un objet éloigné, puis un second par les deux autres; on fait ensuite tourner l'instrument sur lui-même, jusqu'à ce qu'on aperçoive le premier objet à travers les secondes pinnules, et réciproquement. Si la coïncidence se fait exactement sur les deux diamètres, les quatre angles qu'ils forment entre eux sont égaux et, par conséquent, droits, et l'équerre est exactement construite. La même vérification peut se faire à l'égard des deux diamètres inclinés de 45 degrés sur les premiers, et, enfin, il est facile de s'assurer

Digitized by Google

de la même manière que les angles droits des diamètres principaux sont bien également partagés par les diamètres secondaires.

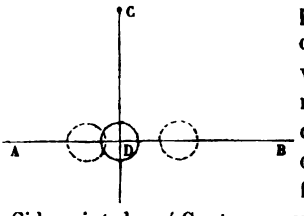
La plupart des équerres ne sont pas rectifiables, et cette condition ne pourrait guère être remplie sans enlever à cet instrument la simplicité qui fait un de ses principaux mérites. En raison de cette simplicité même, presque toutes les équerres sortant des mains des fabricants sont exactement divisées: toutefois, plusieurs problèmes intéressants pourraient à la rigueur être résolus avec une équerre fausse, aussi facilement qu'avec une bonne; mais, en général, cet instrument est d'un prix si peu élevé, qu'une équerre reconnue défectueuse devrait être immédiatement rejetée.

Passons maintenant en revue quelques-uns des problèmes les plus usuels, parmi ceux qui sont susceptibles d'être résolus par l'équerre.

15. *Par un point donné* C, *mener une droite perpendiculaire à une droite donnée* AB.

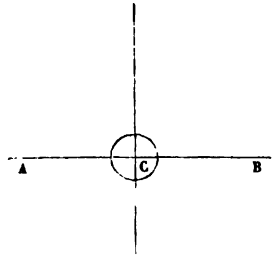
Si le point C est extérieur à la ligne AB, on promènera l'équerre sur cette ligne, en tenant l'un des diamètres principaux dans la direction AB, jusqu'à ce qu'on arrive au point qui permettra de viser le point C dans la direction du diamètre perpendiculaire. Le pied D de l'équerre, dans cette position, sera le pied de la perpendiculaire cherchée, qu'il suffira alors de jalonner.

Fig. 7.



Si le point donné C est, au contraire, sur la ligne AB, il faudra simplement placer l'équerre en C, diriger l'un des diamètres sur cette ligne, et la perpendiculaire cherchée CD sera la direction du diamètre principal correspondant au premier.

Fig. 8.

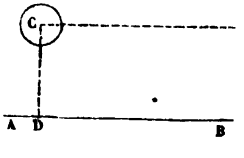


Il n'y aurait rien à changer à ces indications, s'il s'agissait de mener, par un point donné, une droite faisant avec une autre droite donnée un angle de 45 degrés.

16. *Par un point donné* C, *mener une parallèle à une droite donnée* AB.

On détermine, comme il vient d'être dit, le pied D de la perpendiculaire abaissée du point C sur AB, puis on place en C l'équerre dont on dirige l'un des diamètres suivant CD; le diamètre perpendiculaire au premier détermine la direction de la parallèle cherchée.

Fig. 9.

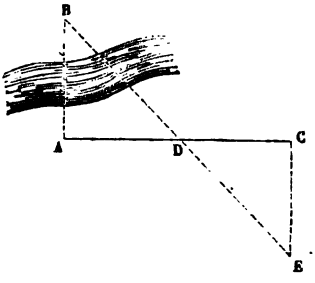


Digitized by Google

17. *Mesurer la distance d'un point donné* A *à un autre point* B *inaccessible.*

Pour cela, se plaçant en A avec l'équerre, on trace AC perpendiculaire à AB et, sur cette perpendiculaire, on porte à la suite l'une de l'autre deux longueurs égales quelconques AD et DC. Élevant ensuite en C une perpendiculaire indéfinie CE à AC, on jalonne cette perpendiculaire ainsi que la direction BD dont la rencontre en E avec la première détermine une longueur CE égale à la distance AB cherchée. Cette solution n'a pas besoin d'une démonstration, laquelle reposerait d'ailleurs sur l'égalité manifeste des deux triangles rectangles ABD et CDE.

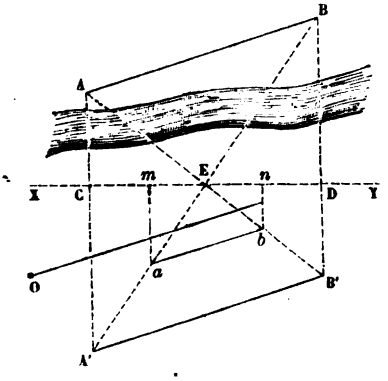
Fig. 10.



18. *Mesurer la distance de deux points inaccessibles* A, B, *et, par un point donné* O, *mener une parallèle à la droite* AB.

On trace une base XY sur laquelle on cherche les pieds C et D des perpendiculaires abaissées de A et de B, et l'on fixe le milieu E de CD; on détermine ensuite, comme dans le problème précédent, les points de rencontre A', B' des directions AE, BE avec les deux perpendiculaires AC et BD. Il ressort de cette construction que DB' = AC et A'C = DB, en sorte que la figure AA'B'B est un parallélogramme dans lequel le coté A'B' est égal et parallèle à la distance cherchée AB. Il reste donc maintenant à mesurer directement A'B' et à lui mener une parallèle par le point O, ce que nous savons faire (16).

Fig. 11.



Comme on est le maître de choisir la base XY de manière que les opérations à faire en arrière puissent se développer sur un terrain accessible, on ne rencontrera le plus souvent aucune difficulté sérieuse; si cependant le terrain n'était pas assez vaste, on prendrait $Em = \frac{CE}{2}$ et $En = \frac{ED}{2} = \frac{CE}{2} = Em$; on mènerait les perpendiculaires *ma*, *nb* qui dé-

Digitized by Google

termineraient *ab*, lequel serait parallèle à A'B' et par suite à AB ; de plus, *ab* serait évidemment la moitié de AB.

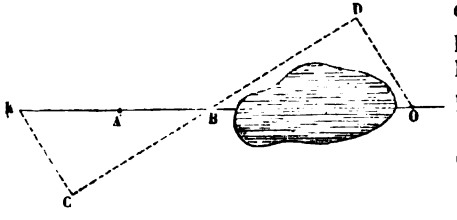
19. *Prolonger avec l'équerre une ligne* AB *au delà d'un obstacle.*

Première solution. — On mène B*b* perpendiculaire sur AB ; *bc* perpendiculaire sur B*b*, *c*C perpendiculaire sur *bc* ; enfin, on mesure une longueur *c*C égale à *b*B et l'on trace CD perpendiculaire sur C*c* ; CD est alors évidemment le prolongement cherché de AB.

Fig. 12.

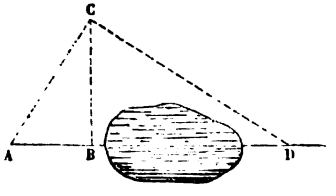
Deuxième solution. — Par le point B on mène une ligne quelconque CD sur laquelle on prend BC = BD, de telle façon que la perpendiculaire à CD menée au point D dépasse l'obstacle ; on élève ensuite une perpendiculaire à CD au point C et l'on mesure CK ; prenant enfin sur la première perpendiculaire une longueur DO. égale à CK, on a le point O qui est évidemment un point du prolongement de AB. En choisissant une autre ligne CD, ou en prenant une autre valeur de BC, on obtiendra autant d'autres points du prolongement qu'on en voudra.

Fig. 13.



Troisième solution. — Au point B on élève sur AB une perpendiculaire BC sur laquelle on prend BC quelconque, tel toutefois que la perpendiculaire CD à AC dépasse l'obstacle. Les deux triangles rectangles semblables ABC, ADC fournissent

Fig. 14.



$$CD : BC :: AC : AB,$$

d'où

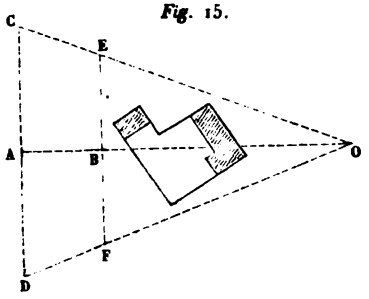
$$CD = \frac{BC \times AC}{AB}.$$

Portant enfin sur CD cette valeur, on obtient la position du point D et, de la même manière, celle d'autant de points du prolongement qu'on en voudra.

Quatrième solution. — On peut encore élever CD et EF perpendicu-

Digitized by Google

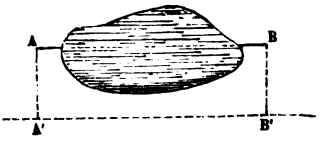
Fig. 15.



laires en A et B à la ligne AB; prenant ensuite AC et EB de façon que CE prolongé dépasse l'obstacle, on mesure AD = AC, BF = BE, et la rencontre des lignes CE et DF fournit le point O qui appartient évidemment, ainsi que tous ceux obtenus de la même manière, à la droite indéfinie AB.

20. ***Mesurer une ligne*** **AB** ***accessible à ses deux extrémités seulement.***

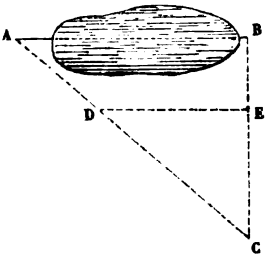
Fig. 16.



Première solution. — On forme, au moyen de l'équerre, le rectangle ABB'A' et l'on mesure la longueur A'B' qui est égale à AB.

Deuxième solution. — On trace BC perpendiculaire à AB, et l'on mesure BC; par un point quelconque E de cette ligne, on trace DE parallèle à AB jusqu'à la rencontre de AC en D; on mesure CE, ainsi que DE, et la proportion

Fig. 17.



$$AB : BC :: DE : EC$$

donne

$$AB = \frac{BC \times DE}{EC}.$$

S'il était possible de prendre le point E au milieu de BC, la ligne AB serait précisément le double de DE, qu'il suffirait alors de mesurer.

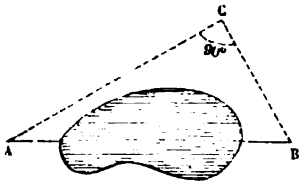
COROLLAIRE. — On voit que cette solution n'exige pas qu'on approche du point A; elle sert donc dans le cas où l'une des extrémités de la droite est inaccessible.

Dans l'un et l'autre cas, du reste, elle peut être souvent simplifiée par l'emploi des pinnules à 45 degrés de l'équerre; car si, l'un des diamètres de l'instrument étant dirigé sur BC, on chemine sur cette ligne jusqu'à ce qu'on puisse viser le point A sous un angle en C de 45 degrés, il est évident qu'alors BC = AB, et il suffit de mesurer la première de ces deux lignes.

Troisième solution. — On mène une ligne quelconque AC par le point A,

Digitized by Google

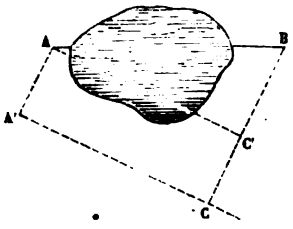
Fig. 18.



et l'on abaisse du point B sur cette ligne une perpendiculaire BC que l'on mesure ainsi que AC; le triangle rectangle ABC donne alors

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}.$$

Fig. 19.



Quatrième solution. — Si l'obstacle s'opposait à la construction de la figure précédente, on tracerait par le point A une ligne quelconque AA' que l'on mesurerait, puis A'C perpendiculaire à AA' et BC perpendiculaire à A'C. Après avoir mesuré A'C et BC, on calculerait

$$AB = \sqrt{\overline{AC'}^2 + \overline{BC'}^2} \times \sqrt{\overline{A'C}^2 + \overline{(BC - AA')}^2}.$$

21. *Evaluer la surface d'une portion de plan comprise dans un polygone ou dans une courbe quelconque.*

Si le périmètre est un polygone régulier, la Géométrie élémentaire fournit des méthodes simples pour évaluer la surface; s'il s'agit d'un polygone irrégulier, on peut le partager en triangles ayant pour sommet commun un des sommets du polygone et pour côtés aboutissant à ce sommet les diagonales; puis, mesurer tous ces éléments linéaires et évaluer la surface de chaque triangle par la formule (*Trigon.*, **44**) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ou par la mesure d'une base et de la hauteur correspondante.

Fig. 20.

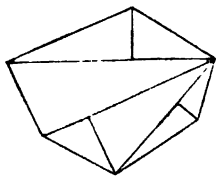
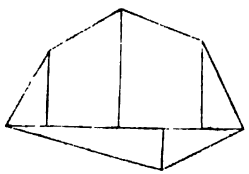


Fig. 21.

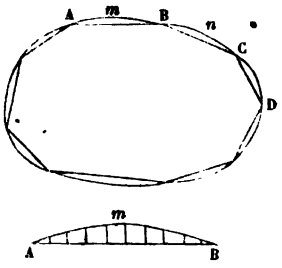


On peut encore mesurer la surface du polygone en traçant la plus grande diagonale, sur laquelle on abaisse des perpendiculaires de chacun des sommets; le polygone se trouve ainsi décomposé en triangles et trapèzes rectangulaires, dont la mesure n'offre aucune difficulté.

Si la surface est limitée par une ligne courbe, on inscrira dans cette courbe un polygone dont les côtés s'en écartent le moins possible, et dont la surface s'évaluera comme il vient d'être dit. Quant aux petites surfaces

Digitized by Google

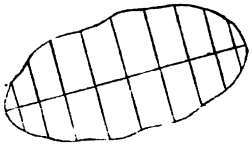
Fig. 22.



mixtilignes A*m*B, B*n*C, etc., elles se mesurent en partageant la corde AB en parties égales assez petites pour que l'on puisse regarder comme des lignes droites les portions de courbe comprises entre les perpendiculaires élevées sur la corde par ces points de division. On évalue alors chaque petit trapèze et chacun des deux triangles extrêmes, comme il a été dit ci-dessus, et la réunion de toutes ces surfaces partielles forme la surface cherchée.

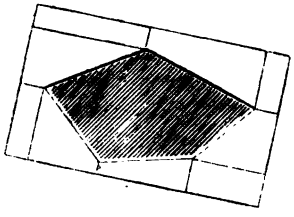
On voit d'ailleurs que rien ne s'opposerait à ce que la mesure de la surface se fît avec une approximation suffisante par un procédé identique avec celui que nous avons indiqué pour les polygones, en traçant la plus grande corde et en partageant, par des perpendiculaires à cette ligne, la surface en trapèzes rectangulaires dont le côté curviligne serait assez petit pour pouvoir, sans erreur sensible, être mesuré comme une ligne droite.

Fig. 23.



Enfin, si l'intérieur du polygone ou de la courbe était inaccessible, on ne pourrait employer les méthodes ci-dessus; il faudrait alors envelopper le contour dans un polygone dont on sût calculer la surface, sans pénétrer à l'intérieur; on retrancherait ensuite de cette surface la somme de celles des intervalles compris entre le périmètre donné et les côtés du polygone auxiliaire, et la différence serait l'aire cherchée.

Fig. 24.



Il est inutile de répéter que toutes ces constructions de perpendiculaires s'opèrent sans difficulté sur le terrain, au moyen de l'équerre d'arpenteur.

PLANCHETTE ET ALIDADE. — USAGE ET VÉRIFICATION.

§ 22. Nous ne séparerons pas ces deux instruments, qui ne peuvent guère servir que simultanément.

La *planchette* est une petite planche ou table en bois sur laquelle est collé le papier qui doit recevoir sur place le dessin du terrain; elle est supportée par un pied à trois branches, et ceux de ces instruments qui sont construits avec soin sont en même temps reliés audit pied par un genou dit *à la Cugnot* qui, composé de deux cylindres superposés dont

Digitized by Google

les axes sont perpendiculaires l'un à l'autre (voir *Pl. I, fig.* 14), permet deux mouvements à angle droit : de cette façon, la planchette peut être placée dans un plan horizontal, condition essentielle à l'exactitude des opérations et que l'on remplit sans peine (*Nivell.*, 6 *et* 10), au moyen d'un niveau à bulle d'air.

Certaines planchettes peuvent se mouvoir aussi dans le sens horizontal, ce qui facilite la mise en place de l'instrument, après les déplacements qu'il subit nécessairement dans le cours de l'opération ; mais cette complication est assez inutile, attendu qu'il est facile, avec un peu d'habitude, de mettre, à 3 ou 4 centimètres près, un point déjà projeté sur la planchette, au-dessus du piquet correspondant sur le terrain ; l'erreur qui peut résulter de cette imperfection, dans le dessin, n'est pas plus grande que celles qu'engendrent nécessairement les épaisseurs mêmes des lignes.

Cet instrument n'est d'ailleurs soumis à aucune vérification ; il sera d'autant plus parfait qu'il réunira la légèreté à la solidité. Il ne faut pourtant pas balancer à sacrifier la première condition à la seconde ; car les désorientations produites par le peu de stabilité de la planchette jettent dans de grands embarras, et occasionnent parfois une perte de temps considérable.

23. L'*alidade* est un instrument au moyen duquel on trouve sur un plan, qui est d'ordinaire celui de la planchette décrite plus haut, la trace d'un autre plan perpendiculaire au premier ; elle se compose d'une règle mobile, de cuivre ou de bois, ayant 3 ou 4 décimètres de longueur et portant, soit une tige placée en son milieu et, sur cette tige, une lunette (*alidade à lunette*) pouvant pivoter autour d'un axe parallèle au plan de la règle et perpendiculaire à sa longueur ; soit, à ses deux extrémités, deux pinnules (*alidade à pinnules*) perpendiculaires au plan de la règle et munies, comme dans l'équerre, l'une d'une fente verticale, l'autre d'un fil délié parallèle à cette fente. Nous donnons (*Pl. II, fig.* 1, 2, 3, 4 *et* 5) les dessins d'une alidade à pinnules et d'une alidade à lunette.

Le plan vertical passant par les fils des pinnules, ou le plan décrit par l'axe optique de la lunette dans les diverses positions qu'elle peut prendre, *plan* dit *de collimation*, doit toujours passer exactement par le bord de la règle servant à tracer les alignements, et ce bord prend lui-même le nom de *ligne de foi*.

24. En chaque point où l'on veut relever et décrire l'angle sous lequel apparaissent deux objets éloignés, on établit la planchette et, sur celle-ci, une aiguille correspondant au sommet de l'angle en question ; autour de cette aiguille on fait tourner le bord de la règle pour amener successivement le plan de collimation dans la direction des deux points de visée, et, après s'être assuré de la parfaite exactitude de chacune des visées, on trace les deux alignements donnés par la ligne de foi.

Digitized by Google

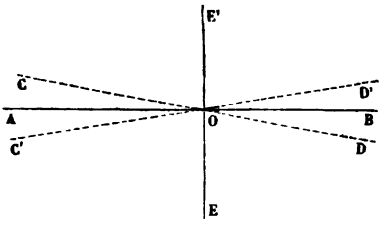
Il n'est, du reste, pas absolument indispensable que la projection du sommet de l'angle soit rigoureusement au-dessus de ce point lui-même; quand elle s'en écarterait d'un décimètre, il faudrait que l'on opérât à une bien grande échelle pour que cette erreur fût appréciable sur le plan.

25. Pour opérer exactement avec l'alidade, il faut que la ligne tracée au crayon le long de la règle sur la planchette soit bien la trace du plan vertical déterminé par l'axe optique de la lunette ou par les deux pinnules.

Dans cette dernière espèce d'alidade, la condition énoncée est presque toujours remplie, et d'ailleurs l'opérateur n'a généralement pas le moyen de remédier par lui-même, séance tenante, à un dérangement de cette nature.

Quand on se sert d'une alidade à lunette, il faut, avant toutes choses, que l'axe de rotation de la lunette soit parallèle au plan de la règle et perpendiculaire à la ligne de foi. Si cette condition essentielle n'était pas remplie, il faudrait rejeter l'instrument; si au contraire elle est satisfaite, il importe, avant d'opérer, de s'assurer: 1° si l'axe optique de la lunette est bien exactement perpendiculaire à son axe de rotation, pour pouvoir décrire, dans le mouvement qu'on lui imprime, un plan et non une surface conique; 2° si ledit plan, qui n'est autre que le plan vertical de collimation, comprend bien à la fois et l'axe optique et la ligne de foi. La première de ces deux vérifications est facile; elle consiste à viser un même point éloigné D avec la lunette, d'abord dans sa position normale, puis après l'avoir fait tourner sur elle-même de 180 degrés. On conçoit que, si l'on a soin de tracer d'abord au crayon sur le papier la ligne AB déterminée par la règle, l'angle aigu EOD sera reporté, s'il y a obliquité, en E'OD', et l'angle DOD' sera le double de la correction à opérer. Deux petites vis placées à droite et à gauche du réticule permettent, en desserrant l'une et serrant l'autre, de lui donner un mouvement de translation du côté qui convient pour détruire l'erreur.

Fig. 25.



On s'assure en même temps de la verticalité de l'un des fils en examinant si, la lunette élevée ou abaissée, l'objet visé est toujours masqué par le fil, ou bien en le dirigeant sur le côté d'un bâtiment. C'est encore au moyen du réticule, et en le tournant autour de l'axe optique, que l'on effectue cette seconde correction.

Il n'est pas moins intéressant, avons-nous dit, que la ligne de foi soit exactement située dans le plan vertical décrit par l'axe optique de la lunette; il faut, pour s'en assurer, avoir d'avance sur la planchette la pro-

Digitized by Google

jection d'une ligne du terrain; placer la ligne de foi sur la projection donnée; viser, dans cette position, le point situé à l'extrémité de la ligne projetée, et voir si la projection fournie par cette visée coïncide avec la première, ou de combien elle en diffère.

On conçoit, du reste, que l'on puisse se passer de cette condition, quand on veut seulement avoir l'angle entre deux plans verticaux; car, quelle que soit la position de la ligne de foi par rapport au plan de collimation, cette ligne suivra toujours le mouvement angulaire dudit plan, et l'orientation générale seule sera à modifier d'une quantité qu'on appelle l'*erreur de collimation*.

GRAPHOMÈTRE. — USAGE ET VÉRIFICATION.

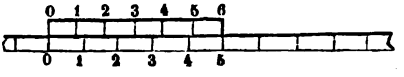
26. L'instrument le plus commode et le plus usité pour la mesure directe des angles est le *graphomètre*. Il se compose d'un demi-cercle ou limbe gradué, de 10 à 30 centimètres de diamètre, et sur lequel une règle peut se mouvoir autour d'un axe qui passe par le centre du cercle perpendiculairement à son plan. Aux extrémités du diamètre du limbe, comme à celles de la règle mobile, s'élèvent perpendiculairement deux pinnules formant alidade et destinées à fixer les lignes de visée.

L'instrument roule sur un genou à coquille attaché à un pied à trois branches, et qui permet au limbe de se mettre très-aisément dans le plan de l'angle que l'on veut observer et mesurer; on place le graphomètre au sommet de cet angle, on ajuste les deux pinnules du diamètre fixe sur l'un des objets, et l'on vise l'autre avec l'alidade mobile; l'angle compris se lit alors directement sur la graduation. Cette graduation, marquée sur le limbe dans les deux sens, comprend 180 degrés, et chaque degré se subdivise lui-même en demi-degrés, ainsi qu'on peut le voir par les dessins des *fig.* 6 et 7, *Pl. II.*

27. Pour donner plus d'approximation à la lecture des angles fournis par le graphomètre, chacune des extrémités de l'alidade mobile est munie d'un *vernier*. On appelle ainsi un appareil qui sert à estimer les parties de degré plus petites que celles qui sont directement établies sur le limbe; il consiste en une petite graduation auxiliaire et concentrique à la première, mais mobile avec l'alidade, et divisée en un nombre de parties plus grand d'une unité que celui des divisions renfermées dans le même espace sur le limbe.

De cette disposition, qui s'applique également aux graduations rectilignes, il résulte que, si nous désignons par D chacune des parties les plus petites du limbe, par *d* celles du vernier, et par *n* le nombre de celles-ci qui correspondent à $n - 1$ des premières,

Fig. 26.



$n = 6$.

Digitized by Google

nous aurons évidemment

$$nd = (n-1)\,D,$$

d'où

$$d = \frac{n-1}{n}D = D - \frac{D}{n}, \quad \text{et} \quad D - d = \frac{D}{n}.$$

Or, il est clair que la division 1 du vernier est en retard de $D - d$ ou $\frac{D}{n}$ sur la division 1 du limbe ; que la division 2 est en retard de $\frac{2D}{n}$ sur son homologue ; la division 3, de $\frac{3D}{n}$, et ainsi de suite jusqu'à la division n, qui est en retard de $\frac{nD}{n}$ ou D sur la division n du limbe. Si, par conséquent, nous faisons avancer le vernier d'un nombre entier de fois $\frac{D}{n}$ compris entre o et n, le nouveau mouvement aura nécessairement pour effet de faire arriver sur son homologue du limbe celle des divisions du vernier dont le rang est marqué par ce nombre lui-même ; réciproquement, si l'on veut savoir de combien de fois $\frac{D}{n}$ le zéro du vernier aura dépassé celui du limbe, il suffira d'observer quel est le rang de celle des divisions dudit vernier qui coïncide avec son homologue.

Il ressort évidemment de cet exposé que, en quelque point de la graduation que soit arrêté le zéro du vernier, on devra ajouter au nombre entier de divisions franchies par ce zéro, une fraction égale à autant de fois $\frac{D}{n}$ qu'il y a d'unités dans le nombre qui exprime le rang de celle des divisions du vernier qui s'approche le plus de coïncider avec l'une des divisions du limbe ; la mesure cherchée s'obtient ainsi avec une approximation marquée par la quantité $\frac{D}{n}$, laquelle prend des valeurs diverses, suivant celles qui sont données à D et à n.

Fig. 27.

$n = 6$.

Dans le graphomètre ordinaire, chaque division du limbe équivaut, comme il a été dit plus haut, à un demi-degré ou 30 minutes ; le vernier comprend lui-même 30 divisions pour une amplitude de 29 minutes ; par conséquent, la quantité $\frac{D}{n}$ est égale à $\frac{30'}{30}$ ou à 1 minute, et la lecture se fait *en ajoutant au nombre de demi-degrés accusés par le limbe, autant de minutes qu'il y a d'unités dans le nombre qui exprime le rang de celle des divisions du vernier qui coïncide le plus sensiblement avec une division du limbe.*

Digitized by Google

On voit que cette disposition ne donne que les mouvements du vernier représentés par la quantité $D - d$ ou $\frac{D}{n}$, et que, dans le cas du graphomètre que nous venons d'examiner, les angles ne sont fournis qu'à moins d'une minute près; pour avoir une plus grande approximation, il faudrait rendre $D - d$ ou $\frac{D}{n}$ plus petit, c'est-à-dire prendre, en même temps ou séparément, pour D un nombre plus petit et pour n un nombre plus grand; mais, dans la question qui nous occupe, l'approximation obtenue avec $D = 30'$ et $n = 30$ est parfaitement suffisante.

28. Pour vérifier le graphomètre, il faut voir si le zéro de l'alidade mobile coïncide parfaitement avec l'origine des graduations du limbe, lorsque les fils des quatre pinnules sont dans le même plan vertical. Si cette condition n'a pas lieu, il faut ajouter à chaque angle ou en retrancher, suivant le cas, la distance angulaire constante des deux zéros, ou l'erreur de collimation.

Si l'alidade mobile pivotait autour d'un point qui ne fût pas le centre du limbe, cette imperfection serait la cause d'une erreur variable de lecture. Elle serait nulle dans la circonstance particulière où l'axe de l'alidade mobile passerait par le centre, et la plus grande possible quand cet axe serait dans une direction perpendiculaire à la ligne passant par le centre et par le pivot; la distance de ces deux points serait sensiblement égale au maximum d'erreur. On pourrait au surplus, même avec un graphomètre présentant ce défaut, apprécier l'erreur que produirait la mesure d'un angle, au moyen d'une correction analogue à celle qui sera indiquée pour la boussole au n° 32; mais le plus simple et le plus sage, en pareil cas, serait de rejeter l'instrument qui serait d'un usage incommode et peu précis.

29. Si les objets que l'on vise et le point de station sont à peu de chose près dans le même plan horizontal, la hauteur des ouvertures pratiquées dans les pinnules permet de les voir, quoique le limbe soit placé horizontalement. Si la différence du niveau est trop considérable, il faut établir le limbe dans le plan des objets, ce qui a l'inconvénient de ne pas donner exactement l'angle réduit à l'horizon, ou se servir d'un graphomètre qui, au lieu de pinnules, soit muni de deux lunettes plongeantes que l'on fait mouvoir à l'aide de vis de rappel et que l'on arrête au moyen de vis de pression. Ces instruments sont de beaucoup les plus exacts et les plus commodes; ils présentent en outre l'avantage de donner, dans la plupart des cas, l'angle véritable compris entre les plans verticaux passant par le point de station et les points de visée. Construit ainsi, le graphomètre doit porter un niveau qui assure l'horizontalité du plan du limbe.

Digitized by Google

Les graphomètres sont ordinairement munis d'une petite boussole qui sert à orienter le plan qu'on lève à l'aide de cet instrument; nous reviendrons sur cet objet, quand nous aurons décrit la boussole et que nous exposerons les diverses méthodes du lever des plans.

30. On mesure encore les angles avec un instrument qui n'est qu'un graphomètre de diamètre réduit, mais qui ressemble par sa structure générale à l'équerre d'arpenteur. Tandis que celle-ci ne donne les angles que de 45 degrés en 45 degrés, le *pantomètre* sert, comme l'indique son nom, à mesurer tous les angles; il se compose de deux tambours, dont l'un inférieur A (*Pl. I, fig.* 17 et 18) s'emmanche par une douille C sur un bâton d'équerre, et dont l'autre supérieur B peut tourner autour d'un axe qui lui est commun avec le premier. Le tambour fixe porte la graduation de la circonférence en degrés et subdivisions de degrés; le tambour mobile est muni d'un vernier.

Pour déterminer un angle au moyen du pantomètre, on plante l'instrument au sommet; on dirige suivant l'un des côtés les pinnules percées aux extrémités du diamètre correspondant au zéro de graduation du tambour inférieur; puis, on fait tourner le tambour supérieur jusqu'à ce que les pinnules percées aux extrémités du diamètre correspondant au zéro du vernier se trouvent dans la deuxième direction; l'arc gradué, comme dans le graphomètre, donne l'angle par une simple lecture.

Le pantomètre est d'un emploi fort commode et très-facile; malheureusement, il n'est pas susceptible d'une grande précision, à cause du peu de distance des deux points qui déterminent les lignes de visée.

BOUSSOLE. — USAGE ET VÉRIFICATION.

31. L'aiguille aimantée donnant une direction considérée comme constante, dans une même partie de la terre et sous les mêmes influences que l'on suppose ne pas varier dans l'étendue et pendant la durée des observations, cette propriété a été utilisée pour la mesure des angles; la *boussole* n'est autre chose qu'une aiguille aimantée suspendue par son milieu sur un pivot et renfermée dans une boîte carrée. La pointe de l'aiguille se meut sur un cercle de $0^m,10$ à $0^m,20$ de diamètre, divisé en 360 degrés et en subdivisions de degré.

Sur l'un des côtés de cette boîte, parallèlement à la ligne de foi de la boussole, est appliquée une alidade à pinnules ou à lunettes qui peut basculer dans un plan vertical, quand la boussole est horizontale. On juge si la boussole approche de l'horizontalité en la faisant pivoter dans son plan sur le genou à coquille de son pied, et en voyant si, dans ce mouvement, les pointes de l'aiguille affleurent toujours le bord du limbe gradué; une plus grande exactitude n'est pas nécessaire en général; toutefois, quelques-uns de ces instruments portent une bulle d'air qui se meut

Digitized by Google

dans un tube fermé, légèrement bombé et presque complétement rempli d'eau, de manière que ladite bulle vienne se placer au sommet de la partie courbe, entre deux repères fixés d'avance, quand l'instrument est placé sur une ligne horizontale. Ces diverses dispositions, qui seront expliquées ultérieurement avec plus de détail, ressortent suffisamment d'ailleurs de l'examen des *fig.* 8 et 9, *Pl. II.*

Cela posé, si l'on tourne d'abord la boussole jusqu'à ce que l'aiguille aimantée corresponde au zéro de sa graduation, direction qu'on appelle sa *ligne de foi ;* si l'on vise ensuite par la lunette ou les pinnules un objet éloigné, après avoir amené, par un mouvement de rotation autour du pivot vertical, le système dans cette direction, il est clair que l'observation du nombre de degrés compris sur l'arc gradué de la boussole entre la ligne de foi et la pointe de l'aiguille, donnera directement la valeur de l'angle formé par la ligne de visée avec la direction invariable de l'aiguille, direction qu'on appelle le *méridien magnétique.*

Si donc l'on répète cette observation pour un autre objet, on aura aussi l'angle de la seconde ligne de visée avec le méridien magnétique, et la différence de ces deux résultats sera l'angle des deux lignes de visée, ou mieux l'angle des deux plans verticaux qui passent par la station et par les deux points observés.

32. Il est bon de remarquer que le parallélisme de la ligne de foi et de l'alidade n'est pas une condition indispensable pour qu'il soit possible de mesurer l'angle sous lequel sont vus deux points déterminés ; on comprend en effet que, l'aiguille étant fixée dans la direction du méridien magnétique, le reste du système se meut indépendamment d'elle et tout d'une pièce, en décrivant l'arc qui mesure l'angle cherché, et que, quel que soit le nombre de degrés fournis par la lecture du limbe lors de la première visée, l'angle cherché sera toujours mesuré par le nombre de degrés qui auront passé, pendant le mouvement, sous l'aiguille, c'est-à-dire par la différence entre les résultats des deux lectures.

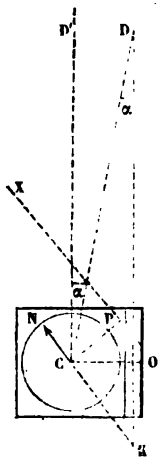
La boussole donne cependant toujours, quand on veut seulement obtenir l'angle que fait avec le méridien magnétique le rayon dirigé sur un objet éloigné, une erreur qui tient à ce que l'alidade ou la lunette n'est pas placée au centre de l'instrument, c'est-à-dire au sommet de l'angle lui-même.

Soient en effet C le centre de la station ; CN le méridien magnétique, c'est-à-dire la direction fixe de l'aiguille aimantée ; CO l'axe de mouvement de l'alidade et D l'objet à viser. L'angle fourni directement par la boussole est l'angle des deux droites PX et OD, lequel est égal à NKD, ou encore à NCD', tandis que l'angle véritable est NCD qui en diffère de DCD' ou α.

Pour apprécier la portée de cette erreur, il convient d'observer que,

Digitized by Google

Fig. 28.



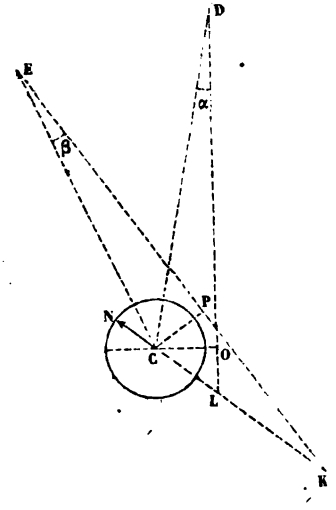
dans le triangle rectangle COD, nous avons

$$\sin \alpha = \frac{CO}{CD}.$$

L'angle α est toujours très-petit, puisque son sinus a pour expression une fraction dont le numérateur est la distance de l'axe de la lunette au centre de la boussole, et le dénominateur la distance, toujours relativement très-grande, du même centre à l'objet visé. Cette erreur angulaire est donc d'autant moindre que l'on vise un objet plus éloigné, et, en supposant que la distance CO soit de $0^m,10$, l'erreur α, pour un objet situé à 60 mètres, est moindre que 6 minutes, quantité bien inférieure à celles que l'on commet dans la lecture; en conséquence, il n'y a pas lieu de tenir compte de cette différence dans la pratique, eu égard au degré de précision que comporte l'emploi de la boussole.

Il est évident d'ailleurs que, en raison de ce que nous avons dit dans le numéro précédent, cette cause d'erreur disparaît complétement dans la mesure de l'angle de deux objets, par suite de la soustraction qui s'opère sur les angles au méridien, pourvu toutefois que les deux objets visés soient sensiblement à la même distance; en effet, si les deux points de mire sont D et E, les angles véritables au centre de la station sont NCD et NCE, et ceux que donne la boussole sont respectivement NLD et NKE. Or, l'angle cherché est NCD — NCE ou ECD, et l'angle fourni par l'observation est NLD — NKE; mais nous venons de voir que

Fig. 29.



$$NCD = NLD + \alpha$$

et

$$NCE = NKE + \beta;$$

donc

$$NCD - NCE = NLD - NKE + \alpha - \beta;$$

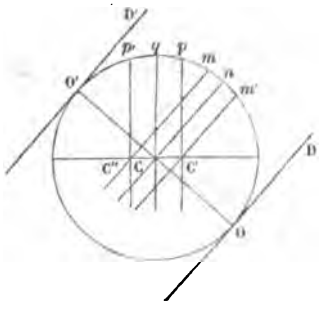
d'où il suit que l'angle cherché sera égal à l'angle déduit de l'observation, si $\alpha = \beta$; ce qui aura lieu, comme le montrent les triangles rectangles COD et CPE, si les deux

Digitized by Google

points D et E sont à des distances qui permettent de considérer OD comme égal à PE; mais, nous le répétons, il n'y a pas lieu, dans la pratique, de s'arrêter à ces détails, qui ne sauraient avoir sur les résultats une influence qu'on ait intérêt à mesurer.

33. La seule vérification à laquelle il importe de soumettre la boussole avant d'en faire usage, a pour but de s'assurer que l'instrument est bien centré, c'est-à-dire, que le pivot sur lequel repose l'aiguille est bien au centre du limbe gradué. Si cette condition n'est pas remplie, soit C′ la place qu'occupe le pivot; de toutes les positions que peut prendre la boussole relativement à l'aiguille, une seule, celle dans laquelle l'aiguille sera dirigée suivant la ligne CC′, donnera une lecture conforme à la vérité; pour toute autre position C′*m* de l'aiguille, l'indication fournie différera de la véritable du petit arc *mn*, et cette différence atteindra son maximum, quand la boussole sera placée de manière que l'aiguille soit perpendiculaire à la ligne CC′, auquel cas l'arc *pq* mesurera cette erreur.

Fig. 30.



Cependant on pourrait à la rigueur se servir d'un instrument décentré, en retournant la boussole de 180°, ramenant l'oculaire de la lunette vers l'œil, puis visant le point donné par O′D′ comme on l'avait fait par OD; vu la nouvelle position C″ du pivot, l'aiguille, primitivement arrêtée en *m*, s'arrêterait en *m*′, et l'on obtiendrait ainsi l'arc *mnm*′ représentant approximativement le double de l'erreur et de la correction à faire; mais il serait impossible, dans la pratique, de prendre ainsi deux fois chaque angle, et, si la différence n'est pas considérable, il faut la négliger, sinon faire rectifier la position du pivot.

On voit, d'après cela, que le moyen de s'assurer si la boussole est exactement centrée, consiste à opérer cette double visée dans deux directions rectangulaires, et à voir si, dans chacune de ces observations, l'arc qui représenterait le double de la correction est nul, c'est-à-dire, si les deux points analogues à *p* et *p*′ tombent sensiblement l'un sur l'autre.

Ajoutons enfin, pour terminer ce que nous avons à dire sur l'usage de la boussole, que, pour ne pas s'exposer à commettre des erreurs graves, il importe 1° d'avoir, dans les visées, la lunette toujours du même côté, soit à droite, soit à gauche; 2° de compter toujours les angles dans le même sens; 3° de ne porter sur soi ni clefs, ni outils en fer dont l'action magnétique serait susceptible de modifier la position normale de l'aiguille.

Digitized by Google

MÉTHODES DIVERSES DU LEVER DES PLANS.

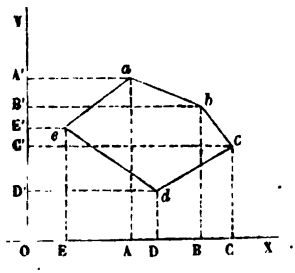
LEVER A L'ÉQUERRE.

34. Maintenant que nous avons décrit, d'une part, les deux instruments usuels propres à mesurer les distances sur le terrain, savoir : la chaîne d'arpenteur et la stadia ; d'autre part, les quatre instruments au moyen desquels on peut relever des angles, l'équerre d'arpenteur qui ne donne que des angles droits et demi-droits, la planchette et l'alidade qui, à proprement parler, ne forment qu'un seul instrument, le graphomètre et la boussole ; nous allons montrer comment ces quatre derniers correspondent, concurremment avec ceux dont on se sert pour mesurer les distances, à quatre méthodes principales pour lever un plan, savoir : le *lever à l'équerre*, le *lever à la planchette*, le *lever au graphomètre* et le *lever à la boussole*.

Il existe sans doute beaucoup d'autres instruments qui pourraient être employés au lever des plans ; mais la connaissance de ceux dont nous venons de parler, et qui sont les seuls qu'on emploie habituellement, peut suffire pour presque tous les cas qui se présentent dans la pratique.

Le lever de plan à l'équerre est une opération des plus simples ; elle consiste à déterminer, au moyen de l'équerre d'arpenteur, les coordonnées des points à lever, c'est-à-dire, les distances de chacun d'eux à deux axes rectangulaires. On prend, dans ce but, une base OX sur laquelle on s'avance, en mettant l'une des alidades de l'équerre dans sa direction, jusqu'à ce qu'on arrive en E, où l'on aperçoit le point *e* à travers l'alidade perpendiculaire ; on mesure ensuite avec la chaîne la distance OE, et, en opérant de la même manière pour les autres points, on porte sur le papier les distances OE, OA, OD, etc. On prend un second axe OY, perpendiculaire au premier et sur lequel on effectue des opérations analogues aux précédentes ; les intersections des perpendiculaires à cet axe D'*d*, C'*c*, E'*e*, etc., avec celles que l'on a élevées en E, A, D, etc., déterminent les projections de tous les sommets du polygone *abcde*, ou plus généralement la projection de tout autre point qu'on voudra lever.

Fig. 31.



Dans la pratique, le développement des deux axes serait souvent impossible, et l'on opère plus simplement en supprimant complétement le second axe OY ; on mesure alors, comme précédemment, la distance du point fixe O aux diverses positions du pied de l'équerre ; puis, on mesure en-

Digitized by Google

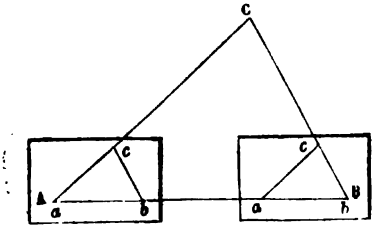
suite directement les distances E*e*, A*a*, D*d*, etc., de ce pied aux divers points à déterminer.

35. Comme on le voit, la base de cette méthode est l'axe ou la *ligne d'opération*, dont le tracé exact est de la plus grande importance; il arrive presque toujours que cette ligne ne peut être choisie de manière à servir pour le lever de toute l'étendue du terrain qu'on a en vue de reproduire; il faut alors, comme sur les routes sinueuses ou dans les rues étroites et non alignées, tracer une série de lignes d'opération dont les positions relatives doivent être reportées avec grand soin sur le papier. Ce report ne peut le plus souvent s'effectuer qu'en mesurant exactement l'angle que forment entre elles deux de ces lignes à leur point de rencontre, et ici l'emploi du graphomètre ou de la boussole est indispensable; il est donc vrai de dire que, toutes les fois qu'on a un plan d'une certaine étendue à lever, l'équerre et la chaine ne suffisent généralement pas pour cette opération.

LEVER A LA PLANCHETTE.

36. Pour lever à la planchette le plan d'un triangle ABC, on établira d'abord l'instrument horizontalement au-dessus du point A dont on déterminera, aussi exactement que possible, la projection *a* sur le papier, en ayant soin de disposer celui-ci de manière que le dessin complet puisse s'y développer de la manière la plus convenable. Puis, par la projection *a* et au moyen de l'alidade, on fera passer deux droites dirigées vers les points B et C. On mesurera la distance AB; on reportera sur la ligne de visée allant de *a* vers B, une longueur *ab* proportionnelle, dans un rapport donné, à la distance AB; on déterminera de la même manière le point *c*, et le triangle *abc* sera semblable au triangle ABC, puisque ces deux figures auront un angle égal compris entre côtés proportionnels. Le rapport de similitude des éléments linéaires de ces deux figures ne sera d'ailleurs autre chose que ce qu'on nomme l'*échelle* du plan, ainsi que nous le verrons bientôt.

Fig. 32.

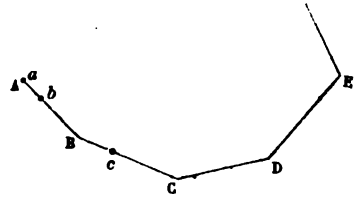


On comprend sur-le-champ que le même résultat serait obtenu en transportant, après la détermination du point *b*, la planchette en B, la disposant horizontalement et de manière que, le point *b* correspondant à la verticale du point B, la ligne *ba* soit dans la direction BA. Enfin, l'on dirigerait l'alidade suivant BC, et la ligne *bc* déterminerait le point *c* par son intersection avec *ac*.

Digitized by Google

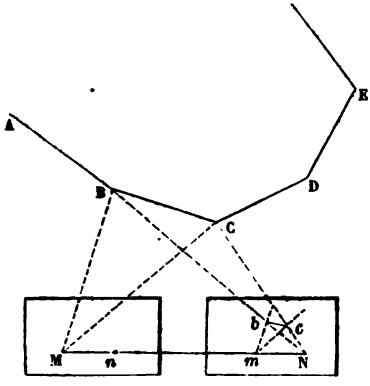
37. Si, au lieu d'un simple triangle, on avait à lever un contour polygonal ABCDE, deux moyens se présenteraient également pour arriver au résultat cherché. On pourrait placer la planchette en A, viser B et tracer la direction AB sur laquelle on prendrait une longueur A*b* proportionnelle à la longueur AB préalablement mesurée; on porterait ensuite la planchette en B où, après avoir placé *b* au-dessus de B et dirigé *ba* sur BA, on tracerait l'angle ABC en visant C; on prendrait sur BC une longueur B*c* proportionnelle à BC préalablement mesuré; on se transporterait en C où l'on opérerait de même, et ainsi de suite à tous les sommets ou points à relever. Cette méthode, qui consiste à cheminer tout le long du contour à lever, s'appelle par cette raison la *méthode de cheminement*.

Fig. 33.



38. La seconde méthode, dite *méthode des intersections*, consiste à considérer l'un des côtés du polygone, ou plus généralement une ligne quelconque MN, déterminée préalablement sur le terrain et sur le dessin en grandeur et en position, comme la base d'une série de triangles ayant pour sommets opposés chacun des points à lever. Ces points se déterminent ensuite par le second des moyens indiqués ci-dessus pour le triangle, c'est-à-dire par *l'intersection* de deux visées dirigées successivement de chacune des extrémités de la base sur le sommet.

Fig. 34.

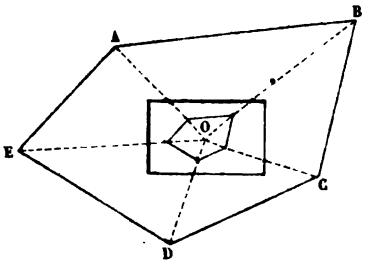


Il est évident que chacune des deux méthodes comporte une série de vérifications qui s'opèrent par la mesure directe, soit des longueurs, soit des angles qui n'ont pas servi à la détermination des divers points levés.

39. Il y a un troisième procédé pour lever rapidement, à la planchette, un contour polygonal renfermant un espace qui peut être parcouru dans toutes les directions menées d'un point intérieur O aux divers sommets à déterminer. Il consiste à établir la planchette à ce point intérieur, à tracer sur le papier les directions allant de ce point aux divers sommets, à me-

Digitized by Google

Fig. 35.



surer les longueurs OA, OB, OC, etc., comprises sur ces directions entre le point de station et les points observés, et à rapporter proportionnellement ces longueurs sur les lignes correspondantes préalablement tracées. Ce procédé pourrait s'appeler *méthode de rayonnement.*

40. Ainsi qu'on a dû le remarquer, la planchette veut être replacée, à chaque fois qu'elle change de station au cours d'une même opération, dans une position exactement parallèle à celle qu'elle occupait. Avec de l'habitude, on arrive assez promptement à remplir cette condition; mais on abrége toujours beaucoup les tâtonnements, en se servant d'un instrument appelé *déclinatoire* et que représentent les *fig.* 15 et 16, *Pl. I.* C'est une petite boussole renfermée dans une boîte de forme rectangulaire, dont un des côtés sert de règle et dont l'aiguille ne peut parcourir qu'environ 40 degrés. Lorsque, à la première station, on a déterminé la position de la planchette, on pose le déclinatoire sur cette planchette, en faisant tourner la boîte jusqu'à ce que l'aiguille se place suivant une ligne parallèle au bord; cette ligne, qui correspond au zéro de l'arc gradué, est la ligne de foi du déclinatoire. Dans cette position, on trace une droite sur le plan, le long du bord de la boîte; puis, quand la planchette a été transportée ailleurs, on pose le bord du déclinatoire le long de cette droite et l'on tourne la planchette jusqu'à ce que l'aiguille aimantée revienne au zéro. Ainsi placée et rendue horizontale comme à la première station, la planchette est parallèle à la position primitive; on dit alors qu'elle est *orientée,* et l'on peut sans crainte continuer l'opération.

LEVER AU GRAPHOMÈTRE.

41. Par cela même que le graphomètre peut servir à mesurer l'angle que forment entre elles deux directions concourantes, cet instrument est un de ceux qui sont employés au lever des plans, concurremment avec la chaîne d'arpenteur qui permet de mesurer les longueurs. La précision de sa construction et les résultats qu'il fournit le rendent même supérieur, sous ce rapport, à la plupart des autres. Soit donc qu'il s'agisse d'un réseau de triangulation, ou simplement d'un système de points formant un contour polygonal quelconque, il est facile de mesurer avec le graphomètre l'angle des deux lignes qui joignent un sommet avec les deux voisins; puis, de déterminer la position de ces derniers sur le plan par des

Digitized by Google

mesures directes de longueurs, comme il a été expliqué pour le lever à la planchette ; on reconnaît ici la méthode de cheminement.

L'application de la méthode des intersections n'est pas moins facile, et il suffit de prendre sur le terrain et de rapporter sur le papier une base fixe de longueur bien exactement déterminée ; on mesure alors les angles sous lesquels on voit de chaque extrémité de la base l'autre extrémité et le point qu'il s'agit de lever : l'intersection des deux lignes ainsi tracées fournit sans incertitude ce point lui-même. On comprend néanmoins que, quand les angles d'intersection des rayons visuels sont très-aigus ou très-obtus, cette dernière méthode puisse devenir défectueuse ; il faut alors, ou changer la base adoptée de manière à corriger autant que possible ce défaut, ou n'employer ce mode que pour la fixation de points peu importants.

Il est bien entendu que la base fixe, ou ligne d'opération, pourrait sans inconvénient être l'une des lignes du plan lui-même, s'il s'en présentait une dans de bonnes conditions pour cet objet.

LEVER A LA BOUSSOLE.

42. La boussole peut, jusqu'à un certain point, remplacer le graphomètre ; mais elle donne, dans la mesure des angles, des indications beaucoup moins précises que ce dernier instrument : elle n'est guère d'un bon usage que pour le lever des détails, à l'égard desquels la précision de position est beaucoup moins indispensable que la rapidité des opérations. Toutefois, elle peut être employée dans les mêmes circonstances que le graphomètre, soit par cheminement, soit par intersections, soit encore dans le lever à l'équerre, quand les circonstances locales exigent l'emploi de plusieurs lignes d'opération.

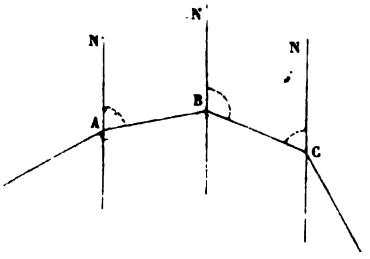
43. Lorsqu'on aura levé un polygone entier, on pourra, avant de le rapporter sur le papier, voir s'il se ferme exactement au moyen d'un calcul très-simple. On se rappellera pour cela que la somme des angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux. On fera donc la somme de ces angles en les déduisant, comme on l'a vu, de ceux que font les côtés avec le méridien, et, si la somme satisfait à la condition qui vient d'être exprimée, on sera assuré d'avoir opéré exactement. Cette vérification est nécessaire, soit qu'on ait levé au graphomètre, soit qu'on ait employé la boussole ; mais on comprend qu'elle doive être plus indispensable encore dans ce dernier cas, où le peu de précision de l'instrument laisse nécessairement quelque doute sur l'exactitude de chaque opération partielle.

44. Il n'est pas inutile d'ajouter que, quand il s'agit de lever un contour polygonal à la boussole, le parallélisme des méridiens magnétiques des

Digitized by Google

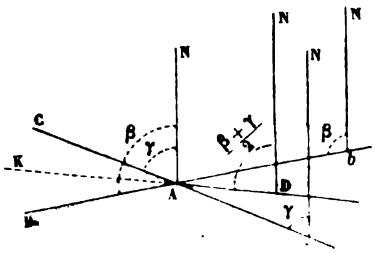
divers sommets dans l'étendue du lever, permet de passer successivement un sommet sur deux sans y faire station. La figure ci-dessous montre en effet que, quand on a mesuré en A l'angle NAB que fait le côté AB avec le méridien, on peut tout de suite se transporter en C, et, visant en arrière sur le point B, prendre l'angle NCB qui n'est autre chose que le supplément de l'angle NBC. On voit ainsi qu'il faut, dans ce cas, prendre deux angles à chaque station où l'on s'arrête, l'un d'avant, l'autre d'arrière, et, pour faciliter cette opération, la boussole est ordinairement graduée dans les deux sens; un peu d'habitude fait d'ailleurs bientôt disparaître toute hésitation dans cette manœuvre.

Fig. 36.



45. Proposons-nous, comme exemple du parti que l'on peut tirer de l'emploi de la boussole, de trouver le prolongement de la bissectrice d'un angle saillant dont le sommet A et les côtés AB, AC sont inaccessibles. On se placera, en deux points *b* et *c*, sur les prolongements des côtés, et l'on observera, avec la boussole, les angles β et γ qu'ils font avec le méridien magnétique. L'angle saillant BAC est évidemment égal à $\beta - \gamma$, comme l'indique la figure, et l'angle que fait la bissectrice AK avec le méridien est égal à

Fig. 37.



$$\gamma + \frac{BAC}{2},$$

ou

$$\gamma + \frac{\beta - \gamma}{2},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Il suffira donc alors, pour déterminer un point de la bissectrice cherchée, de trouver, par tâtonnement et au moyen de la boussole, un point D pour lequel AD fasse cet angle $\frac{\beta + \gamma}{2}$ avec le méridien.

Digitized by Google

RAPPORT ET DESSIN DES PLANS.

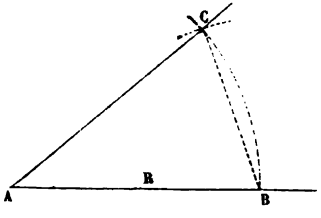
46. Quand les opérations sur le terrain sont terminées, c'est-à-dire quand on a recueilli, par les méthodes précédemment indiquées, tous les éléments angulaires et linéaires qui rattachent entre eux les points à lever, il reste encore à *rapporter* sur le papier les résultats de ces opérations.

Les angles sont exprimés en degrés et fractions de degré, et, quand l'un des côtés d'un angle a été tracé sur le dessin, on emploie, pour tracer l'autre, un instrument nommé *rapporteur*. C'est un demi-cercle en corne assez épaisse pour ne pas se voiler trop facilement par la chaleur, sans cependant cesser d'être transparente; le diamètre de ce cercle est indifférent sous le rapport de l'ouverture des angles: il varie d'ordinaire entre $0^m,15$ et $0^m,20$. La circonférence du rapporteur est divisée en degrés et, quand cela est possible, en demi-degrés; la graduation est double, elle va de 0 à 180 degrés dans un sens, et de 180 à 0 degrés dans l'autre. Pour se servir de cet instrument, on applique le diamètre du cercle sur le côté connu, en faisant coïncider le centre du rapporteur avec le sommet de l'angle, et la graduation partant de 0 degré indique un second point du second côté. L'usage du rapporteur est trop simple du reste pour qu'il convienne de s'y arrêter davantage; nous dirons seulement que quelques-uns de ces instruments sont en cuivre évidé, ce qui n'a aucun inconvénient, puisque les divisions sont poussées jusqu'au bord de la circonférence et que le centre est situé sur le bord intérieur ou extérieur de la règle qui forme la base. La *fig.* 10 de la *Pl. II* présente d'ailleurs le dessin d'un rapporteur en corne.

47. Le rapporteur donne avec une exactitude suffisante les angles relevés à la boussole. Si cependant ces angles avaient été déterminés à l'aide d'un instrument plus parfait, il serait préférable de les rapporter aussi par un moyen plus précis.

Supposons que, par une méthode quelconque, on soit parvenu à connaître la valeur de la corde BC correspondant à l'angle A dans une circonférence d'un rayon R déterminé; il est certain que si, d'une part, du point A avec le rayon R, on décrit l'arc de cercle BC; si, d'autre part, on trace un autre arc du point B comme centre avec un rayon égal à la corde connue, ces deux arcs se couperont en un point C qui, joint au sommet A, donnera l'angle BAC cherché.

Fig. 38.



Digitized by Google

Toute la difficulté gît donc dans la connaissance des cordes correspondant à chaque angle pour une circonférence d'ailleurs quelconque, puisque l'ouverture d'un angle ne dépend nullement du rayon de la circonférence dans laquelle on le mesure. Il a été dressé des Tables qui atteignent complétement ce but ; ces Tables peuvent du reste être facilement suppléées par celles des sinus, puisque la formule (*Trigon.*, **2**, Rem.)

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \text{ corde } 2\alpha,$$

ou

$$\text{corde } 2\alpha = 2 \sin \alpha$$

donne le moyen de calculer la longueur de la corde qui sous-tend un angle quelconque, quand on connaît le sinus de l'angle qui représente la moitié du premier.

Ce mode de construction des angles ne laisse rien à désirer; ajoutons toutefois que, dans la pratique, il est plus exact de construire, au moyen de la corde de leur supplément, les angles trop obtus qui laisseraient, par l'obliquité des intersections des deux arcs en C, de l'incertitude sur le point précis qui doit servir à tracer le côté AC ; il est bon de ne pas négliger cette précaution, dès qu'il s'agit d'un angle qui atteint 120 degrés.

48. Nous avons déjà dit (36) que le rapport de similitude entre les figures déterminées par les lignes tracées ou fictives du terrain et les figures qui doivent en être la représentation sur le papier, s'appelait l'*échelle* du plan. Ce rapport, qui n'influe aucunement sur la valeur et l'ouverture des angles, est l'élément indispensable, le point de départ de tout dessin de cette nature; il est nécessairement constant pour un même plan et doit toujours y être explicitement indiqué, pour en compléter la lucidité.

A défaut de cette indication sur un plan rapporté, on serait obligé de déterminer l'échelle après coup, par la mesure directe, au moyen de la même unité de longueur, d'un côté a du dessin et de son homologue A du terrain; la division de ces deux résultats l'un par l'autre fournirait le rapport de similitude $\frac{a}{A}$, c'est-à-dire l'échelle.

Que ce rapport soit ainsi obtenu par la comparaison de deux éléments linéaires du plan, ou qu'il ait été fixé préalablement, il est avantageux de simplifier autant que possible son expression, pour faciliter les opérations mentales que l'on est obligé de faire à chaque instant, quand on examine un plan ; aussi réduit-on généralement la fraction qui représente l'échelle à avoir l'unité pour numérateur, et lui donne-t-on la forme $\frac{1}{\frac{A}{a}}$, quelle que soit la valeur numérique du dénominateur $\frac{A}{a}$. Si, par exemple, la fraction

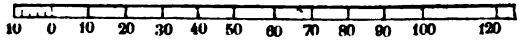
Digitized by Google

ainsi réduite est $\frac{1}{47}$, on en conclura qu'un côté du plan est la quarante-septième partie de son homologue sur le terrain, et l'on dira que le plan est rapporté au quarante-septième, ou encore à l'échelle de 1 pour 47, ou enfin à l'échelle de $\frac{1}{47}$ de mètre pour 1 mètre.

Il est bien entendu que l'échelle exprimée par la fraction $\frac{1}{47}$ ne s'applique qu'aux éléments linéaires des plans, et que c'est le carré de cette fraction qui exprime le rapport des surfaces.

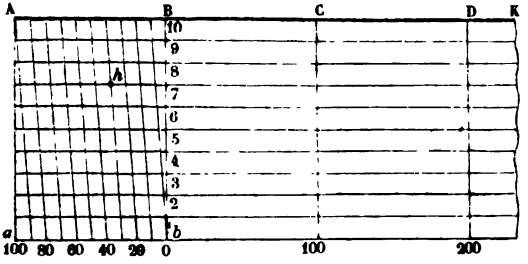
49. Les échelles doivent être d'ailleurs représentées graphiquement sur les plans, en même temps qu'elles y sont définies en chiffres. Ces échelles graphiques, dont nous donnons ci-contre un spécimen au deux-millième, se composent le plus souvent d'une ligne droite divisée, dans le rapport adopté pour le plan, en parties proportionnelles au mètre et en multiples ou sous-multiples décimaux du mètre; elles servent à rapprocher à chaque instant les dimensions réduites des dimensions naturelles du terrain, et à déduire au besoin les unes des autres.

Fig. 39.



50. Toutefois il serait, dans bien des cas, fort inexact de prendre les indications des longueurs sur une échelle de cette nature, qui n'en contient du reste qu'un très-petit nombre; on adopte alors une autre disposition, un peu plus compliquée il est vrai, mais qui fournit directement l'évaluation numérique d'une longueur quelconque du plan, et réciproquement la longueur d'une ligne d'après son expression numérique.

Fig. 40.



Soit pour tracer cette nouvelle échelle, $\frac{1}{e}$ la fraction qui la représente numériquement; nous concluons immédiatement de ce rapport que

1 mètre sur le papier équivaut à e mètres sur le terrain, que

$\frac{10}{e}$ mètres équivalent à 10 mètres,

$\frac{100}{e}$ mètres à 100 mètres:

Digitized by Google

telles seront donc d'abord les dimensions des dizaines et centaines de mètres.

Traçons maintenant onze lignes parallèles, horizontales et équidistantes; portons 10 fois la quantité $\frac{10}{e}$ de A en B et de a en b; portons de même $\frac{100}{e}$ ou AB autant de fois vers K que nous voulons que l'échelle contienne de centaines de mètres. Élevons par les points A, B, C, D... des perpendiculaires jusqu'à la rencontre de ab; unissons enfin par des lignes transversales les dizaines de la ligne supérieure à celles de la ligne inférieure, savoir : les 1re, 2e, 3e,..., 9e du haut, respectivement avec les 2e, 3e, 4e,..., 10e du bas. Il est facile de voir que les transversales extrêmes déterminent deux suites de triangles rectangles semblables dont les côtés horizontaux représentent 1, 2, 3,..., 10 mètres. L'échelle dessinée ci-dessus est celle de $0^m,0002$ pour un mètre ou de 1 à 5000; nous y avons donc pris $e = 5000$.

Cela posé, si, par exemple, on veut connaître l'expression numérique d'une longueur représentée sur un plan dressé à cette échelle, on prendra une ouverture de compas égale à cette longueur; on placera l'une des pointes sur la verticale convenable pour que l'autre tombe entre le zéro et le point a; on fera glisser la première sur ladite verticale, jusqu'à ce que la seconde tombe dans la même ligne, sur une division exacte, en h par exemple, et l'on conclura tout de suite que la longueur cherchée équivaut au nombre de centaines de mètres marqué par la première pointe du compas, plus 3 dizaines de mètres, plus enfin 7 mètres.

Les échelles de ce genre sont généralement tracées sur une plaque de cuivre, quelquefois sur de l'ivoire, et leur emploi, qui du reste ne présente aucune difficulté, est indispensable pour le rapport des plans qui demandent de la précision. Nous en donnons (*Pl. II, fig.* 11) un dessin complet.

INDICATION DES ÉCHELLES ADOPTÉES DANS LE SERVICE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

31. Il est, en général, d'un grand avantage que les échelles des plans soient exprimées par des rapports simples; cette condition est de rigueur dans le service des Ponts et Chaussées, où les instructions administratives prescrivent d'adopter exclusivement, pour les plans proprement dits, des échelles exprimées par une fraction ayant pour numérateur l'unité et pour dénominateur, suivant les cas, les nombres 1000, 2000, 2500, 5000 ou 10000.

Toutefois, une exception à cette règle a été depuis longtemps admise pour les plans des portions de villes, bourgs ou villages qui servent de *traverses* aux routes; ces plans, qui sont destinés à conserver les limites

Digitized by Google

du terrain affecté à la circulation et la trace des alignements adoptés pour les constructions riveraines, ont besoin d'une clarté toute spéciale, qui mette leur interprétation à la portée de la plus grande partie des intéressés; aussi sont-ils dressés à une échelle beaucoup plus grande : c'est invariablement celle de $0^m,005$ pour 1 mètre ou de $\frac{1}{200}$.

Cette échelle et même celle de $\frac{1}{100}$ s'appliquent encore aux autres dessins qui, comme ceux des ouvrages d'art, exigent la reproduction d'un grand nombre de détails, en même temps qu'une grande netteté, ou à ceux qui, dans les nivellements que nous étudierons bientôt, doivent reproduire, suivant certaines règles, le relief actuel ou projeté du terrain.

Enfin, pour les détails eux-mêmes des portions d'ouvrages qui demandent ce surcroît de clarté, tels que les portes d'écluses, les ponts tournants, les voies et le matériel des chemins de fer, et en général pour les ouvrages en charpente ou en métal, les ingénieurs peuvent augmenter encore leurs échelles et adopter celles de $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{5}$ même, en n'employant toutefois que des rapports simples et décimaux.

COPIE ET RÉDUCTION DES PLANS.

52. Si l'on veut reproduire un dessin à la même échelle, le *copier* en un mot, plusieurs procédés plus ou moins avantageux peuvent être employés.

1°. On partage la surface à copier en carrés ou rectangles par deux systèmes de lignes parallèles tracées légèrement au crayon; on décrit sur une feuille de papier un même nombre de carrés égaux à ceux de l'original, et l'on y dessine, de proche en proche, tous les détails compris dans les rectangles correspondants de l'original : cette opération se fait soit à vue, soit en rapportant chaque point par des coordonnées, soit enfin en décrivant deux arcs de cercle dont ce point est l'intersection.

Les lignes droites, les côtés de polygones ou de bâtiments s'obtiennent en plaçant, comme il vient d'être dit, deux de leurs points, ou en les prolongeant jusqu'à la rencontre des côtés des rectangles et en reportant les points d'intersection sur la copie au moyen du compas.

Dans les parties du dessin qui sont plus chargées de détails, on peut multiplier les carreaux ou les diviser par des diagonales.

Si le dessin à copier est trop précieux pour qu'il soit permis d'y tracer aucune ligne, même au crayon, on peut le couvrir d'un papier transparent ou d'un verre sur lequel on établira toutes les lignes de construction.

2°. Lorsque le modèle n'est pas chargé de détails, ou que l'échelle est un peu grande et le trait assez apparent, on peut le calquer à la vitre sur le papier même qui doit recevoir la copie.

Digitized by Google

3°. Si ce moyen ne peut être commodément employé, soit par suite de difficultés locales, soit à cause de l'opacité du papier, c'est sur une feuille transparente que l'on calque d'abord ; puis, on reproduit cette première copie à l'aide du papier plombé ; ou bien encore, on colle directement sur un calicot blanc la feuille qui porte le calque.

Ce dernier procédé a l'avantage précieux de donner au dessin obtenu une consistance supérieure à celle du papier ; on est même arrivé à préparer dans ce but des toiles translucides qui dispensent de l'emploi du papier à calquer et du collage.

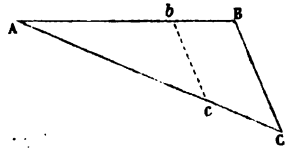
4°. Quelquefois enfin, lorsque l'on peut, sans inconvénient, employer ce moyen qui offre souvent de grands avantages pour la promptitude d'exécution, on place directement le dessin sur la feuille de papier qui doit recevoir la copie, et l'on pique avec la pointe d'une aiguille les points principaux en nombre suffisant pour que, en passant au trait, on puisse placer tous les détails.

53. S'il s'agit actuellement de changer l'échelle de la copie de telle sorte que les côtés homologues soient dans un rapport donné $\frac{1}{m}$, on commence par tracer un réseau de carreaux dont les cotés soient dans ce rapport avec ceux de l'original ; puis, on opère comme ci-dessus, en réduisant toutefois dans le rapport indiqué les longueurs prises au compas sur le modèle. On se sert pour cela soit d'un *angle de réduction*, soit d'un *compas de réduction*, dont nous allons indiquer la construction et l'emploi.

Il est clair que si l'échelle du dessin primitif était $\frac{1}{e}$, celle du dessin réduit dans le rapport $\frac{1}{m}$ serait $\frac{1}{me}$; car, dans le premier cas, 1 mètre représentait e mètres du terrain, et, dans le second, la même longueur de 1 mètre représenterait nécessairement une longueur m fois plus grande, ou me mètres.

54. Pour construire un *angle de réduction*, on trace deux lignes AB et BC, faisant entre elles un angle quelconque, et sur lesquelles on marque des longueurs qui soient entre elles dans le rapport $\frac{1}{m}$ de la réduction projetée ; on achève ensuite le triangle en unissant A et C ; puis on mène des parallèles à BC, lesquelles forment ainsi une série de triangles semblables ayant pour sommet commun le point A : or, il est évident que, si le côté à réduire est porté en Ab, par exemple, le côté bc

Fig. 41.



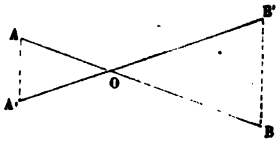
Digitized by Google

mené parallèlement à BC sera la longueur cherchée, puisque

$$Ab : bc :: AB : BC :: 1 : m.$$

55. Le *compas de réduction* se compose de deux branches AB, A'B', se croisant en un point O qui est le pivot, de telle sorte que les portions AO et A'O, BO et B'O soient toujours égales deux à deux. Dans un pareil instrument, la ligne qui unirait A à A' serait toujours parallèle à celle qui irait de B en B', et, par suite, on aurait constamment

Fig. 42.



$$AA' : BB' :: AO : OB.$$

Il résulte de cette disposition que, BB' étant la longueur d'un côté sur le modèle, AA' sera son homologue sur la copie, si l'on a établi d'avance, entre AO et OB, un rapport convenable qui n'est autre que celui $\frac{1}{m}$ des deux échelles. C'est ce à quoi l'on parvient facilement en raison de la construction de l'instrument, comme on peut le voir par la *fig.* 12 de la *Pl. II.* Le pivot O, qui traverse les joues du compas, suit deux fentes longitudinales dans lesquelles on peut le faire glisser, quand elles sont superposées; les deux branches portent des graduations qui indiquent, quand elles correspondent au pivot ou à un indicateur disposé à cet effet, que le rapport de AO à OB est $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.

56. Quelquefois ce sont les surfaces, et non les côtés homologues, qui doivent être dans un rapport donné $\frac{1}{q}$; si nous représentons alors par S et S' les surfaces des deux dessins, ou les surfaces de deux portions correspondantes de ces dessins, et par A et A' des côtés homologues dans chacun d'eux, la Géométrie élémentaire nous fournit la relation

$$S : S' :: A^2 : A'^2 :: 1 : q;$$

d'où

$$\frac{A}{A'} = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

La question est donc encore ramenée maintenant à déterminer le côté A au moyen de son homologue A' et de leur rapport $\frac{1}{\sqrt{q}}$; ce qui se fait, comme ci-dessus, au moyen de l'angle de réduction ou du compas de réduction.

57. Les différents moyens que nous venons d'indiquer deviennent fort longs, quand il s'agit de plans détaillés et d'une grande étendue; on y

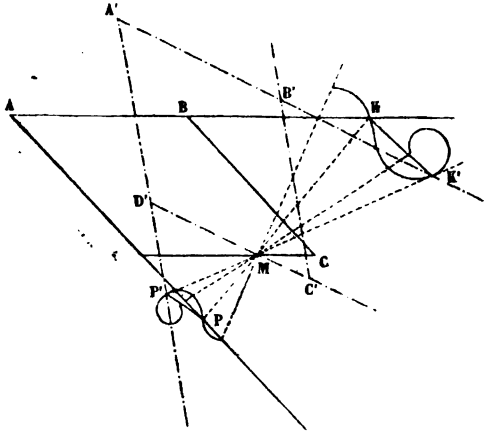
Digitized by Google

supplée par l'emploi d'un instrument appelé *pantographe*, et dont nous allons indiquer l'usage par une description et des calculs succincts.

Le pantographe se compose généralement de quatre règles AB, BC, CD et DA, égales en longueur, ou au moins égales deux à deux, et unies par quatre articulations, de manière que leur ensemble forme toujours un losange ou un parallélogramme dont les angles seuls varient; à un point fixe K, situé sur l'une des branches AB ou sur son prolongement, est adapté un calquoir; en M est placé un axe vertical traversant une douille adhérente à la branche CD. Tout l'instrument peut ainsi se mouvoir autour de cet axe, qui est maintenu par une masse de plomb dans laquelle il est vissé.

Cela posé, si un crayon est placé en P, à la rencontre des lignes AD et KM, il décrira une figure semblable à celle que l'on fera parcourir au calquoir K, et, de plus, le rapport des côtés homologues des deux figures sera le même que celui des distances du point M aux points K et P.

Fig. 43.



En effet, les côtés AK et DM sont parallèles dans toutes les positions de l'instrument, et les triangles AKP, DMP sont toujours semblables; ils fournissent donc, pour deux positions quelconques, les proportions

$$AK : DM :: KP : MP,$$
$$A'K' : D'M :: K'P' : MP';$$

mais

$$AK = A'K' \quad \text{et} \quad DM = D'M;$$

on a donc

$$KP : MP :: K'P' : MP',$$

d'où

$$KP - MP \quad \text{ou} \quad KM : MP :: K'P' - MP' \quad \text{ou} \quad K'M : MP'.$$

Les deux triangles KK'M et PP'M sont donc semblables, puisqu'ils ont en M un angle égal compris entre des côtés homologues proportionnels; par suite, les lignes KK' et PP', respectivement parcourues par le calquoir et par le crayon, sont parallèles entre elles, et leur rapport est le même

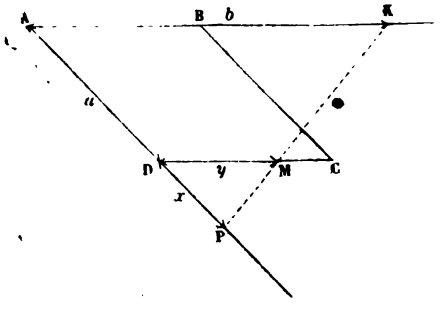
Digitized by Google

que celui de KM à MP. Il en est évidemment ainsi pour deux cordes de positions quelconques et aussi courtes qu'on voudra le supposer ; les deux figures elles-mêmes jouissent donc de la propriété énoncée et du même rapport de similitude.

58. Il reste maintenant à graduer l'instrument, de telle sorte qu'il puisse servir à réduire un dessin dans un rapport donné $\frac{1}{m}$.

D'après ce que nous venons de voir, il faut et il suffit pour cela, que KM et MP soient eux-mêmes dans ce rapport; il faut par conséquent trouver des positions de M sur DC et de P sur AD qui satisfassent à la condition

Fig. 44.



$$KM : MP :: m : 1.$$

Or, si nous appelons respectivement a et b les constantes AD et AK, et si nous désignons par x et y les variables DP et DM, il résultera de ce que MD est toujours parallèle à AK, que l'on aura, quel que soit m,

$$a : x :: KM : MP :: m : 1.$$

et

$$y : x :: AK : AP :: b : x + a,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{a}{m} \quad \text{et} \quad y = \frac{bx}{x+a} = \frac{b}{m+1}.$$

En attribuant ensuite différentes valeurs à m, on calcule celles de x et y qui correspondent à chacune d'elles, et on les trace sur les deux branches du pantographe, qui se trouve ainsi gradué. On s'assure, du reste, de l'exactitude des longueurs obtenues pour x et y, en vérifiant si les trois points P, M et K sont bien sur une même ligne droite dans chaque système de valeurs.

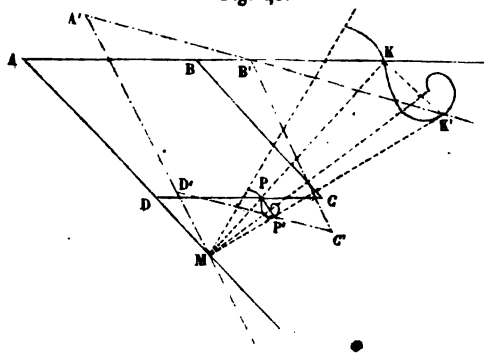
Dans les anciens pantographes, ce n'était pas par le déplacement des points P et M sur les règles AD et BC que l'on modifiait le rapport des échelles, mais par le mouvement des deux points d'articulation B et D; le pivot central M restait alors constamment au même point de la branche BC, le plus souvent au sommet C lui-même.

59. Quelques constructeurs de pantographes placent le centre fixe à l'extrémité de la droite KM, c'est-à-dire sur la branche extérieure AD,

Digitized by Google

et le crayon au point intermédiaire sur DC; il est clair que cette disposition n'influe en rien sur les considérations qui précèdent et que, dans cet état, l'instrument doit encore servir à réduire les dessins, ainsi qu'on le voit par la figure ci-contre. On trouve même à ce nouveau système l'avantage de présenter les deux figures semblables tournées dans le même sens par rapport au dessinateur, tandis que l'une d'elles est renversée dans l'état primitif de l'instrument; mais les deux feuilles de papier sont plus près l'une de l'autre et se superposent d'une façon fort incommode, dès que leurs surfaces sont un peu considérables.

Fig. 45.



Les calculs relatifs à la graduation du pantographe s'opèrent d'ailleurs d'une façon tout à fait analogue aux précédents, et l'on trouverait sans difficulté que, pour les mêmes valeurs de a et b, les variables x et y prennent les valeurs

$$x = \frac{a}{m' - 1}, \quad y = \frac{b}{m'},$$

$\frac{1}{m'}$ étant le nouveau coefficient de réduction.

60. Certains instruments sont susceptibles d'être montés à la fois suivant les deux dispositions qui viennent d'être indiquées; une seule série de divisions peut même servir pour les deux modes; il est alors facile de voir, en égalant soit les deux valeurs de x, soit celles de y, que les deux quantités m et m' sont liées par la relation

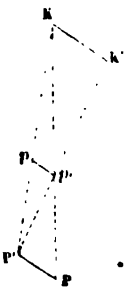
$$m' = m + 1,$$

c'est-à-dire que la même division qui donnait une réduction à $\frac{1}{m}$ avec le pivot placé entre la copie et l'original, réduit à $\frac{1}{m+1}$, quand on met au contraire le point fixe sur la grande branche.

On peut, du reste, retrouver ce résultat par des considérations purement géométriques : car, si KK' est le chemin parcouru par le calquoir sur l'original, la réduction sera PP' dans le premier système, pp' dans le

Digitized by Google

Fig. 46.



second, et les trois lignes KK', PP', pp' seront parallèles.

Or, si l'on a

$$PP' : KK' :: 1 : m,$$

en même temps que

$$PP' : KK' :: P'p' : p'K',$$

on aura également

$$P'p' : p'K' :: 1 : m,$$

d'où vient

$$P'p' : P'p' + p'K' \quad \text{ou} \quad P'K' :: 1 : m + 1.$$

Mais, d'un autre côté,

$$pp' : KK' :: P'p' : P'K';$$

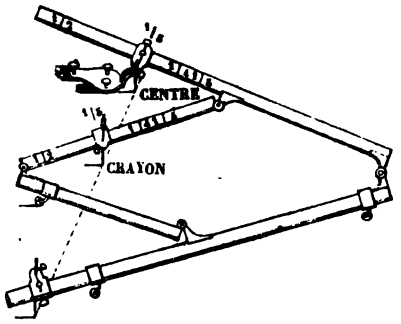
donc aussi

$$pp' : KK' :: 1 : m + 1,$$

résultat conforme à ce qui a été établi plus haut.

61. Nous donnons ci-après le croquis d'un pantographe établi suivant le dernier des deux systèmes qui viennent d'être exposés; il existe d'ailleurs encore d'autres dispositions, qui toutes rentrent plus ou moins dans les deux premières et sur lesquelles nous ne nous arrêterons pas; mais, pour joindre à la théorie géométrique du pantographe une courte description de sa construction, nous présentons (*Pl. II, fig.* 13) un dessin de cet instrument à une plus grande échelle.

Fig. 47.



Le pivot fixe est cette fois entre les deux points mobiles; on distingue facilement les coulisses dans lesquelles se placent le calquoir et le crayon, les roulettes adaptées au moyen de pinces aux extrémités des branches extérieures de l'instrument, la tige à laquelle tient le crayon et qui est surmontée d'une cuvette dans laquelle on peut placer un poids plus ou moins considérable en raison de la dureté du crayon et de l'intensité du trait que l'on veut obtenir. Le fil indiqué par une ligne ponctuée passant par l'agrafe du pivot, est attaché à la partie inférieure du porte-crayon et traverse le tube dans lequel il a la faculté de monter et de descendre. Le

Digitized by Google

dessinateur en tient constamment l'autre extrémité, de manière à soulever le crayon et éviter de tracer une ligne sur le papier, lorsqu'il veut porter le calquoir sur un autre point de l'original. Le pivot vertical traverse d'ailleurs la branche à laquelle il est appliqué, et se visse, à sa partie inférieure, dans une masse de plomb garnie en dessous de pointes d'acier très-courtes et très-aiguës qui assurent la position du pantographe; des vis de pression, agissant sur les trois coulisses, en arrêtent le mouvement, lorsqu'elles sont une fois placées convenablement.

Deux séries de divisions sont généralement tracées sur les deux branches du pantographe qui portent le pivot et le crayon; l'une sert à reproduire un dessin de manière que les côtés homologues soient dans un rapport donné; l'autre s'emploie lorsque c'est le rapport des surfaces qui est déterminé. Nous avons vu plus haut que la graduation s'opère d'une manière identique dans les deux cas, puisque, si le rapport des surfaces est q, celui des côtés homologues est immédiatement exprimé par $\sqrt{q}$.

62. Il est généralement peu exact d'augmenter les dimensions d'un dessin, c'est-à-dire, de passer d'une échelle donnée à une plus grande. Si cependant, pour un motif quelconque, on avait besoin d'effectuer cette opération, il suffirait évidemment de changer de place entre eux le calquoir et le crayon, et d'amener les index des coulisses aux divisions qui, sans cette mutation, auraient donné le rapport inverse.

63. Nous terminerons ce qui est relatif au pantographe, en attirant l'attention sur les précautions à prendre, quand le dessin à réduire est d'une grandeur telle qu'on ne puisse se dispenser de déplacer l'instrument pendant l'opération; dans ce cas il faut, avant tout dérangement, tracer sur l'original et sur la copie des lignes de repère homologues. Soient AB, *ab* ces deux lignes en direction et en grandeur; après avoir donné à l'instrument sa nouvelle position, on place le calquoir sur le point A et l'on amène le point *a* de la copie sous la pointe du crayon; on déplace un peu l'instrument pour pouvoir enfoncer une aiguille en *a*; puis, après avoir placé le calquoir en B, on fait pivoter la feuille de copie jusqu'à ce que *b* vienne se placer précisément sous le crayon; on peut alors continuer la réduction.

TRACÉ D'UN AXE SUR LE TERRAIN.

PIQUETAGE.

64. Soit que l'on ait besoin d'une base pour effectuer une opération, soit qu'on veuille tracer sur le terrain la direction de la ligne magistrale, de l'*axe* en un mot, d'une voie de communication quelconque, on est à chaque instant conduit à établir de grandes lignes droites qui, selon les

Digitized by Google

circonstances, affectent des longueurs plus ou moins considérables, et, notamment dans l'exécution des chemins de fer, il n'est pas rare de trouver des *alignements* qui s'étendent, sans aucune déviation, sur plusieurs kilomètres; d'un autre côté, pour s'accommoder aux exigences locales, pour ne pas allonger inutilement les parcours et pour éviter des coudes brusques qui sont de véritables entraves à la circulation, les axes des tracés doivent fréquemment s'infléchir suivant des *courbes* dont la nature et les éléments dépendent de l'objet auquel elles se rapportent, et dont la description matérielle exige un soin tout particulier.

Dans l'un et l'autre cas, qu'il s'agisse d'alignements droits ou qu'il s'agisse de raccordements curvilignes, on emploie sur le terrain, pour le tracé de ces lignes, des *jalons* (3) simplement formés de baguettes avec un voyant en papier, ou consistant en bâtons ferrés et peints en couleurs éclatantes, d'ordinaire en blanc et rouge, de manière à attirer de loin le regard. Quelquefois, pour faciliter l'opération et en conserver la trace, on plante en outre de grands signaux appelés *balises;* ce sont des troncs d'arbres élancés, dégarnis de branches et le plus souvent armés d'un petit drapeau flottant.

Ces signaux ou balises ne sont usités, on le comprend, que pour les points importants du tracé; à la jonction de deux alignements droits, par exemple, ou en des points tels que, malgré les aspérités du terrain, il soit toujours facile de découvrir, par leur moyen, la direction de l'axe. Pour les opérations de détail et entre autres, comme nous le verrons plus tard, pour l'exécution des nivellements ou pour celle des travaux eux-mêmes, on échelonne sur la ligne de forts piquets que l'on enfonce soit à fleur de terre, soit à une profondeur telle que leur tête dépasse le sol d'une quantité constante et déterminée; chacun de ces piquets est numéroté et rattaché à des repères fixes, tels que des bâtiments, des rochers, des arbres voisins, pour en faciliter la recherche ultérieure. La mention de tous ces détails est ensuite soigneusement faite sur un carnet et, s'il y a lieu, dans un procès-verbal, quand le *piquetage* est contradictoire entre des parties dont les intérêts sont différents.

Quoi qu'il en soit, nous allons successivement indiquer les divers moyens en usage pour le tracé des alignements droits et des raccordements curvilignes.

ALIGNEMENTS.

65. Le tracé des alignements droits sur le terrain n'offre généralement pas de difficulté sérieuse; trois cas cependant peuvent se présenter:

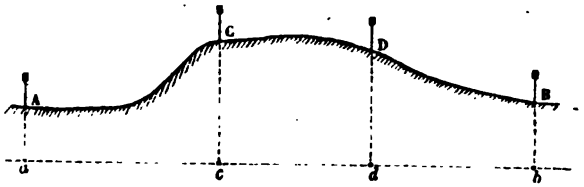
1°. Si, du point initial d'un alignement, on peut découvrir l'autre extrémité, ou au moins un jalon vertical placé à cette extrémité, on plante également un jalon au premier point; puis, dirigeant un rayon visuel sur la ligne qui réunit les deux jalons, on en fait placer intermédiairement un nombre aussi grand qu'on le désire.

Digitized by Google

Il est bon de viser d'un peu loin, et de faire passer le rayon visuel tangentiellement aux jalons et alternativement de droite à gauche.

2°. Quand, de l'origine de l'alignement, on ne peut pas voir un jalon ou un signal quelconque situé à l'autre extrémité, ce qui arrive, par exemple, lorsque les points sont séparés par une aspérité du terrain, deux

Fig. 48.



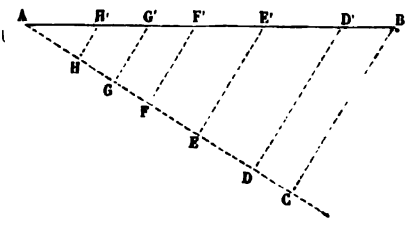
observateurs doivent chercher à se placer en deux points intermédiaires C et D, tels que celui qui est en C puisse voir les jalons B et D, et que, réciproquement, de D on aperçoive A et C.

Alors, l'observateur C fera placer D dans la direction de B et, si le point C se trouve en même temps dans la direction AD, les deux droites AD et CB, ayant une partie commune CD, n'en feront qu'une ACDB. Lorsqu'un premier essai n'amène pas ce résultat, on l'obtient après quelques tâtonnements ; le problème est donc encore ramené au premier cas.

On voit d'ailleurs que ce procédé est exactement celui qu'il faudrait suivre, si chacune des deux extrémités de l'alignement était visible, mais inaccessible.

3°. S'il est impossible aux deux observateurs de se placer intermédiairement dans les conditions que nous venons de supposer, soit parce que les deux points A et B sont séparés par un édifice, soit par tout autre motif, on dirige par l'un des points une droite AC sur laquelle on abaisse

Fig. 49.



du point B, par le moyen de l'équerre ou du graphomètre, une perpendiculaire BC; on divise la longueur AC en autant de parties que l'on veut planter de piquets sur la direction AB, et, par tous les points de division, on suppose menées autant de perpendiculaires DD', EE', FF', etc., à AC, lesquelles sont toujours parallèles entre elles et à BC. Un calcul très-simple donne la longueur de ces perpendiculaires et, par suite, la position des jalons D', E', F', etc.

Ce calcul n'offre aucune difficulté, puisque, tous les triangles de la fi-

Digitized by Google

gure étant semblables, on a

$$AH : HH' :: AC : CB,$$

d'où

$$HH' = \frac{AH \times CB}{AC}.$$

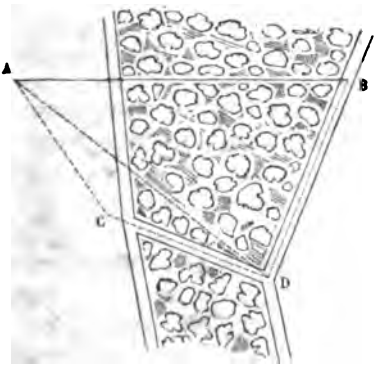
Or, AC et AH sont connus; ce sont des portions de la ligne auxiliaire qu'il est facile de mesurer, ainsi que la perpendiculaire CB; la valeur de HH' est donc complétement et facilement déterminée; il en est de même de GG', FF', EE', etc.

L'ensemble du calcul se simplifie encore, quand on peut partager la ligne auxiliaire en parties d'égale longueur, parce qu'alors chacune des perpendiculaires est égale à la valeur de la première répétée autant de fois qu'il y a de segments égaux entre son pied et l'origine A.

66. Le problème serait un peu plus compliqué, si la disposition des lieux était telle qu'il fût impossible de prolonger la ligne auxiliaire AC de façon à permettre le tracé des perpendiculaires; si, par exemple, le point A était situé auprès d'une forêt. Il faudrait, dans ce cas, avoir recours à des calculs trigonométriques, pour déterminer l'angle que fait cette ligne auxiliaire avec la direction AB; la connaissance de cet angle BAC permettrait alors de suivre, à l'aide d'un graphomètre, la direction AB, au fur et à mesure que l'on abattrait les arbres sur cette ligne pour établir le tracé projeté.

Pour calculer l'angle BAC, on réunirait le point A au point B par un contour polygonal dont les côtés seraient dirigés suivant les allées ou les clairières, telles que CD et BD; on supposerait menée la diagonale AD, et l'on résoudrait d'abord le triangle ACD dans lequel on mesurerait directement les côtés AC et CD, ainsi que l'angle ACD; puis, le triangle ADB dans lequel AD est déterminé par le premier triangle, BD mesuré directement et l'angle ADB donné par la mesure directe de CDB et le calcul précédemment fait de l'angle ADC.

Fig. 50.



COURBES DE RACCORDEMENT.

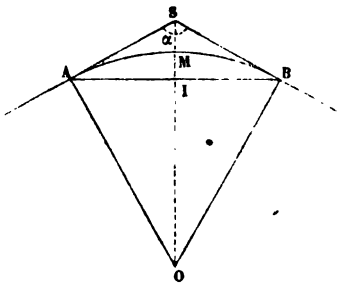
67. Pour satisfaire le mieux possible aux conditions qu'elles sont appelées à remplir, les courbes de raccordement sont tracées tangentiellement

Digitized by Google

aux alignements droits à leur point de départ et à leur point d'arrivée; si, comme il est rationnel de le faire pour répartir uniformément la courbure sur tous les points du raccordement, on adopte la forme circulaire, il convient généralement de choisir un rayon aussi grand que les localités peuvent le permettre.

Quand, par cette considération ou par toute autre, on a fixé le rayon du cercle de raccordement, le procédé qui se présente le plus naturellement à l'esprit, c'est de trouver le centre et, pour cela, de mener, parallèlement à chacun des alignements et à une distance égale au rayon, deux droites qui se rencontrent au point cherché. Mais ce procédé, très-simple en exécution sur un plan, serait souvent bien pénible sur le terrain, qui pourrait d'ailleurs se trouver dans des conditions telles que la connaissance du centre ne fût d'aucune utilité pour décrire la courbe. Aussi a-t-on été obligé de chercher des méthodes pour tracer le cercle indépendamment de son centre; elles sont nombreuses et exigent toutes que l'on connaisse, outre l'angle α des alignements à raccorder et le rayon du cercle qu'on se donne généralement *à priori*, la distance de chacun des points de contact au point de concours des tangentes.

Fig. 51.



Or, le triangle rectangle SOA donne immédiatement

$$SA = \frac{AO}{\text{tang } OSA},$$

ou, en appelant T la longueur de la tangente SA, et R le rayon OA,

$$T = \frac{R}{\text{tang } \frac{\alpha}{2}}.$$

Il est inutile de dire que, si la longueur des tangentes était donnée et que le rayon fût inconnu, la même relation le fournirait sous la forme

$$R = T \text{ tang } \frac{\alpha}{2}.$$

Quant à la corde AB ou $2c$, la similitude des triangles rectangles ASO et AIO donne

$$AI \text{ ou } c : AO \text{ ou } R :: AS \text{ ou } T : OS \text{ ou } \sqrt{R^2+T^2},$$

et, par suite,

$$c = \frac{RT}{\sqrt{R^2+T^2}}.$$

68. Cela posé, nous allons présenter quelques-uns des moyens les plus

Digitized by Google

usités pour tracer le cercle sur le terrain, quand on connaît la longueur des tangentes, leur angle et le rayon.

1°. Cette opération peut se faire par des intersections de rayons visuels. On remarque que, pour tous les points de la courbe tels que m, l'angle AmB, que nous désignerons par β, sera constant et facile à déterminer en fonction de α, puisque ces deux angles qui, avec γ et δ, complètent les deux triangles ASB et AmB, sont liés par les relations

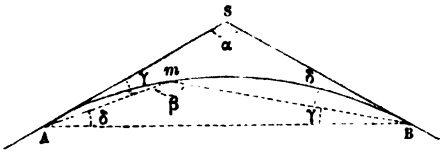
$$\beta + \gamma + \delta = 180°,$$
$$\alpha + 2\gamma + 2\delta = 180°,$$

d'où l'on tire, en éliminant successivement $\gamma + \delta$ et β,

$$\beta = 90° + \frac{\alpha}{2}, \quad \text{et} \quad \gamma + \delta = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

On placera donc deux graphomètres, l'un en A et l'autre en B, l'alidade fixe de chacun d'eux étant dirigée dans le sens de la corde AB; puis, faisant décrire aux alidades mobiles des angles variables, déterminés de telle sorte que leur somme soit égale à $\gamma+\delta$, on aura, par les rencontres des deux rayons visuels, autant de points de la courbe cherchée qu'on le voudra.

Fig. 52.



Cette méthode a l'inconvénient d'exiger deux observateurs, de n'être applicable que lorsque tout l'espace compris dans le segment AmB est visible des stations extrêmes, et de donner des déterminations souvent assez peu précises, à cause de l'obliquité des rayons visuels d'une station sur les rayons visuels de l'autre.

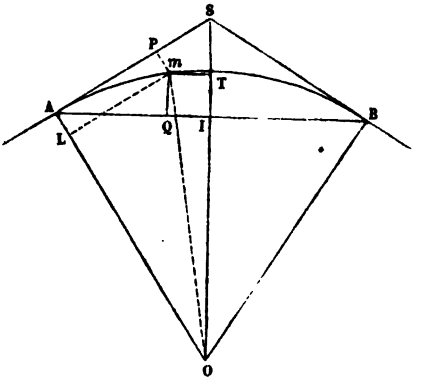
Elle peut toutefois subir une légère modification qui dispense de calculer l'angle β, si l'on remarque que, l'angle δ étant nécessairement toujours égal à mBS, puisque chacun de ces deux angles a pour mesure la moitié de l'arc mB, on est certain d'obtenir le point m ou tout autre point du cercle en faisant, en A, un angle δ quelconque avec la corde AB; puis, en B, un angle égal appuyé sur SB.

2°. On trouve encore un point quelconque m de la courbe au moyen de sa distance ou *ordonnée* menée, soit sur le diamètre passant par l'un des points de contact, soit sur l'une des tangentes, soit enfin sur la corde elle-même.

L'ordonnée Lm au diamètre se calcule comme moyenne proportionnelle entre la distance variable AL à l'origine de la courbe et le diamètre 2R diminué de cette même distance AL; mais cette méthode exige que l'on

Digitized by Google

Fig. 53.



puisse parcourir librement une grande partie du terrain compris dans le secteur AOB, ce qui est la plupart du temps impossible.

Cet inconvénient serait évité, si l'on calculait les ordonnées des points du cercle par rapport à la tangente AS, par exemple; ce calcul n'offre d'ailleurs aucune difficulté. Remarquons, en effet, que l'ordonnée Pm, ou son égale AL, équivaut au rayon AO ou R, diminué de LO, et que, dans le triangle rectangle LOm,

$$\text{LO} = \sqrt{\text{R}^2 - \overline{\text{L}m}^2} = \sqrt{\text{R}^2 - \overline{\text{AP}}^2};$$

on a donc, en prenant une distance quelconque AP, la valeur de l'ordonnée correspondante Pm, en posant

$$\text{P}m = \text{R} - \sqrt{\text{R}^2 - \overline{\text{AP}}^2}.$$

Quant à l'ordonnée mQ sur la corde, on en a l'expression au moyen de sa distance QI au milieu de la corde, en remarquant qu'elle est égale à TI ou à OT — OI.

Or, $\text{OT} = \sqrt{\text{R}^2 - \overline{\text{QI}}^2}$, et le triangle rectangle SAO donne, à raison de la perpendiculaire AI sur l'hypoténuse (*Géom.*, n° 75),

$$\text{OI} = \frac{\overline{\text{AO}}^2}{\text{SO}} = \frac{\text{R}^2}{\sqrt{\text{R}^2 + \text{T}^2}};$$

il viendra donc pour l'ordonnée

$$m\text{Q} = \sqrt{\text{R}^2 - \overline{\text{QI}}^2} - \frac{\text{R}^2}{\sqrt{\text{R}^2 + \text{T}^2}}.$$

On a dressé pour ces deux derniers procédés des Tables spéciales dont l'emploi abrége et facilite notablement les opérations.

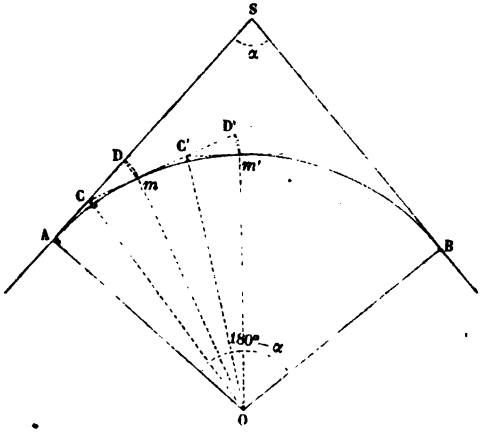
3°. On peut enfin faire usage d'un procédé d'une simplicité pratique encore plus grande, et qui nécessite moins aussi le facile parcours du terrain environnant.

Sur l'un des alignements à raccorder AS, prenons à partir du point A, où doit commencer le raccordement, deux longueurs égales AC, CD; du

Digitized by Google

point C comme centre, avec CD pour rayon, décrivons un arc de cercle dont la corde est $Dm = d$, et tirons la droite indéfinie Cm; puis, recommençons sur cette ligne Cm, à partir de m et en prenant les longueurs $mD' = AD$ et $D'm' = Dm$, les opérations que nous avons faites sur AS à partir du point A; les points A, m, m',... m^n qui seront successivement déterminés de la même manière, appartiendront à un cercle; car, si nous élevons en ces divers points des perpendiculaires sur les droites AC, CC', C'C", etc., ces perpendiculaires viendront toutes se rencontrer en un point O, qui ne sera pas autre chose que le centre du cercle dont il s'agit, et ce cercle sera nécessairement tangent à AS en A. Or, il est facile de déterminer les valeurs qu'il faut attribuer à $AD = l$ et $Dm = d$, pour que ce centre coïncide avec celui du raccordement circulaire projeté, c'est-à-dire pour que le cercle ainsi obtenu vienne passer en B tangentiellement à SB. En effet, soient α l'angle compris entre les deux alignements à raccorder; n le nombre des points que l'on se propose de déterminer, par la construction indiquée ci-dessus, entre les points A et B; R le rayon du cercle; les valeurs à attribuer à l et d peuvent s'exprimer simplement en fonction des quantités connues, comme il suit :

Fig. 54.



Tous les angles en O sont égaux entre eux et, ces angles étant au nombre de $2n + 2$, chacun d'eux est exprimé par $\frac{180^\circ - \alpha}{2(n+1)}$; de plus, chacun des angles DCm est double de COm, par la raison que, tous les triangles en O étant égaux, l'angle mCO est égal à ACO, aussi bien qu'à $mC'O$, et par suite l'angle DCm, qui a pour supplément la somme des angles ACO et mCO, est égal à l'angle COC' ou $2COm$, lequel a pour supplément la somme des angles mCO et $mC'O$.

Cela posé, le triangle rectangle COm donne

$$Cm = Om \operatorname{tang} COm,$$

ou

$$\frac{l}{2} = R \operatorname{tang} \frac{180^\circ - \alpha}{2(n+1)},$$

Digitized by Google

et, dans le triangle isocèle DCm, la base Dm étant, comme toujours, le double du sinus de l'angle au sommet, multiplié par l'un des côtés égaux, nous avons

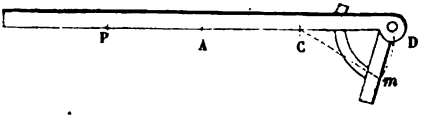
$$\mathrm{D}m = 2\,\mathrm{C}m \sin \frac{\mathrm{DC}m}{2} = 2\,\mathrm{C}m \sin \mathrm{CO}m,$$

d'où

$$d = l \sin \frac{180^\circ - \alpha}{2(n+1)}.$$

Pour décrire commodément des cercles par cette méthode, il faut avoir une règle égale à $\frac{3}{2}\,l$ au moins et portant, à l'une de ses extrémités, un petit bras gradué mobile autour d'une charnière, mais susceptible d'être fixé sur la règle d'une manière invariable.

Fig. 55.



Il suffit de marquer sur cette règle trois longueurs DC, CA, AP égales à la moitié de la valeur trouvée plus haut pour l et, sur la face extérieure du petit bras mobile, un point m tel que Dm soit égal à la valeur de d. On place alors la règle dans la direction du premier alignement, le point A coïncidant avec le point de contact; le point m de la règle donne un premier point de la courbe; on le marque par une fiche ou un piquet, ainsi que le point C sur la tangente, et l'on transporte la règle dans la direction Cm, le point P en C; le point m du petit bras donne un second point m' que l'on marque, ainsi que le point C' où est tombé le point C de la règle, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on retombe sur le second point de contact en B.

Avec un peu d'habitude, on procède presque aussi rapidement par ce moyen que si l'on effectuait un simple métrage.

69. Quand le raccordement circulaire a été tracé sur le terrain par l'un des moyens qui viennent d'être indiqués, il est nécessaire de connaître la longueur du développement curviligne substitué au parcours des deux tangentes. La mesure directe avec la chaîne suffit dans la plupart des cas; mais il est toujours bon de contrôler l'opération par l'évaluation numérique de l'arc entier. Rien n'est plus facile, quand on se rappelle que *dans une même circonférence, les longueurs de deux arcs quelconques sont entre elles dans le même rapport que les nombres de degrés auxquels ils correspondent.*

Or, si nous comparons l'angle au centre $180^\circ - \alpha$ à la circonférence entière qui correspond à 360 degrés et dont la longueur est égale à $2\pi R$, π étant le rapport constant d'une circonférence à son diamètre et ayant la valeur connue 3,1416, nous pourrons poser

$$\text{arc AB} : 2\pi R :: 180^\circ - \alpha : 360^\circ;$$

Digitized by Google

de là vient immédiatement

$$\text{arc AB} = 2\pi R \frac{180^\circ - \alpha}{360^\circ} = \pi R \left(1 - \frac{\alpha}{180^\circ}\right).$$

Supposons donc, comme exemple, deux alignements faisant entre eux un angle de 75 degrés et raccordés par un arc de 800 mètres de rayon; la longueur de cet arc sera exprimée par

$$3,1416 \times 800 \left(1 - \frac{75}{180}\right) = 1465,996224,$$

ou, sensiblement,

1466 mètres.

70. Le point dont il importe le plus d'avoir la position précise, quel que soit le mode de description que l'on adopte, est celui qui, situé sur la bissectrice de l'angle des tangentes, est le plus rapproché du sommet de cet angle. Outre que cette connaissance sert de vérification pour le tracé de la courbe, elle peut être d'une grande influence sur le choix à faire entre tel ou tel raccordement. Or, le triangle rectangle AOS, dans lequel (*fig.* 51)

$$SM = SO - OM = SO - R,$$

fournit

$$SO = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{AS}^2} = \sqrt{R^2 + T^2},$$

et ces deux égalités combinées fournissent

$$SM = \sqrt{R^2 + T^2} - R.$$

C'est ici le lieu de remarquer que le même triangle rectangle SOA fournit, à raison de la perpendiculaire AI abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse,

$$OI \times SO = \overline{AO}^2,$$

ou

$$OI = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + T^2}};$$

il en résulte donc, pour la flèche MI dont la valeur est OM — OI, l'expression

$$R - \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + T^2}}.$$

71. Les courbures prononcées étant défavorables à l'action des moteurs et à la facilité de la circulation, le cercle est nécessairement la courbe la plus convenable, par ce motif qu'il répartit uniformément la courbure sur tous les points de la ligne de raccordement, tandis que les autres courbes ne donnent en certains points des rayons plus grands qu'à la condition d'en donner de plus petits sur d'autres.

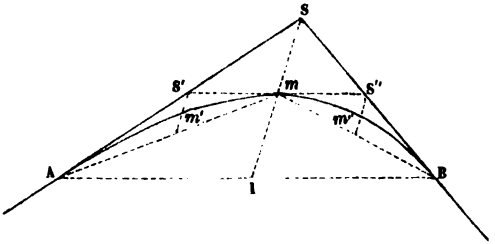
Digitized by Google

Le raccordement par un arc de cercle doit donc être exclusivement adopté dans tous les cas où les circonstances locales permettent d'admettre deux tangentes d'égale longueur ; mais il n'en est pas toujours ainsi, et la présence d'obstacles insurmontables, tels que des constructions, des cours d'eau, des reliefs accidentés du sol, obligent quelquefois à prendre des tangentes inégales. On emploie communément alors une courbe irrégulière, la *parabole*, dont nous indiquerons seulement deux propriétés respectivement correspondantes à deux procédés de description :

1°. *Si l'on unit le point de concours de deux tangentes quelconques au point milieu de la corde qui joint les points de contact*, 1° *le point situé au milieu de la droite ainsi obtenue sera un point de la courbe ;* 2° *une parallèle menée par ce point à la corde de contact sera tangente en ce même point à la parabole.*

Cet énoncé nous fournit sur-le-champ un moyen facile de raccorder deux alignements. Soient, en effet, A et B les points de raccordement et S le point de concours des deux lignes ; nous tirerons AB, puis SI, et nous aurons, au milieu *m* de cette dernière droite, un point de la parabole ; menant ensuite par le point *m* la parallèle *m*S' à AB, nous aurons une nouvelle tangente S'*m*S" dont chaque partie nous permettra de recommencer et de continuer autant que nous le désirerons la même série d'opérations, pour obtenir d'autres points *m'*, *m"*, etc., de la courbe.

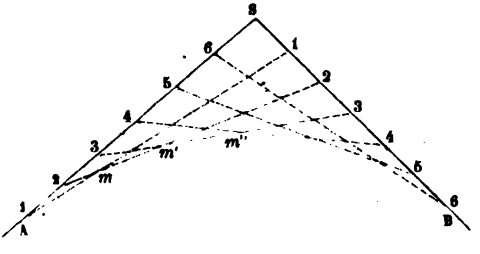
Fig. 56.



Il est à remarquer que les tangentes SA et SB n'ont nullement besoin d'avoir une égale longueur, et que l'évaluation exacte de cette longueur n'entre pour rien dans la construction, qui est purement géométrique.

2°. La méthode suivante est peut-être d'un usage plus commode encore. Elle consiste à diviser en un même nombre de parties égales les deux longueurs SA et SB ; à numéroter les points de division, à partir de A qui porte le n° 1, vers S qui n'a pas de numéro, et à partir

Fig. 57.



Digitized by Google

de S vers B qui porte le dernier numéro ; enfin, à joindre par des droites les points de division portant les mêmes numéros sur les deux lignes.

Les points m, m', m'', etc., déterminés chacun par l'intersection de deux droites successives ainsi menées, seront les sommets d'une ligne polygonale qui sera d'autant plus près d'être la parabole cherchée, que les points de division des tangentes seront plus multipliés.

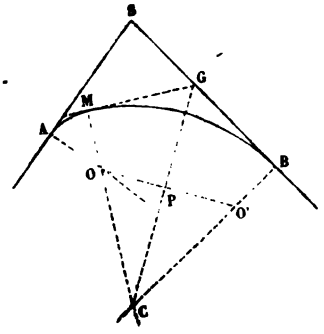
Pour tracer la courbe avec toute l'approximation nécessaire, il suffira donc que deux observateurs, placés à deux divisions successives sur AS, visent les divisions correspondantes de BS et fassent placer un jalon à la rencontre de leurs deux plans verticaux de visée.

72. Le dernier procédé qui vient d'être décrit a toutefois l'inconvénient de laisser de l'incertitude sur la véritable position des points de la courbe, à cause de l'angle très-aigu sous lequel se croisent deux droites consécutives ; il a besoin d'être complété par la détermination numérique d'un certain nombre de points dont il faut encore calculer la distance à l'origine de la droite sur laquelle chacun d'eux doit se trouver. Les raccordements paraboliques ont d'ailleurs tous le grave défaut de ne pas se prêter facilement au calcul de la longueur de leurs arcs, et de présenter des difficultés d'un autre genre, lorsqu'il s'agit de les appliquer à des tracés dans lesquels il existe un minimum pour la courbure, ainsi que cela a lieu notamment dans l'exécution des chemins de fer.

Par ces motifs, nous pensons qu'il convient généralement de renoncer à l'emploi de la parabole, et de raccorder les alignements avec deux arcs de cercle tangents à ces derniers et tangents entre eux, comme il suit :

Soient SA et SB les deux tangentes à raccorder, A et B leurs points de contact respectifs ; les cercles cherchés auront leurs centres sur les perpendiculaires AO et BO′ élevées sur les tangentes aux points de contact donnés.

Fig. 58.



Prenons un premier rayon quelconque AO, et portons sur l'autre perpendiculaire une longueur BO′ égale à AO ; tirons OO′, et sur le milieu P de cette droite élevons la perpendiculaire PC dont la rencontre en C avec BO′ donnera le second centre C.

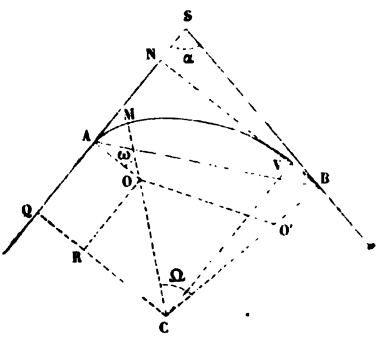
Les deux centres étant O et C, nous décrirons les deux arcs AM et BM dont la tangente commune en M passe d'ailleurs en G sur le prolongement de CP.

73. L'indétermination inhérente au problème qui nous occupe est mise

Digitized by Google

en évidence par l'obligation où nous nous sommes trouvés de prendre un premier rayon arbitrairement; elle paraîtra plus explicitement encore, s'il est possible, quand nous allons chercher à exprimer au moyen des données les valeurs des deux rayons inconnus r et R.

Fig. 59.



Soient donc t et T les longueurs des deux tangentes données SA et SB, et α l'angle connu des alignements; projetons

le point C sur SA en Q,
le point B sur SA en N,
le point O sur CQ en R,
et le point C sur BN en V.

Le triangle rectangle OCR nous donnera

$$\overline{OC}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{CR}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{CR}^2.$$

Or,

$$OC = O'C = BC - BO' = BC - AO = R - r,$$

$$AQ = SQ - SA = SN + NQ - SA = SN + CV - SA = T\cos\alpha + R\sin\alpha - t.$$

$$CR = CQ - QR = NV - OA = BN - BV - OA = T\sin\alpha - R\cos\alpha - r.$$

Il viendra donc, en substituant ces valeurs dans la relation précédente,

$$(R - r)^2 = (T\cos\alpha + R\sin\alpha - t)^2 + (T\sin\alpha - R\cos\alpha - r)^2,$$

ou, en développant et réduisant,

$$2(tR + Tr)\sin\alpha - 2Rr(1 + \cos\alpha) = T^2 + t^2 - 2Tt\cos\alpha.$$

Telle est la relation de condition qui lie les deux rayons r et R aux trois données t, T et α, et dans laquelle le second membre n'est autre chose (*Trigon.*, 33) que le carré de la corde AB qui joint les deux points de contact.

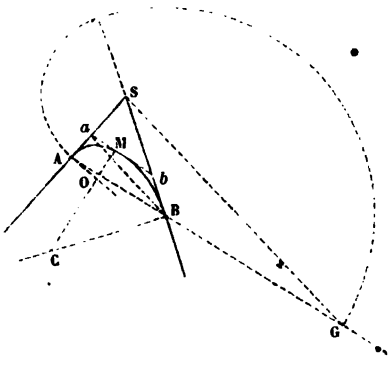
Cette formule peut servir à déterminer l'un des deux rayons, quand on a pris pour l'autre une valeur arbitraire; plus généralement, on peut en tirer l'une quelconque des cinq quantités qui y entrent, lorsque les quatre autres ont été fournies soit par les données de la question, soit par une fixation spontanée.

74. Malgré l'indétermination de la question, quand il s'agit de fixer les deux rayons du raccordement, il est aisé de reconnaître que les valeurs de ces inconnues ne peuvent varier en dehors de certaines limites entre lesquelles il faut choisir, dans chaque cas, celles qui conviennent le mieux aux conditions locales. En l'absence de toute exigence impérieuse sous ce rapport, il est incontestable que la préférence doit être acquise

Digitized by Google

à une solution remarquable qui offre le double avantage d'avoir la tangente commune aux deux arcs parallèle à la corde de contact du raccordement, et de correspondre à un minimum du rapport des deux rayons. Nous n'entrerons pas ici dans le détail des calculs relatifs à cette hypothèse, et nous nous bornerons à donner d'une part sa construction géométrique la plus simple, et d'autre part les valeurs des deux rayons.

Fig. 60.



On porte à la suite de AB une longueur BG égale à SA + SB; on tire SG, puis on mène B*a* parallèle à cette droite. Le point *a* est un point de la tangente commune *ab* que l'on trace parallèlement à AB. Prenant enfin *a*M égal à *a*A, on a le point de contact M, et la perpendiculaire MOC donne les deux centres O et C.

Quant aux valeurs des deux rayons propres à ce cas particulier, elles s'expriment fort simplement comme il suit :

$$r = \frac{c(c - T + t)}{2T \sin \alpha}, \quad R = \frac{c(c + T - t)}{2t \sin \alpha}.$$

N'oublions pas que c n'est autre chose que la corde AB, dont la valeur est

$$\sqrt{T^2 + t^2 - 2Tt \cos \alpha}.$$

75. Le besoin de calculer le développement du raccordement oblige à connaître l'amplitude de chacun des deux angles au centre ω et Ω des deux arcs dont les rayons sont respectivement r et R. La *fig.* 59, dans laquelle les angles MOA et OCR sont égaux, nous donne (*Trigon.*, 30) généralement

$$\sin \omega = \frac{OR}{OC} = \frac{AQ}{OC} = \frac{T \cos \alpha + R \sin \alpha - t}{R - r}, \quad \Omega = 180^\circ - (\alpha + \omega).$$

Dans le cas de la tangente commune parallèle à AB, il est facile de reconnaître que les angles ω et Ω sont respectivement égaux aux angles en A et B du triangle SAB, puisque ces angles ont, chacun à chacun, leurs côtés perpendiculaires; rien n'est donc plus simple que de les calculer sans recourir à la valeur ci-dessus de sin ω, puisque l'on connaît déjà, dans le triangle sus-indiqué, les trois côtés et l'angle α.

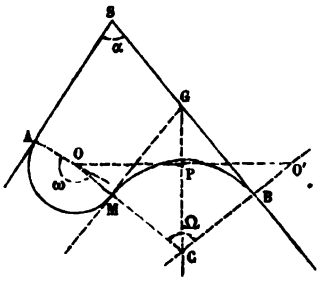
76. Il arrive assez fréquemment que, au lieu de cheminer jusqu'à une certaine distance du point de rencontre des deux alignements, pour gagner la seconde tangente et la parcourir en s'éloignant de ce point, les circonstances locales obligent à infléchir le raccordement de manière à se re-

Digitized by Google

tourner pour marcher vers le sommet sur le deuxième alignement. C'est surtout sur les routes et chemins tracés dans les pays montagneux et très-accidentés que l'on rencontre la nécessité de ces raccordements en S, que nous appellerons aussi *raccordements inverses;* bien qu'ils ne soient pas absolument proscrits sur les chemins de fer, on comprend que la vitesse considérable et la solidarité des longues suites de véhicules doivent en restreindre l'application au cas où, les rayons étant très-grands, le passage d'un arc à l'autre puisse se faire sans produire dans les trains une sorte de torsion préjudiciable à la sûreté du parcours.

Ce cas se distingue géométriquement du précédent en ce que les deux arcs de cercle sont tangents entre eux *extérieurement*, et l'on tient compte comme il suit de cette circonstance dans la construction générale :

Fig. 61.



Au lieu de porter la longueur BO′ égale à AO dans l'angle même du raccordement, on la porte en dehors, et la construction s'achève ensuite de la même manière; on tire OO′; on mène PC perpendiculaire sur le milieu de cette ligne, et les points O et C sont les deux centres cherchés.

Le point de contact des deux arcs entre eux se trouve en M sur la ligne des centres, et la tangente commune, perpendiculaire à OC, passe d'ailleurs aussi par le point G que détermine le prolongement de PC.

Un calcul et des remarques tout à fait analogues à ceux que nous avons présentés au n° 73 conduiraient à la relation générale suivante entre les données et les inconnues de la question :

$$2(tR+TR)\sin\alpha+2Rr(1-\cos\alpha)=T^2+t^2-2Tt\cos\alpha,$$

et aux valeurs

$$\sin\omega=\frac{T\cos\alpha+R\sin\alpha-t}{R+r},\quad \Omega=\omega-\alpha.$$

77. La condition la plus naturelle à ajouter à celles qui résultent directement de l'énoncé de la question, est celle qui aurait pour objet de rendre égaux entre eux les rayons r et R; l'équation de condition deviendrait alors déterminée par cette hypothèse, et prendrait la forme du deuxième degré ci-après :

$$2(1-\cos\alpha)r^2+2\sin\alpha(T+t)r-(T^2+t^2-2Tt\cos\alpha)=0;$$

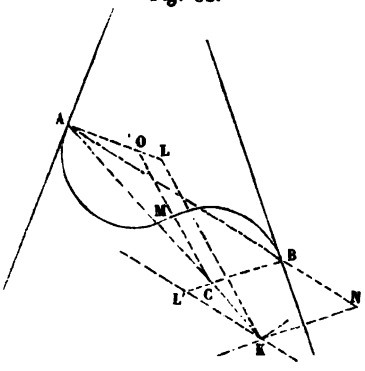
sa résolution (*Algèbre*, 36) donnerait, abstraction faite du signe — devant le radical, lequel doit être rejeté pour laisser à r une valeur positive,

$$r=\frac{-(T+t)\sin\alpha+\sqrt{(T+t)^2\sin^2\alpha+2(1-\cos\alpha)(T^2+t^2-2Tt\cos\alpha)}}{2(1-\cos\alpha)}.$$

Digitized by Google

La construction géométrique propre à ce cas est d'ailleurs la suivante : On prend sur les perpendiculaires menées aux points de raccordement deux longueurs égales et quelconques AL et BL′, et on mène par le point L′ une parallèle à la corde AB. Sur cette parallèle on marque un point K distant du point L de deux fois la longueur AL ; on joint ce point K à A et à L ; enfin, par le point C où AK coupe BL′, on tire CO parallèlement à KL, et les points C et O sont les deux centres cherchés. Nous le prouverons aisément en menant KN parallèle à BL′ ; car, les deux triangles ABC et ANK étant semblables, ainsi que AOC et ALK, cette similitude donne la suite de rapports égaux :

Fig. 62.



$$AC : AK :: AO : AL :: BC : KN :: CO : KL.$$

Or, puisque $AL = BL' = KN$, on a donc

$$AO = BC,$$

et, puisque $KL = 2KN$, on a de plus

$$CO = 2BC.$$

78. En général, le problème du raccordement des alignements droits doit être résolu par les procédés qui viennent d'être exposés et qui, sans être les seuls, sont cependant les plus usuels. Néanmoins, il peut se présenter des circonstances où la régularité géométrique des formes entraînerait à un excès de dépense qui ne serait pas suffisamment justifié ; on étudie alors par tâtonnement des courbes qui, bien qu'elles puissent ne pas être susceptibles d'une définition géométrique, doivent toujours être assujetties à la double condition de ne pas faire de jarrets et de ne pas changer trop brusquement de courbure. Parmi ces courbes autres que le cercle et la parabole, nous ne citerons que pour mémoire celle que quelques personnes emploient sous le nom de *courbe à flèches proportionnelles*, et qui, lorsqu'on l'adopte sans nécessité, n'a plus que le contestable mérite d'être moins simple, moins gracieuse et moins connue que les autres.

PLAN PARCELLAIRE.

79. Parmi les plans que les Conducteurs des Ponts et Chaussées sont appelés à lever, il en est qui réclament une exactitude toute particulière ; nous voulons parler des *plans parcellaires*, qui sont destinés à servir de

Digitized by Google

base à l'acquisition amiable ou à l'expropriation forcée des surfaces de terrain nécessaires à l'exécution des travaux projetés, et sur lesquels on se contente de tracer géométriquement les limites des zones à acquérir, pour en calculer ensuite la contenance par parcelle.

S'il est presque toujours permis, pour les plans d'ensemble des projets, de se servir des levers cadastraux, les plans parcellaires au contraire doivent être dressés *ad hoc*, avec un soin minutieux, dans le double but d'arriver à des évaluations exactes des dépenses et d'ôter tout motif de contestation aux propriétaires, qui se montrent généralement peu satisfaits de voir leurs immeubles traversés par des voies de communication. Aussi l'Administration attache-t-elle une juste importance à ce que ces plans soient sans défaut, et a-t-elle prescrit de les rapporter toujours à l'échelle de $\frac{1}{1000}$, c'est-à-dire à $0^{m},001$ pour 1 mètre.

On inscrit sur les plans parcellaires les noms des communes, et les lettres qui désignent les sections dans lesquelles le cadastre a divisé chacune d'elles.

Chaque parcelle porte en outre :

1°. Le numéro d'ordre qui lui a été assigné dans sa section cadastrale;

2°. Sa dénomination locale ou vulgaire, s'il y a lieu;

3°. Son genre de culture;

4°. Le nom du propriétaire inscrit à la matrice cadastrale, ainsi que celui du propriétaire actuel et du fermier, locataire ou usufruitier;

5°. Enfin, un second numéro d'ordre, écrit en rouge et correspondant au rang de la parcelle sur le plan considéré.

Quand on ne craint pas d'augmenter la confusion et de nuire à la clarté du plan, il est également commode de mettre, sur chaque parcelle ou division de parcelle, la contenance de la portion à prendre, ainsi que celle de la surface qui restera libre après l'exécution des travaux, tant à gauche qu'à droite de la voie projetée.

On doit figurer soigneusement sur les plans parcellaires les murs, fossés, haies et autres clôtures, les chemins d'exploitation, les ruisseaux et, en général, tous les objets qui sont de nature à permettre d'arriver plus facilement à une équitable estimation de la valeur des terrains traversés.

Ajoutons enfin que, les plans dont il s'agit étant destinés à subir, aux termes de la loi, les formalités de l'enquête publique dans les mairies, ils doivent être nécessairement dressés et, au besoin, scindés par commune.

Pour résumer et compléter les indications des plans parcellaires, on dresse un *tableau* récapitulatif *parcellaire* des surfaces à acquérir et des indemnités à payer, lequel reproduit les lettres, noms, numéros et autres désignations inscrites sur le plan.

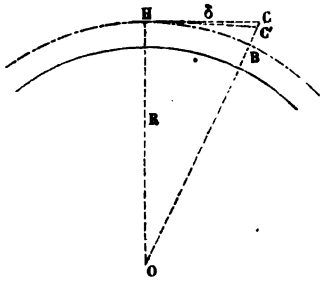
Digitized by Google

NIVELLEMENT. (*)

1. Nous venons d'exposer les méthodes qui servent à obtenir la position *en plan* des divers points que l'on doit considérer sur le terrain; il faut maintenant, pour compléter la connaissance des lieux, déterminer les hauteurs, ou plutôt les différences de hauteur des mêmes points. Cette seconde opération porte le nom de *nivellement;* pour la bien comprendre, il faut se rappeler que la surface de la terre est sensiblement celle d'une sphère vers le centre de laquelle convergent toutes les verticales; tous les points qui sont à la même hauteur, c'est-à-dire à la même distance du centre de la terre, sont dits au même niveau, et leur ensemble constitue une surface sphérique parallèle à la surface terrestre. Pour cette raison, une pareille sphère est dite une *surface de niveau,* et, par extension, quelle que soit d'ailleurs la véritable forme du globe terrestre, on définit une surface de niveau par la condition d'être perpendiculaire en chacun de ses points à la direction du fil à plomb; l'idée la plus claire d'une pareille surface nous serait encore donnée par l'état de repos d'un étang, d'un lac parfaitement tranquilles, ou mieux encore de l'Océan, si, les causes perturbatrices venant à être suspendues, ses eaux pouvaient arriver à un équilibre complet.

Ceci bien compris, les instruments qui servent au nivellement et qui portent eux-mêmes le nom de *niveaux*, ont pour objet, quand ils sont établis sur un point H, de déterminer, dans une direction quelconque, le prolongement indéfini du plan horizontal passant par ce point; par conséquent, l'intersection C de ce plan de visée avec la verticale OC d'un point éloigné B, ne saurait être à la même distance du centre de la terre, c'est-à-dire au même niveau que le premier point, et, pour ce motif, la ligne HC s'appelle la ligne de *niveau apparent,* par opposition à l'arc HB qui représente le niveau vrai; la longueur BC est donc la *hauteur* ou *l'excès du niveau apparent sur le niveau vrai.*

Fig. 1.



(*). Dans cette édition, comme dans la première, nous avons incorporé à notre rédaction des emprunts textuels au *Traité de Nivellement* de M. Breton (de Champ); le lecteur fera bien de recourir à cet excellent livre, s'il veut approfondir la matière si importante qui en fait l'objet tout spécial.

Digitized by Google

Cette quantité BC, que nous appellerons h, a pour expression, en fonction de la distance HC ou δ, et du rayon R de la terre,

$$h = OC - OB = \sqrt{R^2 + \delta^2} - R.$$

Telle est l'erreur commise, quand on place un point de mire dans le plan de visée HC, pour avoir un point de niveau avec le point H; par suite il faut, pour avoir le point B lui-même, descendre au-dessous du point C de la quantité $\sqrt{R^2 + \delta^2} - R$.

Toutefois, une autre cause d'erreur en sens contraire est due à la réfraction du rayon visuel dans les couches d'air plus ou moins denses qu'il traverse; cette cause a pour effet de faire paraître le point C plus élevé qu'il n'est réellement, en sorte que ce n'est pas le point C lui-même que l'on voit en C, mais un autre point C′ situé au-dessous; l'erreur due à la sphéricité de la terre étant BC, et celle due à la réfraction étant CC′, l'erreur due à la fois aux deux causes est donc en définitive représentée par

$$BC' \quad \text{ou} \quad BC - CC'.$$

Nous avons déjà évalué BC; quant à CC′, diverses expériences ont établi que, dans l'étendue des cas pratiques, on peut admettre avec sécurité que cette quantité est égale à 0,16 BC. Il en résulte que

$$BC' = 0{,}84\ BC = 0{,}84\ \left(\sqrt{R^2 + \delta^2} - R\right).$$

Voici les valeurs que prend cette différence du niveau vrai au niveau apparent, pour quelques-unes des distances d'observation le plus en usage et en prenant, pour le rayon moyen de la terre, la valeur R = 6366600^m.

DISTANCES en mètres.	ÉLÉVATION du NIVEAU APPARENT au-dessus du niveau vrai.	OBSERVATIONS.
m	m	
20	0,0000	La valeur de $BC' = 0{,}84\ (\sqrt{R^2 + \delta^2} - R)$ étant peu commode pour le calcul, on lui a substitué, dans la recherche des valeurs ci-contre, la relation approchée $BC' = 0{,}84 \frac{\delta^2}{2R}$, établie d'après la considération de la tangente moyenne proportionnelle entre la sécante issue du même point et sa partie extérieure. On a ainsi $\overline{HC}^2$ ou $\delta^2 = BC \times (2R + BC)$; d'où l'on tire $BC = \frac{\delta^2}{2R + BC}$, et, en négligeant au dénominateur la quantité BC qui est toujours extrêmement petite par rapport au diamètre 2 R de la terre, $BC = \frac{\delta^2}{2R}$.
40	0,0001	
60	0,0002	
80	0,0004	
100	0,0007	
120	0,0009	
140	0,0013	
160	0,0017	
180	0,0021	
200	0,0026	
300	0,0059	
400	0,0106	
500	0,0165	

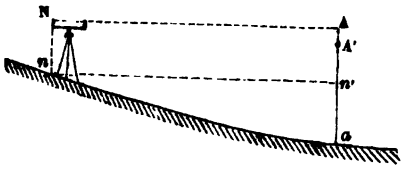
Digitized by Google

Il importe de remarquer, à l'occasion de cette Table, 1° qu'elle ne comporte pas un degré d'exactitude tel qu'on doive adopter et introduire comme rigoureux dans les opérations les résultats qu'elle fournit, calculés jusqu'à la quatrième décimale; 2° que, dans les limites de distances où restent généralement les opérations élémentaires d'un nivellement fait pour le service des Ponts et Chaussées, les corrections opérées au moyen de cette Table n'affectent les résultats que de quantités insensibles; 3° qu'avec une précaution qui sera bientôt indiquée (4), il est d'ailleurs facile de se rendre à peu près indépendant des deux causes d'erreur dues à la sphéricité de la terre et à la réfraction des rayons visuels.

2. Les instruments qui servent à niveler sont le *niveau* et la *mire*. Le niveau, quelles que soient sa forme et ses dispositions, est destiné à diriger le rayon visuel de l'observateur, tout autour de son point de station, dans un même plan horizontal. La mire est simplement une règle graduée que l'on fait poser d'aplomb, par un aide appelé *porte-mire*, sur le point éloigné dont on s'occupe, afin d'en rendre la verticale visible. L'usage élémentaire de ces instruments consiste à mesurer la longueur Aa interceptée sur la verticale du point a par le plan horizontal de visée.

A cet effet, la mire, dont le pied se place en a, porte ordinairement un *voyant*, c'est-à-dire une plaque mobile sur laquelle est tracée une ligne horizontale très-apparente, dite *ligne de foi*, et que le porte-mire, guidé par les signes de l'opérateur, fixe au point où la ligne de foi rencontre le plan de visée; après quoi, la distance de cette ligne au pied de la mire donne la hauteur Aa ou la *cote* du point a par rapport à l'horizontale NA.

Fig. 2.

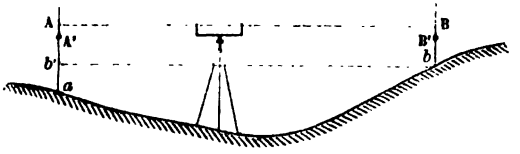


3. S'il s'agissait uniquement de comparer les hauteurs de deux points, c'est-à-dire, de mesurer leur *différence de niveau*, il suffirait de placer le niveau en N au-dessus de l'un n des points; de donner un coup de niveau sur le second point a; enfin, d'augmenter la cote obtenue A'a de la correction AA' fournie par la Table précédente ou par la formule qui a servi à l'établir, et la cote ainsi rectifiée Aa, comparée à la hauteur connue Nn, ferait effectivement connaître la différence de niveau cherchée $n'a$. Mais on comprend qu'il serait souvent embarrassant et quelquefois même impossible de placer exactement le niveau dans la verticale du premier point; il est plus commode de choisir, à portée des deux points donnés, un troisième point où l'on place le niveau. On mesure alors sépa-

Digitized by Google

rément, de cette station, les deux cotes Aa et Bb, et leur différence $b'a$ est nécessairement la distance verticale comprise entre les lignes ou surfaces de niveau qui passent par ces points, c'est-à-dire, leur différencede niveau.

Fig. 3.



4. Ce qui porte encore puissamment à établir la station du niveau en dehors des deux points a et b, c'est que, si l'on se place, soit au milieu de la distance ab qui les sépare, soit en tout autre point également distant de chacun d'eux, on trouve l'avantage précieux de se rendre indépendant des erreurs de sphéricité et de réfraction, puisque ces deux erreurs, affectant les cotes de la même quantité et dans le même sens, disparaissent de leur différence. Il est donc alors inutile de corriger les cotes A'a, B'b pour avoir la différence de niveau $b'a$; car évidemment

$$A'a + AA' - (B'b + BB') = A'a - B'b = b'a,$$

si AA' = BB' et, en général, si, par une cause quelconque dépendant soit des circonstances extérieures, soit même de la construction du niveau, les deux rayons visuels sont déviés de l'horizontale de quantités égales et dans le même sens pour des distances égales.

Il est toutefois bon d'observer que l'égalité mathématique des distances n'est pas indispensable, et qu'il suffit de remplir à peu de choses près cette condition, les corrections des cotes étant par elles-mêmes très-petites et, à plus forte raison, leurs différences étant beaucoup trop faibles pour affecter d'une manière sensible les résultats.

NIVEAUX.

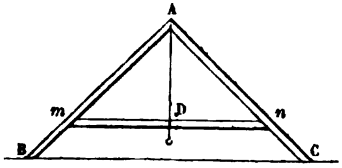
NIVEAU DE MAÇON.

5. Comme on vient de le voir, le point essentiel d'un nivellement est d'avoir des instruments qui permettent de mesurer aussi exactement que possible la cote brute d'un point éloigné. Ces instruments, qui sont plus ou moins perfectionnés, selon le plus ou moins de précision qu'exige l'opération, ont pour objet unique de déterminer un plan horizontal, ou tout au moins une ligne horizontale dans le lieu où ils sont établis; le plus simple de tous est, sans contredit, celui que l'on désigne sous le nom de *niveau de maçon*.

Cet appareil se compose de deux règles en bois, assemblées à angle droit par l'une de leurs extrémités, et coupées d'égale longueur; une traverse, également en bois, consolide le système.

Digitized by Google

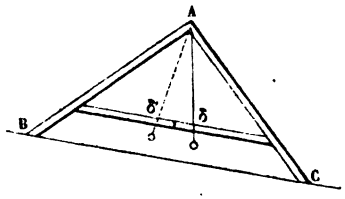
Fig. 4.



Un fil à plomb, ou *perpendicule*, attaché au sommet A de l'angle des deux règles, coïncide, quand les deux extrémités B et C sont sur une même horizontale, avec la perpendiculaire à cette droite BC, perpendiculaire dont la trace a été d'avance marquée en D sur la traverse *mn*.

6. La condition d'exactitude d'un pareil niveau est que la droite AD soit bien perpendiculaire à BC; avec un plan horizontal préalablement bien dressé, il suffirait d'y placer le niveau, et de voir si le fil à plomb bat régulièrement sur la ligne de foi AD. Voici comment on procède à cette vérification, quand on ne dispose pas d'un plan notoirement horizontal :

Fig. 5.



On trace une droite BC sur un plan quelconque, et l'on y applique le niveau, en marquant par un trait sur la traverse la position δ que prend le fil à plomb; puis, on retourne l'instrument de B en C, et l'on fixe également la nouvelle position δ' du perpendicule. La ligne de foi doit alors être la bissectrice de l'angle $\delta A \delta'$, et l'instrument doit être, s'il y a lieu, rectifié dans ce sens.

7. On se sert principalement du niveau de maçon pour régler les assises des constructions, araser horizontalement la partie supérieure d'un mur, etc. Quelquefois on a voulu l'employer pour niveler à de courtes distances; on l'a alors disposé comme il est indiqué dans la *fig.* 3 de la *Pl. III*, sur une règle bien droite que supporte un pied d'instrument au moyen d'un genou à coquille ordinaire : mais cet appareil ne peut donner, dans ces circonstances, qu'une approximation grossière, même quand on munirait les extrémités de la règle de pinnules; il ne présente d'ailleurs aucune commodité spéciale, et son application doit être, autant que possible, restreinte aux besoins des chantiers et aux objets indiqués ci-dessus.

NIVEAU D'EAU.

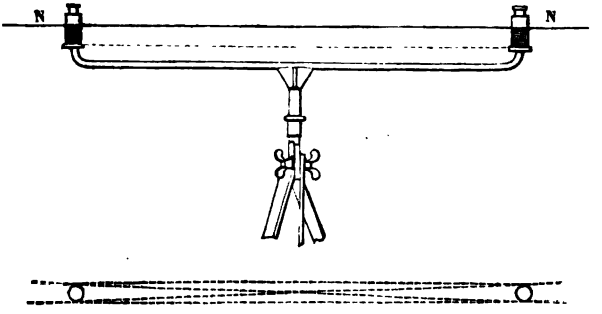
8. Le niveau d'eau consiste en un tube de cuivre ou de fer-blanc, redressé en coude à ses deux extrémités, et maintenu dans une position à peu près horizontale au moyen d'une douille conique qui s'applique sur la tige verticale d'un pied à trois branches. Les deux bouts recourbés se terminent par deux fioles de verre sans fond, d'un même diamètre, et le tout est rempli d'eau, de manière que le liquide arrive vers le milieu ou

Digitized by Google

les deux tiers de la hauteur de chaque fiole. On reconnaît du reste que la tige qui supporte le tube approche suffisamment de la direction verticale, en faisant faire à l'instrument un tour d'horizon, et en examinant si la hauteur de l'eau ne change pas sensiblement dans les verres pendant le mouvement.

Dans cet état, le plan horizontal NN déterminé par les surfaces supérieures des colonnes d'eau est le même dans toutes les positions du niveau; par conséquent, toutes les tangentes menées à la fois aux deux intersections de la surface de l'eau avec les tubes qui la renferment sont des ho-

Fig. 6.



rizontales situées dans le même plan; toutefois, il faut observer que ces intersections ne sont pas, dans la pratique, des lignes nettement déterminées : l'eau, en vertu de l'attraction moléculaire, se relève contre les parois du verre et y forme un *onglet* annulaire dont l'épaisseur rend un peu incertaine la direction des rayons visuels tangents. Pour pointer avec exactitude, on doit s'éloigner à quelque distance de l'instrument, à un mètre environ de la fiole oculaire; les onglets paraissent alors comme des lignes noires bien tranchées qui seraient tracées sur le verre même.

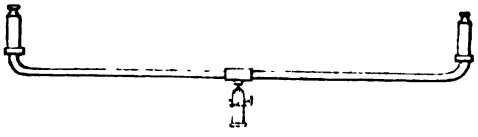
9. Une condition essentielle d'exactitude, pour l'opération faite au niveau d'eau, consiste dans l'égalité des diamètres des deux fioles; ce point est capital, non-seulement pour que les deux onglets aient la même épaisseur, mais encore et surtout pour que le plan horizontal déterminé par les surfaces supérieures de l'eau reste constamment le même, quand on fait tourner l'instrument sur lui-même pour donner différents coups de niveau d'une même station. On comprend en effet que cette constance du plan de visée ne saurait être obtenue, avec des fioles à diamètres inégaux, que dans le cas pratiquement irréalisable d'un axe de rotation parfaitement vertical.

10. Dans les niveaux les plus soignés, un genou à coquille permet de leur faire faire facilement les mouvements nécessaires pour les placer

Digitized by Google

dans une position à très-peu près horizontale. Ces instruments sont généralement en cuivre et composés de plusieurs parties destinées à être renfermées dans une boîte : les fioles se démontent à vis, ainsi que les trois parties dont se compose le tube principal, et il importe beaucoup que tous ces assemblages ne laissent échapper aucune portion du liquide ; car toute déperdition serait une cause d'abaissement continuel du plan de visée.

Fig. 7.



Les *fig.* 1 et 2 de la *Pl. III* représentent avec détail ces appareils perfectionnés.

11. Les principales précautions usuelles qu'il convient de prendre, quand on se sert du niveau d'eau, sont :

1°. De faire sortir les bulles d'air qui restent souvent engagées dans l'eau du tube inférieur, et d'attendre ensuite que le liquide soit revenu à l'état d'équilibre ; quand l'air est agité, on accélère ce mouvement en bouchant partiellement les goulots des fioles.

2°. De faire faire toutes les visées d'une même station par la même personne, deux observateurs prenant rarement les mêmes points des onglets pour déterminer le plan de niveau.

3°. Pour rendre les onglets plus apparents, on colore quelquefois l'eau avec du carmin ou, ce qui vaut mieux encore, on lui donne un reflet noirâtre au moyen de lames de fer-blanc formant portion d'enveloppe, noircies et vernies intérieurement, et que l'on adapte sur les tubes, de manière toutefois à laisser voir les portions de la surface supérieure du liquide nécessaires pour diriger le rayon visuel. Quelques personnes préfèrent une teinte rouge que l'on obtient en appliquant un papier de cette couleur entre le verre et les enveloppes.

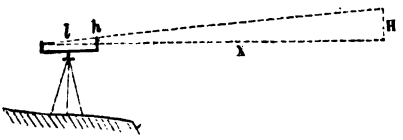
4°. Quand on reste longtemps en station au même point, on doit avoir égard à l'évaporation de l'eau, surtout si le soleil frappe sur l'instrument, ou à l'augmentation du liquide, s'il pleut avec quelque abondance. C'est pour remédier autant que possible à ces inconvénients, que les fioles ont un orifice étroit qu'il est facile de boucher, et que le plus souvent elles sont munies de couvercles métalliques qui les protégent en outre dans les transports. Si l'on opère dans l'hiver, on se sert d'eau alcoolisée pour éviter la congélation.

12. Pour terminer ce que nous avons à dire sur le niveau d'eau et son usage, observons qu'un rayon visuel qui s'écarterait de l'horizontale de la quantité h dans l'intervalle l des deux fioles, s'en écarterait nécessaire-

Digitized by Google

ment de la quantité $H = \frac{X\,h}{l}$ à la distance de visée X ; si donc on suppose que le maximum de l'erreur admissible dans un coup de niveau d'eau soit $0^m,01$ et que l'écart moyen des rayons de visée au-dessus ou au-dessous de l'horizontale soit un demi-millimètre ou $0^m,0005$, dans la longueur du niveau que nous supposerons elle-même égale à $1^m,25$, la distance à laquelle il conviendra de limiter approximativement la portée des coups de niveau d'eau sera donnée par la relation

Fig. 8.



$$X = \frac{lH}{h}$$

qui, avec les données numériques ci-dessus, fournit

$$X = 25^m.$$

Il est bien entendu que, d'un côté, plus l'observateur aura l'habitude du niveau d'eau, plus il pourra impunément allonger les portées au delà de cette limite ; d'autre part, plus le nivellement exigera d'exactitude, moins il faudra regarder à raccourcir les distances et à multiplier les stations.

NIVEAU A BULLE D'AIR. — USAGE ET VÉRIFICATION.

13. Cet instrument consiste en un tube de verre, de forme à peu près cylindrique, presque entièrement rempli d'un liquide et fermé hermétiquement à ses deux bouts, de manière à laisser un petit espace occupé par une bulle d'air, sinon absolument vide ; on donne au tube une légère courbure pour que le milieu soit plus élevé que les extrémités, disposition qui, en raccourcissant la bulle, la fait s'arrêter en un point où la tangente intérieure est nécessairement horizontale. Si donc on fixe extérieurement au tube une règle parallèle à la tangente menée en son milieu, il suffira d'amener la bulle en ce point pour que la règle devienne elle-même horizontale.

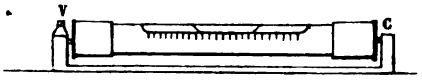
Tel est l'instrument que l'on nomme *niveau à bulle d'air ;* pour en rendre l'usage plus commode, on le renferme dans une garniture ou boîte cylindrique en cuivre, échancrée par-dessus, et qui ne laisse à découvert que sa partie moyenne où est le point que la bulle doit atteindre pour indiquer l'horizontalité de la règle inférieure. Une échelle de division, gravée sur le verre même ou sur les bords de la garniture, permet de reconnaître et d'apprécier les écarts du milieu de la bulle.

14. Les usages du niveau à bulle d'air que nous venons de décrire sont

Digitized by Google

nombreux, et cet instrument remplace avec avantage, dans les opérations délicates, le *niveau de maçon* ou de charpentier. Afin de pouvoir le rectifier au besoin, on fixe la garniture du tube sur la règle inférieure, au moyen d'une charnière C et d'une vis V avec laquelle on peut l'élever ou l'abaisser, jusqu'à ce que le parallélisme voulu soit établi. On emploie à cet effet la méthode dite du *retournement :* on pose le niveau sur une règle bien dressée et suffisamment rigide, horizontale ou non ; on élève ensuite peu à peu l'une des extrémités de cette règle, de manière que la bulle s'arrête entre ses repères. Il est bien clair que, si l'instrument est juste, la règle sera devenue horizontale ; donc, en le retournant bout pour bout, la bulle devra encore revenir entre ses repères. S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si le niveau est inexact, on tournera la vis de rappel jusqu'à ce que la bulle se retrouve au milieu du tube, en comptant le nombre de tours qu'il aura fallu faire pour obtenir ce résultat ; on fera enfin, en sens contraire, la moitié de ce nombre de tours, et le niveau sera rectifié.

Fig. 9.



Toutefois, comme on ne peut apprécier qu'approximativement de combien on a tourné chaque fois la vis de rappel, la rectification n'est pratiquement complète qu'après plusieurs épreuves successives ; l'opération doit donc être recommencée, tant que le niveau retourné bout pour bout ne conserve pas la bulle exactement entre ses repères. Dans la dernière épreuve, le chemin que la bulle doit parcourir pour arriver au milieu du tube étant susceptible d'être mesuré par le moyen de la graduation de l'instrument, on n'a plus à tourner la vis que dans un seul sens, jusqu'à ce que la bulle ait fait la moitié de ce chemin.

15. Il est nécessaire que le liquide renfermé dans le tube puisse résister aux plus grands froids sans perdre sa fluidité ; l'eau ordinaire n'est donc point propre à cet usage. L'alcool ou l'éther réunissent à l'avantage d'une extrême mobilité, celui de ne jamais geler ; l'expérience a démontré qu'en employant ces liquides, on obtient une bulle plus épaisse, moins longue et dont l'œil distingue plus facilement les limites.

NIVEAU D'ÉGAULT. — USAGE ET VÉRIFICATION.

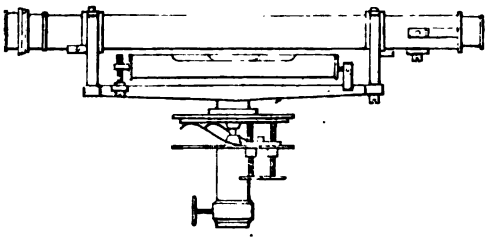
16. Pour appliquer le niveau à bulle d'air que nous venons de décrire au nivellement à distance, on y adapte, parallèlement à la règle, soit un système de pinnules, soit une lunette destinée à diriger un rayon visuel horizontal et semblable à celle que nous avons décrite (*Lever des Plans,* 6) à l'occasion de la stadia, sauf en ce qui concerne le réticule qui porte simplement ici deux fils rectangulaires. Le niveau à lunette est de beau-

Digitized by Google

coup le plus usité, et celui dont nous allons d'abord parler est dû à M. l'ingénieur en chef Egault, dont il a conservé le nom.

Il se compose, comme nous venons de le dire et comme l'indique la *fig.* 10, d'une lunette posée sur deux collets que porte à ses extrémités la règle du niveau à bulle d'air; cette règle, et avec elle la lunette, doit être placée dans une position parfaitement horizontale, en même temps que le tout doit pouvoir se mouvoir dans un tour complet d'horizon, pour les visées à faire sur différents points sans changer de station. On obtient ce double résultat en composant la tige qui supporte le système, de deux parties, l'une fixe, engagée invariablement dans le pied de l'instrument, l'autre mobile avec la règle et la lunette. Chacune de ces deux parties porte en outre, à l'approche de son point de jonction avec l'autre, un plateau circulaire destiné à régler, par le moyen de vis à caler et de ressorts, la direction verticale du pivot mobile et, par suite, l'horizontalité de la règle qui lui est perpendiculaire. (Voir, pour plus de détails, la *Pl. III, fig.* 4, 5, 6 et 7, à la fin du volume.)

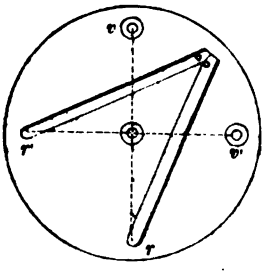
Fig. 10.



17. Lorsque l'instrument a été réglé de manière à pouvoir être employé à niveler, la bulle d'air, les génératrices passant par les points de contact correspondants de la lunette avec les collets, l'axe optique de la lunette et le plateau mobile doivent tous se mouvoir dans des plans parallèles qui seront horizontaux, si l'un d'eux, celui du plateau par exemple, est rendu horizontal.

Pour arriver à ce résultat indispensable, le premier soin à prendre, après avoir posé le pied solidement sur le terrain, de façon à rendre sa tablette supérieure approximativement horizontale et avoir assujetti, par la vis de pression de la douille, l'instrument sur ce pied, consiste donc à amener le plateau mobile dans un plan parfaitement horizontal, au moyen de deux vis à caler v, v' et de deux ressorts r, r' appuyés sur le plateau inférieur qui est fixé invariablement sur la tige. Les deux vis sont placées aux extrémités de deux diamètres rectangulaires, et les deux ressorts viennent

Fig. 11.



Digitized by Google

supporter le plateau supérieur aux extrémités opposées des mêmes diamètres; il est aisé de voir, d'après cette disposition, que, si l'on suppose l'horizontale de la bulle exactement parallèle au plateau mobile, et si l'on place successivement la règle du niveau dans la direction de chacun des diamètres rectangulaires, on rendra ces deux diamètres horizontaux par une simple manœuvre de la vis et au moyen des indications de la bulle; par conséquent, le plateau mobile sera lui-même parfaitement horizontal, puisqu'il contiendra deux droites concourantes horizontales.

Mais il arrive presque toujours que l'instrument n'est pas réglé, c'est-à-dire, que le plateau supérieur n'est rigoureusement parallèle ni à la bulle d'air, ni aux génératrices de contact, ni à l'axe optique de la lunette; il faut toujours au moins s'assurer si ces conditions sont remplies, et nous allons successivement les examiner, en indiquant les moyens de remédier à tout dérangement de cette nature.

1°. *Rendre l'horizontale de la bulle parallèle au plateau supérieur.*

Il faut pour cela, en même temps que l'on s'occupe de placer le plateau supérieur horizontalement, et tandis que le tube de la bulle est dans la direction de l'un des diamètres régulateurs, tourner la vis correspondante jusqu'à ce que cette bulle soit entre ses repères; puis, faire décrire à tout l'instrument un angle de 180 degrés autour du pivot. Si la bulle revient à ses repères, c'est une preuve que le parallélisme demandé existe; dans le cas contraire, on corrige la déviation, moitié au moyen de la vis de rappel placée à l'extrémité de la bulle, moitié avec la vis à caler, et l'on répète cette épreuve jusqu'à ce que toute déviation ait disparu.

Enfin, on continue la fixation du plateau mobile comme on l'a vu plus haut, en mettant la bulle dans la direction du deuxième diamètre et tournant la vis correspondante, jusqu'à ce que ladite bulle s'arrête entre ses repères.

Remarque.— Quelques niveaux d'Egault sont portés par trois vis à caler, et, dans cette disposition, on établit la bulle, d'abord parallèlement à la ligne qui joint deux d'entre elles, puis dans la direction perpendiculaire déterminée par la troisième.

2°. *Rendre l'axe de figure de la lunette parallèle au plateau horizontal.*

On obtient ce résultat en visant avec la lunette un point placé à une distance et à une hauteur convenables, faisant ensuite décrire à tout l'instrument un angle de 180 degrés, et tournant la lunette bout pour bout, sans changer celle des génératrices qui touchait le fond des collets. Dans cette nouvelle position, on vise le point de mire adopté, et, s'il se trouve au-dessus ou au-dessous de la ligne de visée, c'est que la génératrice inférieure n'est pas bien horizontale, c'est-à-dire, que l'un des collets est plus bas que l'autre, défaut facile à corriger, après quelques tâtonnements, par le mou-

Digitized by Google

vement d'une vis de pression placée sous l'un des deux, et qui peut servir à le relever.

3°. *Rendre l'axe optique de la lunette parallèle au plateau horizontal*, ou, ce qui revient maintenant au même, parallèle à l'axe de figure. Il faut, en effet, que le rayon visuel, passant par le centre de l'objectif et par la croisée des fils, coïncide avec l'axe de figure du cylindre extérieur dont font partie les surfaces qui s'appuient sur les collets. On vérifie si cette condition est remplie, en visant un point éloigné, et en faisant ensuite tourner la lunette de 180 degrés autour de son axe. Si le point de mire dont l'image, dans la première visée, se trouvait sur le fil horizontal, se trouve, dans la seconde, au-dessus ou au-dessous de ce fil, on amène le fil horizontal à la position qu'il doit occuper, en lui faisant parcourir, au moyen d'une vis placée à l'extrémité du fil vertical, la moitié de la distance qui le sépare de l'image du point de mire dans cette seconde observation.

Par une opération analogue, et en prenant pour point de mire une ligne verticale, on déterminerait facilement la position de l'autre fil, et la lunette serait alors complétement *centrée*.

Nous avons dit, et il est évident *à priori*, que l'un des fils du réticule d'une lunette à nivellement doit être horizontal ; cette condition est assurée par le constructeur au moyen de goujons d'arrêt, attachés au corps de la lunette et butant contre des vis fixées aux collets ; toutefois, pour s'assurer si les vis de butée sont trop ou trop peu allongées, on peut viser un point distinct qui tombe sous le fil, et faire tourner l'instrument autour du pivot rendu d'abord vertical. Si le fil est horizontal, il ne cessera pas de couvrir le point visé, tant que ce point pourra être aperçu ; dans le cas contraire, ce point quittera le fil et s'en éloignera. Pour corriger ce défaut, on doit retirer suffisamment les vis de butée, chercher par le tâtonnement une position de la lunette où le fil soit bien horizontal, et tourner enfin les vis jusqu'à ce qu'elles touchent, sans les déplacer, les goujons d'arrêt.

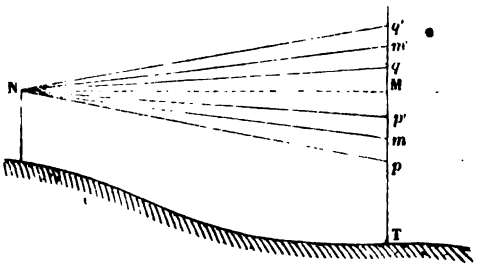
18. Telles sont les vérifications à faire au moment où l'on est sur le point de commencer un nivellement avec le niveau d'Egault ; lorsque les conditions qu'elles imposent sont exactement remplies, l'axe optique de la lunette est une horizontale qu'on peut diriger dans tous les sens pour donner des coups de niveau. L'instrument pourra dès lors être transporté sur une nouvelle station, et sera en état de servir dès qu'on en aura rendu le plateau supérieur horizontal. Néanmoins, si la distance du nouveau point de mire n'était pas la même que celle pour laquelle le centrage primitif a eu lieu, la lunette pourrait se trouver décentrée, par suite du déplacement du porte-fils dont la position varie avec l'éloignement des objets visés. C'est là une raison à ajouter à celles que nous avons données (4) pour placer, autant que possible, chaque station à égale distance des deux points que l'on veut comparer, et il y aurait, par suite, un grand avantage à

Digitized by Google

adopter une même distance pour toutes les stations d'un nivellement; mais, comme il serait souvent impossible et toujours très-long de prendre ce soin, on a dû chercher, et c'est encore à M. Egault qu'on la doit, une méthode qui permît d'opérer en toute sécurité avec un instrument décentré, et dans lequel même l'horizontale de la bulle et l'axe de figure ne seraient pas parallèles au plateau supérieur. Cette méthode consiste à donner sur le point à niveler quatre coups répondant aux quatre positions de la lunette dans lesquelles le fil est horizontal, après qu'on s'est uniquement préoccupé de rendre le plateau horizontal et de préparer la lunette, en ce qui concerne seulement les distances du réticule et de l'oculaire, eu égard à l'éloignement du point de mire et à la vue de l'observateur.

Si donc on prend sur un point T deux cotes Tp, Tp', l'une avant, l'autre après avoir fait décrire à la lunette un angle de 180 degrés autour de son axe, il est clair que, dans ces deux observations, le fil horizontal se sera successivement placé à égale distance au-dessus et au-dessous de l'axe de figure de la lunette, et que la moyenne Tm des deux résultats obtenus correspondra précisément à cette position, c'est-à-dire, à la cote qu'aurait fournie une seule observation, si la lunette avait été centrée.

Fig. 12.



Si maintenant on retourne la lunette bout pour bout dans ses collets, et que l'on ramène, avec tout le système, l'oculaire vers l'œil par un pivotement à 180 degrés, en ayant soin toutefois que le fil horizontal de la lunette soit encore bien horizontal après le retournement, et qu'à chaque coup la bulle soit rappelée au milieu de son tube, on répétera, dans cette nouvelle position de l'instrument, les deux opérations faites d'abord, et l'on obtiendra deux nouvelles cotes Tq, Tq', dont la moyenne Tm' aurait été fournie, comme la précédente, par une seule observation, si la lunette avait été centrée.

Or, il est évident que, dans ces deux couples d'observations, l'axe optique, comme l'axe de figure, s'est successivement placé dans deux positions symétriques par rapport à sa position normale NM, de telle sorte que la cote réelle TM n'est autre chose que la moyenne des deux moyennes précédemment obtenues, c'est-à-dire la moyenne des quatre observations partielles. On a, en un mot,

$$TM = \frac{Tm + Tm'}{2} = \frac{Tp + Tp' + Tq + Tq'}{4}.$$

Digitized by Google

De plus, si l'on remarque que

$$TM = \frac{Tp + Tq'}{2} = \frac{Tq + Tp}{2},$$

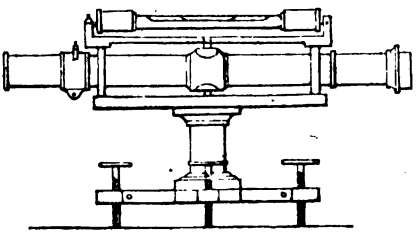
on conclura qu'il suffirait, pour avoir le résultat cherché, de faire deux des quatre observations indiquées, la première et la quatrième, par exemple, ou la seconde et la troisième; ce qui veut dire que, quand on a visé une première fois dans une position quelconque du niveau, il suffit de viser une seconde fois, après avoir, d'un seul coup, retourné la lunette bout pour bout, l'avoir fait tourner sur elle-même de 180 degrés, et avoir ramené vers soi l'oculaire : la moyenne des deux résultats donne nécessairement la cote cherchée.

C'est suivant ce dernier mode que l'on opère habituellement, même quand on dispose d'un niveau réglé, parce que cette précaution permet de corriger les erreurs qui pourraient résulter du dérangement de l'instrument pendant la durée des opérations. On doit d'ailleurs s'attacher toujours à régler son niveau avant de s'en servir, afin que les corrections n'aient à porter que sur de très-petites différences et qu'on soit averti, si ces différences devenaient trop fortes, de l'inexactitude des visées, du dérangement du niveau, ou de la présence d'une cause quelconque capable d'altérer les résultats du nivellement.

NIVEAU DE LENOIR. — USAGE ET VÉRIFICATION.

19. Il existe un niveau de Lenoir qui présente les mêmes moyens de vérification et de correction que celui d'Egault; il n'en diffère, du reste, qu'en ce que l'axe de rotation de l'instrument, au lieu d'être rendu vertical au moyen de vis agissant sur un plateau du centre duquel cet axe s'élève à angle droit, traverse un manchon conique et est amené dans la position qu'il doit prendre par l'action de quatre vis latérales qui agissent à angle droit contre lui. Mais l'instrument plus spécialement appelé *niveau de Lenoir* et que, pour le distinguer de l'autre, on désigne quelquefois sous le nom de *niveau-cercle de Lenoir*, consiste en un plateau circulaire, fixé par son centre sur une colonne supportée par trois branches dans chacune desquelles se meut une vis à caler (*Pl. III, fig.* 8 et 9).

Fig. 13.



Le corps de la lunette est engagé et fixé invariablement dans deux prismes carrés, par l'intermédiaire desquels elle repose et tourne sur le cercle; au milieu de l'intervalle compris entre ces prismes, la lunette est armée de deux tourillons, dont l'un, inférieur, s'engage dans

Digitized by Google

le centre évidé du plateau, pour guider le mouvement de rotation, et l'autre, supérieur, entre dans un trou pratiqué dans la règle de la bulle d'air que l'on place elle-même, soit sur les deux faces supérieures du prisme de la lunette, soit directement sur le cercle, pour le rendre horizontal.

20. Quand on veut mettre cet instrument en état de servir, on commence par rendre le plateau horizontal, comme nous venons de le dire, en posant sur son plan supérieur la bulle que l'on dirige d'abord parallèlement à la ligne qui joint deux des vis à caler, puis perpendiculairement à cette ligne. On s'assure ensuite que l'un des fils du réticule est horizontal, et, si cette condition n'est pas remplie, on tourne en conséquence le porte-fils, après avoir desserré la vis qui presse contre le corps de la lunette le manchon circulaire qui l'enveloppe.

On obtient aussi le centrage de la lunette par une vis qui se meut dans le plan du réticule, et que l'on manœuvre, s'il y a lieu, en posant la lunette alternativement sur les faces supérieures et inférieures des prismes. On peut d'ailleurs se dispenser de centrer la lunette pour chaque distance de la mire, en prenant sur chaque point, comme avec le niveau d'Egault, la moyenne de deux coups correspondant aux deux positions de la lunette sur le limbe.

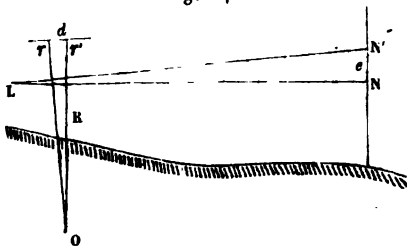
Le plateau étant horizontal et la lunette centrée, il faut encore que l'axe de cette dernière soit horizontal; c'est ce qui aura lieu si les deux prismes ont des hauteurs rigoureusement égales, c'est-à-dire, si la bulle posée sur la lunette reste au milieu, comme lorsqu'on la met directement sur le plateau. Si cette condition n'est pas remplie, on ne peut corriger l'erreur qui résulte de cette imperfection qu'en faisant diminuer un peu le prisme trop élevé, ou s'en rendre indépendant qu'en se plaçant à égales distances des points à niveler.

Enfin, lorsque la bulle s'écarte un peu de ses repères, en passant d'une direction à la suivante, on peut la rappeler en tournant celle des vis à caler du pied qui s'en rapproche le plus, sans avoir à craindre de changer d'une quantité appréciable la hauteur du plateau ou du plan horizontal des visées.

21. Si l'on peut distinguer nettement des objets fort éloignés avec le secours d'une bonne lunette, il ne faut pas en conclure qu'il soit possible de niveler avec exactitude à d'aussi grandes distances. La portée des niveaux à lunette, en général, est naturellement bornée par la sensibilité de la bulle, laquelle dépend de la longueur du rayon de courbure longitudinale R du tube qui la renferme. On comprend en effet que, si l'œil commet une erreur d dans l'appréciation de la position de la bulle, erreur due à une imperfection quelconque de cette partie essentielle de l'instrument, le rayon de visée déterminé par cette position du niveau diffère de l'ho-

Digitized by Google

Fig. 14.



rizontale d'une certaine quantité e mesurée à la distance X du point de mire. Or, les deux triangles LNN′ et Orr' sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, et cette propriété fournit la relation

$$LN : rO :: NN' : rr',$$

ou

$$X : R :: e : d,$$

d'où l'on tire

$$X = R\frac{e}{d}.$$

Dans les instruments que l'on construit aujourd'hui, le rayon R est généralement égal à environ 15 mètres; et si, d'une part, on considère qu'il n'est guère permis d'espérer évaluer la position de la bulle à moins d'un quart de millimètre ou $0^m,00025$; si, d'autre part, on admet que l'erreur e de chaque coup de niveau puisse impunément atteindre $0^m,002$, on conclura, pour la limite de portée du nivellement à bulle d'air et à lunette, la distance fournie par la relation

$$X = 15 \times \frac{0,002}{0,00025} = 120 \text{ mètres}.$$

Ce résultat, on le conçoit, n'a rien de précis; c'est une simple indication de la distance que nous croyons ne pas devoir être franchie, même dans les grandes opérations, et le nombre rond 100 mètres nous paraît être une bonne moyenne que nous conseillons de ne dépasser qu'exceptionnellement; c'est, du reste, à chaque opérateur qu'il appartient de décider pour lui-même cette question, en raison de son plus ou moins d'habitude pratique et de la portée de l'instrument dont il dispose, et en tenant surtout grand compte des indications que nous venons de donner.

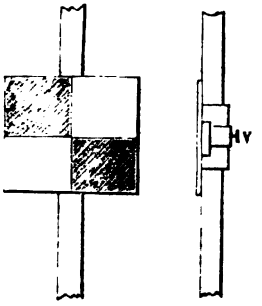
MIRE A COULISSE.

22. Nous avons dit qu'on appelait *mire* une règle destinée à rendre visible et à mesurer une portion de la verticale du point dont on veut avoir la hauteur. Dans la mire le plus généralement en usage, nous voulons dire la *mire à coulisse*, on fait glisser le long de cette règle graduée en centimètres une plaque de bois mince ou de métal, de forme rectangulaire et dont la face qui doit être présentée à l'opérateur est ordinairement divisée en quatre rectangles égaux par des droites tirées entre les milieux des côtés opposés. Deux de ces rectangles, situés sur une même

Digitized by Google

diagonale, sont blancs, et les deux autres rouges ou noirs; la plaque elle-même se nomme le *voyant*, dont la ligne de foi résulte de l'opposition des couleurs et se présente avec beaucoup de netteté. Le trait vertical a pour objet de fixer la portion de l'image qu'il faut faire couvrir par le fil vertical de la lunette; mais les mires qui ne doivent servir qu'avec le niveau d'eau ont simplement leur voyant mi-partie noir et blanc, avec une ligne de foi horizontale séparant les deux bandes. A la face postérieure du *voyant* est fixée une embrasse en cuivre dans laquelle passe le corps de la mire, et, au moyen de cette pièce, le voyant peut être monté ou descendu à volonté; une vis de pression V permet enfin de le fixer à la hauteur convenable.

Fig. 15.



Le corps de la mire n'est, à proprement parler, qu'une règle faite d'un bois dur, bien sec, de 2 mètres de hauteur. On ne pourrait guère lui donner une hauteur plus grande sans inconvénient, puisque le porte-mire doit pouvoir atteindre sans difficulté la partie supérieure. Afin qu'elle puisse servir à mesurer des cotes plus grandes que 2 mètres, cette règle est en outre formée de deux parties glissant à coulisses l'une sur l'autre, et qui permettent d'élever le *voyant* avec la règle mobile et de le fixer par le moyen d'une seconde vis de pression que porte une embrasse semblable à la première. Au moyen de cette disposition, le voyant peut monter jusqu'à $3^{m},80$. (Voir les dessins de la mire à coulisse, *Pl. IV, fig.* 1, 2, 3 et 4.)

Le dos de la mire est divisé en centimètres dont le zéro est au pied de l'instrument. Cette graduation, dont on se borne à écrire les décimètres, pour ne pas multiplier inutilement les chiffres, est complétée par une petite échelle fixée à l'embrasse du voyant, échelle dont le zéro correspond à la ligne de visée, et sur laquelle on lit le nombre de millimètres qu'il faut ajouter aux centimètres trouvés, lorsque la cote est inférieure à 2 mètres. Une disposition analogue et une autre petite échelle adhérente à l'embrasse de la règle mobile servent, dans le cas où la mire est allongée, pour lire les divisions de la graduation placée sur l'une des faces latérales. D'ailleurs, quelques autres dispositions de détail sont parfois adoptées; mais elles sont trop simples et trop faciles à apercevoir au premier examen de l'instrument; pour que nous nous y arrêtions plus longtemps.

Quelle que soit la construction de la mire employée, le porte-mire doit s'attacher à la tenir autant que possible dans une direction verticale; à la distance où il se trouve, l'opérateur ne peut qu'imparfaitement s'apercevoir des défauts d'aplomb, si ce n'est quand la mire penche à droite ou à gauche; il est alors averti soit par l'inspection directe, soit par la com-

Digitized by Google

paraison avec le fil vertical de la lunette ou même avec le côté de l'un des verres du niveau d'eau. Les déviations en avant ou en arrière sont à peu près impossibles à reconnaître; il faut en cela s'en rapporter à la sagacité et à la conscience du porte-mire, dont l'œil et la main font, par l'exercice, des progrès assez rapides pour que la mire soit bientôt tenue dans une position toujours convenable.

23. L'opérateur et le porte-mire étant éloignés l'un de l'autre et placés à des distances qui excèdent généralement la portée de la voix, c'est par signes que la communication doit s'établir entre eux; ceux que l'on adresse au porte-mire sont de pure convention; il en est cependant quelques-uns d'un usage assez général et qu'il est bon de faire connaître.

Pour indiquer que la mire penche, on porte la main du côté opposé; pour faire hausser ou baisser le voyant, on élève ou l'on abaisse la main à plusieurs reprises, d'un geste d'autant plus rapide et plus prononcé que le voyant est plus éloigné du rayon de visée. A mesure qu'il s'en rapproche, on diminue les mouvements, et le porte-mire de son côté ne déplace le voyant qu'avec précaution, de manière à ne point dépasser le but.

Le signal pour indiquer que le porte-mire doit faire usage de la coulisse consiste à porter la main au-dessus de la tête et à l'élever à plusieurs reprises.

Lorsque la ligne de foi paraît être à la hauteur voulue, le niveleur fait un mouvement horizontal de la main de gauche à droite, et alors le porte-mire, en serrant la vis destinée à cet usage, arrête le voyant. Il remet ensuite la mire en place, jusqu'à ce que le premier l'avertisse, par un nouveau signe, que le coup a été donné convenablement.

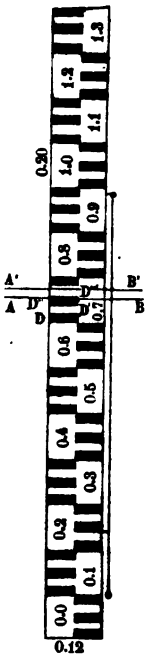
Afin d'user de tous les moyens de vérification dont il peut disposer, l'opérateur se fait lire à haute voix la cote par le porte-mire qui vient ensuite à lui, avec l'instrument, pour lui permettre de contrôler la première lecture dont le résultat a été préalablement inscrit au crayon.

MIRE PARLANTE.

24. Les précautions que nous venons d'indiquer paraîtront sans doute bien minutieuses; mais il est sûr qu'on aurait le plus grand tort de les négliger. C'est pour s'en affranchir en partie que, dans ces derniers temps, on a construit des *mires parlantes* dont la division, tournée vers l'observateur, est rendue assez apparente pour que celui-ci puisse, avec sa lunette, lire la cote directement. On comprend que ces mires n'ont pas besoin de voyant; elles sont faites d'une planche de 3 mètres de hauteur sur $0^m,10$ à $0^m,12$ de largeur. Quelques-unes même ont été portées jusqu'à une hauteur de 6 mètres. Les centimètres alternativement rouges et blancs, se comptent aisément à l'œil, à partir du décimètre immédiatement inférieur; on estime les millimètres à vue avec une exactitude qui, pour peu

Digitized by Google

Fig. 16.



qu'on ait l'habitude de cet exercice, dépasse celle des meilleures opérations faites avec la mire à coulisse.

La mire parlante a été imaginée par M. Bourdaloue, ancien conducteur des Ponts et Chaussées, lequel, après bien des essais sur la meilleure disposition de cet instrument, paraît s'être arrêté à une mire de $0^m,12$ environ de largeur, divisée de 20 en 20 centimètres; chacune de ces divisions forme un groupe de cinq divisions plus petites, de $0^m,04$ chacune, alternativement rouges et blanches et occupant la moitié de la largeur totale. Sur l'autre moitié, de gros chiffres noirs indiquent le nombre de groupes entiers qui se trouvent au-dessous et qu'il faut compléter par la lecture d'une certaine fraction du groupe correspondant. Enfin, les groupes de rang pair occupent la moitié de droite de la mire, et ceux de rang impair la moitié opposée.

La division de 20 en 20 centimètres n'est pas la plus naturelle et offrirait quelques difficultés à la lecture, si M. Bourdaloue n'avait eu l'heureuse idée de n'indiquer, par chaque chiffre, que la moitié de la hauteur de mire correspondante, et de lire les plus petites divisions comme si celles-ci n'étaient que de 20 millimètres. Il en résulte que la somme des deux lectures consécutives faite, suivant la méthode de M. Egault, pour compenser les erreurs du niveau, donne le coup moyen, sans qu'il soit nécessaire de diviser cette somme par 2, comme on le fait lorsque chaque coup s'obtient en vraie grandeur; de là une économie de temps.

Un exemple éclaircira surabondamment ce que ces détails peuvent conserver d'obscur : soit AB la trace du plan de visée sur la mire; la lecture directe fournit d'abord, pour les décimètres, le nombre 0,7.

Pour le chiffre des centimètres, on remarque que la ligne de mire AB prend deux divisions entières D, D' comptées pour 2 centimètres chacune, soit 4 centimètres à ajouter aux $0^m,7$ déjà trouvés; en tout $0^m,74$.

Enfin, pour les millimètres, on voit très-facilement à l'œil que la ligne AB prend les $\frac{2}{3}$ de la division D'', soit $\frac{2}{3} \times 0,020$ ou $\frac{1}{3} \times 0,040$, ou 0,013.

La cote entière déterminée par la ligne AB est donc $0,74 + 0,013$ ou 0,753.

Si maintenant on retourne le niveau et la lunette pour la seconde visée, on aura une autre ligne A' B' dont, en procédant de la même manière

Digitized by Google

et remarquant que cette ligne prend les $\frac{3}{4}$ de la division D^{m}, on trouvera la cote 0,775. Mais ces deux nombres 0,753 et 0,775 ne représentent, d'après la construction de la mire, que la moitié des longueurs verticales au moyen desquelles ils ont été calculés, en sorte que la moyenne des cotes réelles n'est autre chose que la somme de celles-ci, soit $1^{m},528$.

Nous avons dit que les mires de M. Bourdaloue avaient jusqu'à 6 mètres de longueur; quelquefois même il en met deux bout à bout au moyen de deux têtes à oreilles qu'on réunit par des boulons.

Les erreurs que l'on peut commettre, lorsque des mires aussi élevées s'écartent un peu de la verticale, étant très-sensibles, on y attache un fil à plomb dont peut s'occuper le porte-mire qui n'a pas de voyant à mouvoir; la lecture du coup de niveau étant d'ailleurs extrêmement rapide, on peut prendre, comme se rapprochant le plus de la verticale, le plus petit de ceux qu'on lit successivement pendant que la mire vacille.

Nous avons entendu quelques ingénieurs préconiser hautement ces nouvelles méthodes, dont ils avaient eu l'occasion de faire et voir faire l'application; quelque incertitude que laisse l'évaluation à l'œil des portions interceptées par la ligne de visée sur les divisions élémentaires, ils ne craignent pas de leur attribuer, sous le rapport de la célérité des opérations et des chances d'exactitude, une supériorité incontestable sur l'emploi de la mire à coulisse; s'il en était ainsi, il serait bien à désirer que ces méthodes et ces instruments fussent étudiés et propagés.

OPÉRATION DU NIVELLEMENT; CARNET.

25. Quand on observe, d'une même station, toutes les cotes des points dont on veut déterminer la hauteur relative, l'opération constitue un *nivellement simple*; nous en avons exposé les principes (3) pour le cas où le nombre des points se réduit à deux; si ce nombre est plus grand que deux, et si aucun de ces points n'est hors de la portée du niveau, il n'y a d'autre précaution à prendre que de choisir la station à une distance sensiblement égale de chacun d'eux, pour être dispensé des corrections que nécessite la hauteur du niveau vrai au-dessus du niveau apparent (4).

Mais le plus souvent il est impossible de trouver une station d'où puissent être donnés des coups de niveau sur tous les points à étudier; il faut alors faire un *nivellement composé*, qui n'est autre chose qu'une suite de nivellements simples, rattachés les uns aux autres par les cotes d'un même point, obtenues de deux stations consécutives.

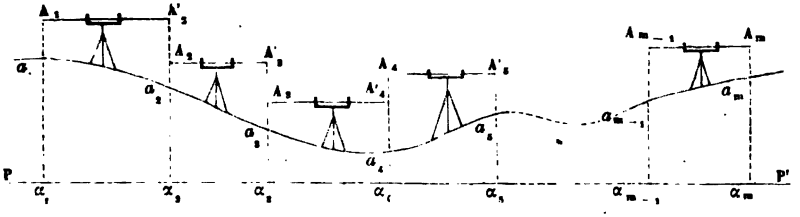
On voit sur-le-champ que ce qui distingue théoriquement le nivellement simple du nivellement composé, c'est que le premier fournit immédiatement la cote de chaque point par rapport au plan de visée qui reste constant pour toute l'opération, tandis que, dans le nivellement composé, le

Digitized by Google

plan de visée prenant autant de positions différentes qu'il y a de stations, il y a nécessité de rapporter tous ces plans et les cotes qu'ils ont déterminées à un *plan général de comparaison*. Il convient de choisir ce plan au-dessus ou au-dessous de tous les points à niveler, pour éviter d'avoir à distinguer deux catégories de cotes; néanmoins, dans le cas où il serait impossible d'agir ainsi, on lèverait toute difficulté en accompagnant du signe — et traitant comme des quantités négatives celles des cotes qui seraient situées du côté du plan où il n'est pas ordinaire qu'il y en ait.

26. Cela posé, imaginons qu'il s'agisse de déterminer, par un nivellement composé, les cotes d'un nombre quelconque m de points a_1, a_2, a_3, a_4,... a_{m-1}, a_m, par rapport à un plan de comparaison PP' situé au-dessous de tous ces points.

Fig. 17.



Nous effectuerons, comme le représente la *fig.* 17, entre chacun de ces points et le suivant, un nivellement simple; chacune de ces $m-1$ opérations peut se traduire algébriquement par l'égalité des hauteurs comprises entre son plan de visée et le plan de comparaison, et nous obtiendrons ainsi la série des relations qui suivent :

$$\begin{aligned}
A_1\alpha_1 &= A'_2\alpha_2,\\
A_2\alpha_2 &= A'_3\alpha_3,\\
A_3\alpha_3 &= A'_4\alpha_4,\\
A_4\alpha_4 &= A'_5\alpha_5,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A_{m-1}\alpha_{m-1} &= A'_m\alpha_m;
\end{aligned}$$

ou, en décomposant chacun des termes en ses deux parties :

$$\begin{aligned}
A_1a_1 + a_1\alpha_1 &= A'_2a_2 + a_2\alpha_2,\\
A_2a_2 + a_2\alpha_2 &= A'_3a_3 + a_3\alpha_3,\\
A_3a_3 + a_3\alpha_3 &= A'_4a_4 + a_4\alpha_4,\\
A_4a_4 + a_4\alpha_4 &= A'_5a_5 + a_5\alpha_5,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A_{m-1}a_{m-1} + a_{m-1}\alpha_{m-1} &= A'_ma_m + a_m\alpha_m.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Or, ces $m-1$ relations, dans lesquelles sont explicitement exprimées les cotes $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, $a_3\alpha_3$..., $a_m\alpha_m$ des points considérés, représentent autant d'équations du premier degré, dans lesquelles les premiers termes de chaque membre sont les quantités directement déterminées par les nivellements partiels, quantités résultant respectivement de chacun des coups de niveau et, par ce motif, appelées elles-mêmes *coups de niveau*. En s'avançant de sa première station vers la dernière, l'opérateur donne, à chaque fois, un coup de niveau sur le point qu'il a laissé derrière lui et un coup sur le point qu'il a devant lui : de là les dénominations usitées de *coup arrière* et de *coup avant ;* on peut remarquer, de plus, que les coups arrière sont tous placés en tête des premiers membres des équations ci-dessus, et les coups avant en tête des seconds.

Si maintenant, comme cela a toujours lieu, la cote de l'un des m points était connue, soit directement, soit par sa hauteur au-dessus ou au-dessous d'un point déterminé, les $m-1$ autres cotes seraient fournies sans difficulté par la résolution des $m-1$ équations posées. On se dispense toutefois, dans la pratique du nivellement, d'établir et de résoudre algébriquement ce système d'équations, et l'on calcule successivement les cotes de tous les points nivelés, en partant de celle qui est déterminée *à priori*. La forme commune des équations montre en effet, comme le prouve aussi du reste l'inspection de la *fig.* 17, que, *pour avoir la cote de l'un quelconque des points, il faut ajouter à la cote précédente le coup arrière qui lui correspond, et retrancher de la somme obtenue le coup avant sur le point que l'on considère ;* ou, ce qui revient au même, *ajouter à la cote précédente l'excès positif ou négatif du coup arrière précédent sur le coup avant du point que l'on considère ;* c'est ainsi que l'on a

$$a_5\alpha_5 = A_4a_4 + a_4\alpha_4 - A'_5a_5 = a_4\alpha_4 + (A_4a_4 - A'_5a_5),$$

et en général

$$a_m\alpha_m = A_{m-1}a_{m-1} + a_{m-1}\alpha_{m-1} - A'_m a_m = a_{m-1}\alpha_{m-1} + (A_{m-1}a_{m-1} - A'_m a_m).$$

Si la cote toute connue qui indique la hauteur du plan général de comparaison, au lieu d'être celle du premier point nivelé, était celle de tout autre point tel que a_4, on partagerait la série en deux autres, savoir : d'une part, a_1, a_2, a_3, a_4, et d'autre part, a_4, a_5,... a_m ; celle-ci resterait dans le cas précédent ; mais, pour trouver les cotes de la première partie, il faudrait rétrograder dans l'ordre a_4, a_3, a_2, a_1, en faisant attention que les coups *avant* et *arrière* deviendraient respectivement, pour cette série, des coups *arrière* et *avant ;* en d'autres termes, les quantités qui s'ajoutaient se retrancheraient, et *vice versâ*. Ces changements ne présentent d'ailleurs aucune difficulté.

27. Lorsqu'on veut seulement déterminer la différence de niveau de

Digitized by Google

deux quelconques des points donnés, a_2 et a_5 par exemple, il suffit de sommer membres à membres le groupe d'équations commençant par celle dont le premier membre contient $a_2\,\alpha_2$ et finissant par celle dont le second membre contient $a_5\,\alpha_5$; la relation qui en résulte est celle-ci :

$$A_2\,a_2 + A_3\,a_3 + A_4\,a_4 + a_2\,\alpha_2 = A'_3\,a_3 + A'_4\,a_4 + A'_5\,a_5 + a_5\,\alpha_5,$$

qui fournit

$$a_2\,\alpha_2 - a_5\,\alpha_5 = (A'_3\,a_3 + A'_4\,a_4 + A'_5\,a_5) - (A_2\,a_2 + A_3\,a_3 + A_4\,a_4),$$

et cette relation finale peut se traduire ainsi :

La différence de niveau de deux quelconques des points nivelés est égale à la différence entre la somme des coups avant et la somme des coups arrière donnés entre ces deux points, et le signe de cette différence indique lequel des deux points est le plus élevé.

Appliquée aux deux points extrêmes, cette règle devient :

La différence de niveau des deux points extrêmes est égale à la différence entre la somme de tous les coups avant et la somme de tous les coups arrière, le signe de cette différence indiquant toujours lequel des deux points est le plus élevé.

28. La réunion des éléments d'un nivellement, tant de ceux qui sont donnés que de ceux qui sont déterminés sur le terrain ou par des calculs ultérieurs, se fait dans un cadre préparé à l'avance et qui constitue un *carnet* ou cahier de nivellement. Ce cadre peut être dressé sous diverses formes, dont la meilleure sera toujours celle qui, sans cesser d'être aussi simple que possible pour l'inscription des résultats sur le terrain même où ils sont recueillis, renfermera tous les éléments que l'on peut avoir intérêt à conserver. Le spécimen suivant nous paraît concilier avantageusement ces deux conditions :

Digitized by Google

POINTS NIVELÉS.		DISTANCE au précédent.	COUPS de niveau.	MOYENNES		DIFFÉRENCES		COTES calculées d'après celle du point de départ.	OBSERVATIONS.
N^os.	DÉSIGNATION.			arrière.	avant.	en montant, à ajouter.	en descendant, à retrancher.		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Piquet planté sur l'axe du projet, à l'origine de la partie considérée.	»	1,986 1,978	1,982	»	»	»	m 129,293	Cette cote a été déduite, par un nivellement simple, du repère pris sur le dessus de la plinthe du pont Napoléon, lequel est à la cote 127^m,512.
2	Piquet à l'entrée du champ de la Morinière.....	m 41,00	2,269 2,263 3,018 3,019	» 3,019	2,266 »	»	0,284	129,009	
3	Piquet dans le même champ, à 12^m de l'angle sud.....	57,50	0,896 0,902 1,375 1,369	» 1,372	0,899 »	2,120	»	131,129	
4	Piquet sur l'accotement droit du chemin des Coudrais, à 36^m du parapet du ponceau de ce nom..	48,25	1,754 1,750 1,249 1,245	» 1,247	1,752 »	»	0,380	130,749	En ce point, la ligne d'opération du nivellement change sous un angle de 39° 40′ à gauche
a	Dessus du socle du pilastre de la porte du cimetière.....	»	2,855 2,851	2,853		»	1,606	129,143	
5	Piquet dans le pré haut, sur l'axe de la barrière d'entrée et vis-à-vis le 4^e peuplier.....	70,00	3,659 3,655 2,324 2,317	» 2,321	3,657 »	»	0,804	128,339	
6	Piquet sur le bord de la route départementale n° 16, à 40^m de la maison Blanche.....	50,00	1,193 1,189	»	1,191	1,130	»	129,469	Vérification des calculs : 9,941 — 9,765 = 0,176 3,250 — 3,074 = 0,176 129,469 — 129,293 = 0,176
	TOTAUX.....	266,75		9,941	9,765	3,250	3,074		

Digitized by Google

Ce tableau est ordinairement imprimé sur le recto seulement des feuilles d'un cahier ; le verso, moins commode pour écrire lisiblement des chiffres sur le terrain, remplace la colonne d'observations et reste en blanc, pour recevoir toutes les notes et indications que le niveleur juge utiles ou susceptibles de jeter quelque clarté sur ses opérations. Il convient d'y tracer en particulier un croquis pris sur les lieux et représentant la configuration générale du sol suivant la direction du nivellement ; on y désigne aussi d'une manière spéciale le point de départ et le point d'arrivée, avec toutes les particularités propres à les faire retrouver, pour le cas où le nivellement devrait être vérifié par une autre personne, ou simplement recommencé par le même opérateur.

La disposition qui précède présente en outre une vérification facile après le calcul des cotes. D'abord, ainsi qu'on l'a vu (27), la différence entre la somme des coups arrière et celle des coups avant (colonnes 5 et 6) doit être égale à la différence des cotes des points extrêmes ; il en est nécessairement de même de la différence des sommes des quantités contenues dans les colonnes 7 et 8, l'une de ces sommes exprimant combien on a monté en passant du premier point au dernier, et l'autre combien on a descendu.

29. Dans le tableau qui précède, nous avons rapporté le nivellement à un plan de comparaison inférieur ; ce mode présente cet avantage que les cotes sont d'autant plus grandes que les points auxquels elles se rapportent sont eux-mêmes plus élevés, ce qui constitue un système de représentation plus naturel et se prête mieux à l'intelligence immédiate des résultats du nivellement. Il est convenable en outre de prendre pour plan de comparaison le niveau moyen du sphéroïde des mers, ou tout au moins d'indiquer la position du plan choisi par rapport à ce niveau ; par là, on donne le moyen de rattacher plus tard les uns aux autres et de faire servir à une description générale de la surface terrestre, des nivellements effectués partiellement, dans des intentions différentes et pour les besoins du moment. Dans le cas où le plan de comparaison d'un nivellement est précisément le niveau moyen de la mer, les cotes des divers points au-dessus de ce niveau sont spécialement appelées *altitudes*.

Il est inutile d'ajouter que, si nous avions voulu rapporter notre nivellement à un plan supérieur, toutes les opérations se seraient faites d'une manière absolument semblable, à cela près que les additions et soustractions indiquées aux colonnes 7 et 8 du tableau eussent dû être remplacées respectivement par des soustractions et des additions.

Enfin, si d'un plan de comparaison inférieur à tous les points nivelés on voulait passer à un plan supérieur à tous ces points, ou réciproquement, les nouvelles cotes s'obtiendraient en retranchant les anciennes de la distance donnée qui séparerait le second plan de comparaison du premier.

Digitized by Google

30. Nous avons fait voir (26) comment on pouvait, dans un nivellement, déterminer les cotes de tous les points considérés, en fonction de l'une d'elles et, en particulier, de celle du point de départ. Bien qu'à la rigueur on puisse donner à cette cote une valeur quelconque, nous avons en outre montré (29) combien il est intéressant que cette valeur soit la même pour le même point dans chacun des nivellements qui s'y rattachent, et l'on conçoit dès lors de quelle utilité il serait d'avoir, pour chaque localité, les cotes rapportées à un même plan de comparaison, et principalement les altitudes d'une série de points remarquables, invariables, indestructibles, destinés soit à fixer la cote du point de départ de tout nivellement fait ou à faire en ce lieu, soit à vérifier de distance en distance les résultats de cette opération, à mesure qu'elle passerait à proximité de l'un quelconque de ces points qui, à cause de leur destination spéciale, portent le nom de *repères*.

L'utilité d'un pareil recueil de cotes de repères est incontestable; il serait à désirer que, pour toute la France, ces repères fussent nombreux, exactement rapportés à une même surface de niveau, vérifiés et officiellement adoptés pour servir de base à tous les nivellements. A défaut d'une pareille Table, on se borne à créer, pour tout nivellement particulier, une série de repères et à y rattacher de distance en distance les cotes calculées; les coups de niveau nécessités par ces vérifications, comme tous ceux que l'on juge à propos de rattacher au nivellement sur son passage, prennent place dans le carnet général avec un numéro particulier; le spécimen du tableau du n° 28 présente un exemple de l'un de ces points sous le n° *a*, et l'on peut remarquer à ce sujet que, pour que l'introduction du coup de niveau donné sur le repère ne trouble pas la précieuse vérification qui résulte de la comparaison des totaux des colonnes 5 et 6, nous avons placé ce coup de manière qu'il fût impossible de le comprendre dans l'une ou l'autre de ces colonnes. Nous préférons cette disposition à celle qui consiste à écrire ce coup de niveau à la fois dans l'une et l'autre des deux colonnes; elle a sur celle-ci l'avantage de n'écrire qu'une seule fois la même chose, et surtout de peindre aux yeux la position du point, entre le coup arrière et le coup avant de la station à laquelle il se rattache.

Les points que l'on choisit généralement pour servir de repères sont des parties remarquables et immuables de bâtiments, de puits, de ponts, d'écluses ou autres ouvrages d'art, de roches séculaires, etc. Enfin, à défaut de repères naturels ou préexistants, on en crée d'artificiels en pierre, en bois, en métal, et l'on se met en garde contre la possibilité d'une variation dans leur établissement, en les rattachant eux-mêmes à d'autres points appelés *contre-repères*.

Digitized by Google

MODES DE REPRÉSENTATION DU TERRAIN

ADOPTÉS DANS LE SERVICE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

31. Lorsqu'on a déterminé, au moyen des méthodes que nous venons d'indiquer, les hauteurs relatives des points remarquables d'une portion quelconque de la surface du sol, on peut, soit se contenter de consigner les résultats fournis par le nivellement sur la carte qui représente la projection horizontale, en y rapportant les cotes de hauteur des différents points, soit chercher à présenter aux yeux un relief du sol pour en tirer des bases certaines d'évaluation de travaux projetés. Ces deux modes, chacun à leur point de vue, sont admis dans le service des Ponts et Chaussées: le dernier, le plus usité, s'appuie sur le dessin d'un *profil en long* et de *profils en travers* du terrain, et le premier est connu sous le nom de *plan coté;* nous allons successivement examiner l'un et l'autre de ces systèmes, en donnant à chacun d'eux le développement qu'il comporte.

PROFIL EN LONG; PROFILS EN TRAVERS.

32. En général, dans les travaux des Ponts et Chaussées, où il s'agit le plus souvent de construire des voies de communication, telles que routes, canaux, chemins de fer, etc., on n'a à considérer que des zones allongées de terrain, des bandes superficielles dont on doit chercher à représenter les irrégularités au moyen de surfaces géométriques qui s'approchent le plus possible de la forme accidentée du sol naturel. Pour obtenir ce résultat, on commence par diriger le nivellement suivant une ligne ou une série de lignes magistrales qui, comme pour le lever des plans, s'appellent *lignes d'opération,* et qui paraissent, par premier aperçu, s'écarter peu de l'axe futur de la voie de communication projetée; on rapporte ensuite, à l'échelle convenue, le long d'une ligne droite considérée sur le papier comme la trace du plan de comparaison, les distances des divers points nivelés à l'origine et, en chacun des points de division de cette base, on mène des ordonnées sur lesquelles, à la même échelle ou à une échelle différente de la première, comme nous l'exposerons tout à l'heure, on porte des longueurs égales aux cotes fournies par le nivellement; la figure obtenue en joignant par un trait continu les sommets de toutes les ordonnées sera considérée comme représentant le profil du terrain suivant la ligne d'opération, en un mot le *profil en long.*

Ce système, on le voit, est éminemment propre à donner une idée claire des formes, et son mérite dépend du choix judicieux des points qui servent à le déterminer; il faut évidemment placer la mire sur les points élevés ou déprimés du tracé et, généralement, sur tous ceux où l'inclinaison du terrain change d'une manière sensible.

Digitized by Google

33. La plupart des travaux exigent que l'on connaisse le relief du terrain, non-seulement dans le sens de sa longueur, mais encore suivant sa largeur; on complète alors l'étude par des *profils en travers*, généralement dirigés suivant un plan perpendiculaire au profil en long et embrassant de chaque côté de celui-ci une étendue en rapport avec les besoins du projet qu'il s'agit de dresser ou des ouvrages qui doivent être exécutés. Les profils en travers se lèvent ordinairement de la même station qui sert à donner le coup arrière correspondant du profil en long; on conçoit dès lors qu'il serait possible de lever en même temps le profil en travers suivant par une série de coups avant; mais, pour la régularité des opérations, il est préférable d'attendre que le niveau soit à la station suivante, dans une position analogue par rapport au second profil. En d'autres termes, il convient de ne lever, de chaque station, qu'un seul profil en travers, en donnant exclusivement des coups arrière. Rien n'empêcherait sans doute de choisir le système des coups avant; mais l'important est de ne pas changer sans nécessité absolue, dans le cours d'une opération, une marche que l'on aurait adoptée en commençant.

Par cette méthode, on se procure des profils en travers naturellement rattachés par la cote sur l'axe au profil en longueur; mais, si les circonstances locales ou d'autres s'opposaient à ce que les deux sortes de profils fussent levés simultanément, il serait bien simple, comme nous l'avons vu (29), de les rapporter après coup au même plan de comparaison. Enfin, quand les profils en travers doivent avoir une certaine étendue, il peut arriver qu'on soit dans l'impossibilité de les lever des stations du profil en long; on transporte alors le niveau sur ces profils eux-mêmes, et on les partage en autant de stations qu'il est nécessaire, comme pour un nivellement en long.

34. Les profils en travers, très-faciles à lever, parce qu'ils ont généralement peu d'étendue, demandent pourtant une assez grande attention, soit pour les rattacher au profil en long, soit pour éviter la confusion dans le grand nombre de leurs cotes; on facilite toutefois ce travail, en réunissant aussi les résultats de l'opération sur un registre spécial. Le carnet le plus simple et peut-être le plus commode est ici, comme pour les profils en longueur, un croquis coté fait sur place; on obtient ainsi une minute détaillée des profils en travers, comprenant à la fois les distances horizontales des points nivelés et les coups de niveau, parmi lesquels figure nécessairement le coup qui appartient au point correspondant du profil en long.

Rien n'empêche d'ailleurs de se servir aussi d'un registre à colonnes; ce registre peut et doit naturellement être moins compliqué que celui qui sert pour le profil longitudinal; d'une part, parce que le degré d'exactitude que nécessitent les deux séries d'opérations n'est pas le même, eu

Digitized by Google

égard à l'importance des erreurs possibles dans chaque cas; d'autre part, parce que, en raison même de cette première considération, les nivellements en travers s'exécutent le plus souvent au niveau d'eau. Le modèle suivant est fréquemment et avantageusement employé pour cet objet :

POINTS NIVELÉS. DÉSIGNATION.	Nos	CHAINAGE	COUPS de niveau	COTE CALCULÉE DU PLAN de visée de chaque profil.	COTE CALCULÉE de chaque POINT NIVELÉ par rapport au plan général de comparaison.	COTE CALCULÉE de chaque POINT NIVELÉ à partir de zéro sur l'axe.	OBSERVATIONS croquis, etc.
1	2	3	4	5	6	7	8
Profil nº I (altitude sur l'axe, 129m,293).							
.....	...	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Profil II (altitude sur l'axe, 129m,009).							
Point marqué par une † sur le bord du puits.....	3		m 0,96		m 129,789	m +0,78	
		m 4,25					
Pied du talus du jardin d'en haut....	2		2,04		128,709	−0,30	
		3,32					
Fond de l'ancien lit du ruisseau le Narais.....	1		2,59		128,159	−0,85	
		3,33					
Piquet d'axe.....	II		1,74	m 130,749	129,009	0,00	
		8,11					
Sur le bord du vieux chemin.....	1		3,01		127,739	−1,27	L'aqueduc à démolir fournira 6 belles dalles de grès. = Longueur. 1,10 Larg. moy^e 0,45 Epaisseur. 0,18
		5					
Sur l'axe de ce chemin.....	2		1,27		129,479	+0,47	
		3,50					
Bord intérieur du fossé.....	3		0,68		130,069	+1,06	
		4,10					
Seuil de la maison Bertrand.....	4		0,78		129,969	+0,96	
Profil III.....							

Ce tableau, sur lequel nous avons établi comme spécimen les calculs

Digitized by Google

relatifs à un profil en travers, est d'une intelligence facile : en partant du piquet d'axe qui porte toujours le numéro du profil lui-même, on trouve, en remontant, les divers points nivelés à droite et, en descendant, les points nivelés à gauche ; la colonne 3 présente en interlignes, sans incertitude possible, les distances de ces points entre eux, et la colonne 4 les coups de niveau donnés de la station sur chacun d'eux. Enfin, les colonnes 5, 6 et 7 servent à calculer les cotes cherchées, soit que l'on veuille rapporter ces cotes au plan général de comparaison du nivellement en long, soit que, comme il arrive souvent, on ait intérêt à les rattacher à un plan plus rapproché, quelquefois même au plan horizontal variable qui est déterminé par la rencontre de chacun d'eux avec le profil en long ; c'est alors le cas de distinguer (25) par les signes + et — les cotes respectivement situées au-dessus et au-dessous de ce plan auxiliaire.

Dans la première de ces deux hypothèses, on commence par répéter, dans la sixième colonne, vis-à-vis le piquet d'axe, sa cote rappelée à la suite de la désignation du profil en travers ; en ajoutant à cette cote le coup de niveau donné sur ce même piquet, on obtient la cote du plan de visée. Il ne reste plus alors qu'à retrancher de cette dernière chacun des autres coups de niveau, pour avoir les cotes des autres points que l'on inscrit à leurs places respectives, dans la colonne 6.

Si, au contraire, on adopte le plan de comparaison variable, on laisse en blanc les colonnes 5 et 6 ; on inscrit dans la septième la cote zéro, en regard du piquet d'axe et, en regard de chacun des autres points, la différence entre le coup de niveau correspondant et le coup de niveau sur l'axe, cette différence étant affectée du signe + pour les coups plus petits que celui de l'axe, et du signe — pour ceux qui lui sont supérieurs.

Il est toujours entendu que les indications d'additions et de soustractions qui précèdent devraient être renversées, s'il s'agissait d'un nivellement rapporté à un plan de comparaison situé au-dessus de tous les points considérés.

35. Nous avons expliqué ci-dessus (32) comment on construit sur le papier un profil en long ; nous devons ajouter que, à moins qu'il ne soit question de quelque ouvrage d'art important, ou que quelque circonstance particulière oblige à agir autrement, il est complétement inutile et souvent même nuisible de rapporter les cotes verticales et les distances horizontales à la même échelle. En effet, le but que l'on se propose est de rendre sensibles aux yeux les inégalités du sol ; or, on obtient bien mieux ce résultat en donnant à ces inégalités des dimensions doubles, quintuples et même décuples de celles qui résulteraient de l'adoption d'une échelle unique.

D'un autre côté, pour ménager la place, on peut, sans changer la forme du profil, en diminuer graphiquement toutes les cotes d'une même quan-

Digitized by Google

tité. Il convient alors de les laisser numériquement entières, principalement lorsque le nivellement se rapporte à des repères connus dont il y aurait inconvénient à ne pas conserver la cote.

Les profils en travers se construisent de la même manière que le profil en long. On peut les faire avec une ou deux échelles, suivant l'usage auquel ils sont destinés; comme ils sont ordinairement nombreux et dessinés en regard des points du profil en long auxquels ils correspondent, on prend souvent, pour éviter la confusion, le parti de les rapporter, comme nous l'avons expliqué plus haut (34), au plan horizontal variable qui est déterminé par le piquet d'axe : dans ce dernier cas, la cote sur l'axe est nécessairement toujours égale à zéro.

36. Après avoir ainsi tracé, sur la zone de terrain que l'on a intérêt à étudier, un profil en long et une série de profils transversaux dans chacun desquels la ligne courbe et ondulée du sol est remplacée par une ligne polygonale qui s'en écarte le moins possible, on complète la définition en considérant la portion du terrain comprise entre deux profils en travers consécutifs, comme représentée par la surface qu'engendrerait une droite s'appuyant constamment sur ces deux profils en restant dans un plan vertical parallèle à l'axe du tracé, quand celui-ci est droit. Lorsqu'il est courbe, on conçoit la génératrice du terrain comme étant toujours située dans une surface cylindrique verticale ayant pour base une courbe parallèle audit axe; cette génératrice est alors une hélice, qui se transforme ensuite en ligne droite quand on développe sur un plan la surface cylindrique qui la contient.

On voit que l'on obtiendra, par un tel mode, des résultats d'autant plus exacts qu'on aura choisi plus judicieusement la position des profils transversaux, qu'on aura multiplié davantage ces profils, et qu'on aura défini ces profils eux-mêmes par un plus grand nombre de points convenablement déterminés.

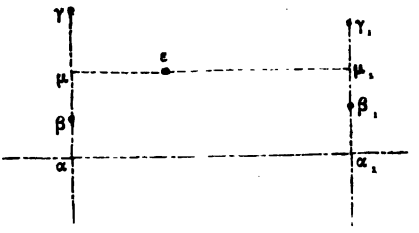
37. Nous avons dit (32) que les lignes d'opérations suivant lesquelles se levait le profil en long étaient des lignes droites qui étaient choisies de prime abord comme paraissant s'écarter peu de l'axe du tracé futur, quand il s'agit d'un projet. Il arrive en effet presque toujours que des considérations, qui surgissent plus tard de l'étude des conditions spéciales de la question, montrent qu'il y aurait avantage à reporter l'axe du tracé un peu à droite ou un peu à gauche de la ligne primitivement et provisoirement adoptée; la définition ci-dessus donnée des surfaces que l'on suppose représenter le terrain et la connaissance des profils en travers, s'ils sont convenablement levés et rapportés, permettent d'effectuer ce changement sans recourir à un nouveau nivellement. Cette remarque est, dans tous les cas, d'une application directe au raccordement des alignements droits par des courbes qui s'éloignent nécessairement plus ou moins de

Digitized by Google

leurs tangentes, et il faut alors calculer les cotes des points du tracé curviligne au moyen de celles que fournissent les premiers profils, pourvu toutefois que les nouveaux points ne soient pas trop éloignés, et qu'on puisse les supposer, sans erreur sensible, situés dans les surfaces réglées que détermine le nivellement effectué.

Voici comment on doit procéder pour faire ce calcul :

Fig. 18.

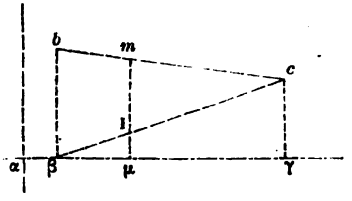


Soient $\alpha\alpha_1$ la trace du profil en long sur le plan horizontal de comparaison, $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ celles de deux profils en travers consécutifs entre lesquels est situé le point e projeté lui-même en ε, et dont on veut calculer la cote $e\varepsilon$.

Faisons passer par l'ordonnée $e\varepsilon$ un plan parallèle à celui qui projette l'axe du profil en long; ce plan coupe les deux profils transversaux suivant deux autres ordonnées $m\mu$, $m_1\mu_1$, et sa trace est $\mu\mu_1$.

Pour avoir la cote $e\varepsilon$ cherchée, nous déterminerons d'abord les deux cotes $m\mu$ et $m_1\mu_1$, au moyen des deux cotes voisines dans leurs profils en travers respectifs; puis, ces deux quantités nous serviront directement au calcul de $e\varepsilon$.

Fig. 19.



Cherchons donc la cote $m\mu$ projetée en μ sur le profil en travers $\alpha\beta\gamma$, que représente la *fig.* 19. Au moyen de la droite βc nous partageons $m\mu$ en deux parties $I\mu$ et mI, faciles à calculer séparement; car les parallèles $b\beta$, $m\mu$ et $c\gamma$ donnent :

d'une part, $\quad I\mu : c\gamma :: \beta\mu : \beta\gamma$,

d'autre part, $\quad mI : b\beta :: Ic : \beta c :: \gamma\mu : \beta\gamma$;

et ces deux proportions donnent

$$I\mu = \frac{c\gamma \times \beta\mu}{\beta\gamma}, \qquad mI = \frac{b\beta \times \gamma\mu}{\beta\gamma}.$$

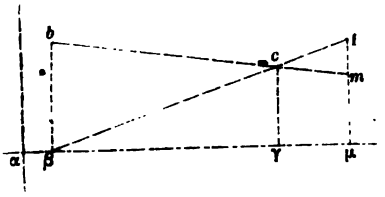
On en conclut, par conséquent,

$$m\mu = \frac{c\gamma \times \beta\mu + b\beta \times \gamma\mu}{\beta\gamma}.$$

Il est évident que, si le point e se trouvait placé de telle sorte que la trace $\mu\mu_1$ tombât en dehors de la projection γ du dernier point nivelé

Digitized by Google

Fig. 20.



dans le profil transversal, la cote $m\mu$ s'obtiendrait par la différence des deux longueurs $l\mu$ et ml; on aurait alors

$$m\mu = \frac{c\gamma \times \beta\mu - b\beta \times \gamma\mu}{\beta\gamma}.$$

La cote $m_1\mu_1$ du point m_1 s'obtiendra par le même procédé sous la forme

$$m_1\mu_1 = \frac{c_1\gamma_1 \times \beta_1\mu_1 \pm b_1\beta_1 \times \gamma_1\mu_1}{\beta_1\gamma_1},$$

et celle du point e résultera de même d'un calcul tout à fait pareil aux précédents; son expression sera

$$e\varepsilon = \frac{m_1\mu_1 \times \mu\varepsilon \pm m\mu \times \mu_1\varepsilon}{\mu\mu_1},$$

le signe — se rapportant au cas où la projection ε tomberait au dehors de la zone limitée par les deux profils transversaux au moyen desquels on veut déterminer la nouvelle cote.

Lorsque l'axe est courbe, la solution qui précède ne cesse pas d'être applicable, pourvu que l'on prenne les longueurs $\mu\varepsilon$ et $\mu_1\varepsilon$ sur une courbe qui soit parallèle à cet axe.

PLANS COTÉS.

38. Ainsi que nous l'avons exposé (31), on peut rapporter un nivellement sans le secours de profils, en inscrivant sur le plan des lieux la cote de chaque point auprès de sa projection. Ce procédé est même, dans quelques circonstances, le seul que l'on puisse employer; il est principalement usité pour certains détails qui se décrivent mieux par la projection de leurs contours que par une élévation; tels sont les ruisseaux d'écoulement qui reçoivent les eaux des chaussées dans les rues des villes et villages, les trottoirs, les entrées des maisons, et, en général, tous les ouvrages qui occupent sur le plan un espace considérable en s'écartant peu du niveau du sol.

Pour que l'on puisse facilement déduire d'un plan nivelé et coté le profil du terrain dans toutes les directions, et c'est là un des principaux avantages de l'emploi de ce système, il faut choisir, pour les niveler, tous les points saillants ou sensiblement déprimés, en un mot tous les points remarquables et propres à faire concevoir plus nettement la forme du sol ou des ouvrages qui le recouvrent. La marche à suivre dans ce travail n'est d'ailleurs pas, comme on le comprend, la même que dans le cas où l'on veut avoir des profils en long et en travers; elle ne consiste plus à

Digitized by Google

porter des coups de niveau dans deux directions principales, mais à faire, de chaque station convenablement choisie, un tour d'horizon en rayonnant dans tous les sens. On obtient ainsi une suite de nivellements partiels embrassant divers groupes de points et rapportés à autant de plans particuliers; il suffit alors que deux groupes consécutifs aient un point commun, pour qu'on soit à même de les rapporter tous à un plan général de comparaison, suivant la méthode exposée plus haut: telle est, par conséquent, la condition qu'il faut remplir dans une pareille opération, et qui permet d'en coordonner tous les résultats.

39. Il peut sembler que le plan ou croquis des lieux sur lequel seraient inscrits les coups de niveau, devrait suffire pour recueillir convenablement les éléments qui entrent dans la composition d'un plan coté; mais on remarquera que, pour peu que les points nivelés soient nombreux, il résulterait nécessairement de l'inscription immédiate des résultats sur le plan une confusion de nombres nuisible à la clarté et à l'intelligence de l'opération. Un pareil plan ou croquis-minute suffit à peine à recevoir sur le terrain l'indication de chaque point nivelé avec la lettre qui sert à le désigner, l'emplacement du niveau et les divers rayons de visée, et il est de toute nécessité que l'observateur soit muni d'un carnet de nivellement, comme pour lever des profils en long et en travers; la forme ci-dessous nous paraît satisfaire à tous les besoins de cette opération.

Digitized by Google

N^os des stations.	POINTS nivelés.	COUPS DE NIVEAU élémentaires.	COUPS DE NIVEAU moyens.	COTES CALCULÉES du plan de visée de chaque station.	COTES CALCULÉES de chaque point	OBSERVATIONS.
					m	
	*a**	1,070 1,064	1,067		127,412	* Repère pris sur le dessus de la plinthe du pont Napoléon.
	b	1,727 1,723	1,725	m	126,754	
I	*c*	1,489 1,496	1,493	128,479	126,986	
	d	1,911 1,912	1,912		126,567	
	d	0,474 0,478	0,476		126,567	Sur le socle de la croix de fer.
	e	0,584 0,594	0,589		126,454	
II	*f*	2,259 2,254	2,257	127,043	124,786	
	g	1,529 1,538	1,534		125,509	
	h	1,656 1,650	1,653		125,390	Socle de la maison d'école, angle nord.
	h	3,343 3,349	3,346		125,390	
III	*i*	1,406 1,407	1,407	128,736	127,329	
	k	0,579 0,583	0,581		128,155	
	k	1,137 1,143	1,140		128,155	Dessus du bajoyer de l'écluse.
	l	2,425 2,432	2,429		126,866	
	m	3,189 3,179	3,184		126,111	Repère n° 47 du canal latéral.
IV	*n*	0,464 0,468	0,466	129,295	128,829	
	o	1,395 1,390	1,393		127,902	
	p	2,065 2,069	2,067		127,228	Sur la borne n° 97 du canal.
	p	0,604 0,613	0,609		127,228	
V	*q*	2,318 2,310	2,314	127,837	125,523	
	r	1,539 1,535	1,537		126,300	
	etc.	etc.	.....	etc.	.....	

Digitized by Google

Comme on le voit, ce tableau diffère du premier en ce que : 1° il est divisé en stations; 2° il fournit les altitudes des divers points au moyen de celle du plan de visée relatif à chaque station.

La division par stations est indispensable pour la clarté et surtout pour la vérification ultérieure des opérations : les points nivelés de chacune d'elles sont ainsi réunis par groupes séparés, et la reproduction d'une même lettre dans deux groupes contigus indique sans ambiguïté le point qui leur est commun.

Nous avons supposé, et c'est en général ce qu'il convient de faire, que le point de départ du nivellement était un repère dont l'altitude était déterminée et connue d'avance; le coup de niveau donné sur ce repère a fixé la cote du premier plan de visée, et la cote de chacun des autres points nivelés de cette station a été obtenue en retranchant le coup de niveau correspondant de l'altitude du plan de visée. La dernière cote de chaque station étant nécessairement la première de la station suivante, le calcul, pour chacune d'elles, s'est effectué de la même manière que pour la station de départ. Enfin, la dernière colonne est destinée à recevoir toutes les remarques utiles, et, entre autres, l'exacte désignation des points de station, des repères, des points communs à deux stations, etc.

Il est inutile d'ajouter encore une fois que la marche serait la même, s'il s'agissait de rapporter les cotes à un plan de comparaison supérieur, si ce n'est qu'au lieu de retrancher chaque coup de niveau de la cote du plan de visée pour avoir celle du point correspondant, il faudrait ajouter l'une à l'autre ces deux quantités.

40. L'usage s'est établi d'écrire, sur les plans cotés, chaque cote de nivellement entre parenthèses. Cette précaution a pour but d'empêcher que l'on ne confonde ces cotes avec celles des distances horizontales, quand il s'en trouve de cette dernière espèce sur le plan; mais on peut s'en affranchir dans beaucoup de cas, attendu que le point auprès duquel la cote verticale est inscrite en désigne suffisamment la signification.

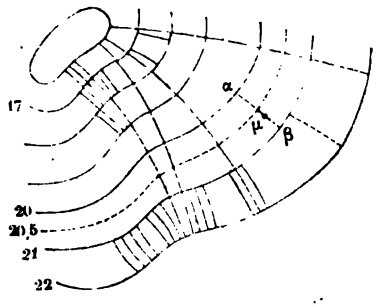
41. L'emploi d'une seule projection et d'une ordonnée pour définir un point de l'espace constitue, aussi bien que les deux projections de la Géométrie descriptive, un système complet de représentation des objets sur un plan; on y établit de la manière la plus simple les éléments propres à déterminer les lignes et les surfaces, notamment les droites et les plans, et l'on résout facilement la même série de problèmes que nous avons déjà étudiés par la méthode des projections. Il serait d'autant moins utile de nous arrêter de nouveau sur ces questions, que l'emploi des plans cotés est fort restreint dans le service des Ponts et Chaussées, et n'y trouve guère de place que dans quelques cas rares où l'on a besoin de reproduire le relief de la surface du terrain. C'est à ce dernier point de vue seulement que nous allons ajouter quelques mots à ce qui précède.

Digitized by Google

42. La surface du sol, avec ses accidents variés et variables, n'est pas susceptible d'une définition rigoureuse et géométrique. Voici le procédé auquel on a recours pour la représenter : on suppose cette surface coupée par une série de plans horizontaux que, pour plus de simplicité, on prend *équidistants* entre eux, et l'on projette les courbes d'intersection, que l'on désigne sous le nom de *courbes de niveau*, en attachant à chacune d'elles la cote de hauteur commune à tous ses points. On remplit alors ce premier canevas en considérant une zone superficielle quelconque, comprise entre deux courbes de niveau consécutives, comme engendrée par une droite qui glisserait sur ces deux lignes en demeurant constamment dans un plan perpendiculaire à l'une d'elles, à la courbe inférieure, par exemple.

Il faudrait, on le conçoit, un nombre infini de sections horizontales pour donner ainsi la forme exacte et rigoureuse du terrain; mais il est clair aussi qu'il est possible de se tenir bien au-dessous de cette limite, tout en satisfaisant complétement aux besoins pratiques.

Fig. 21.



Quand les courbes de niveau sont assez rapprochées, on peut regarder la génératrice rectiligne de chaque zone comme sensiblement perpendiculaire en même temps à la courbe inférieure et à la courbe supérieure; s'il en est autrement, on remplace la droite génératrice par une courbe variable qui, dans chacune de ses positions, satisfait à cette double condition, et l'on se trouve alors dans le même cas que si l'on avait intercalé de nouvelles courbes de niveau, assez voisines les unes des autres pour que les arcs de la génératrice curviligne se confondissent avec leurs cordes.

Imaginons maintenant que, à partir d'un point donné de la surface, on trace une normale à la courbe inférieure; que, du pied de cette normale, on en mène une autre à la seconde courbe, et ainsi de suite. L'ensemble de ces normales formera un polygone qui représente, ainsi que nous le verrons bientôt, ce que l'on nomme la *ligne de plus grande pente* de la surface relativement au point de départ. Cette ligne serait elle-même une courbe continue, si la surface était continue, et divisée en une infinité de zones infiniment minces.

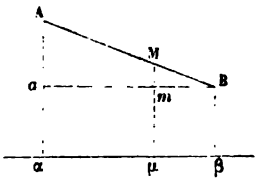
Les lignes de plus grande pente sont employées en topographie pour exprimer sous forme de hachures plus ou moins longues, plus ou moins épaisses, le relief des accidents du terrain, et notamment les montagnes.

Digitized by Google

43. Il nous reste à faire voir comment, sur une surface donnée par les projections cotées d'un système de courbes de niveau (*fig.* 21), il est possible de *trouver la cote d'un point donné par sa projection*, et réciproquement *trouver la projection d'un point dont la cote est connue*.

Dans le premier cas, soit μ la projection donnée, par laquelle nous ferons passer la génératrice normale correspondante; les extrémités de cette dernière auront des cotes connues qui seront respectivement celles des deux courbes de niveau. Représentons dans la figure ci-contre la coupe faite dans le terrain par le plan projetant de la génératrice; les cotes $A\alpha$ et $B\beta$ sont connues, ainsi que les longueurs $\alpha\mu$, $\beta\mu$ déterminées par la position donnée du point μ, et les parallèles $A\alpha$ et $M\mu$ donneront la proportion

Fig. 22.



$$\alpha B : Bm :: A\alpha : Mm,$$

ou

$$\alpha\beta : \beta\mu :: A\alpha - B\beta : Mm,$$

de laquelle on tirera Mm pour l'ajouter ensuite à la cote $B\beta$.

Si c'est au contraire la cote $M\mu$ qui est donnée, on en retranchera $B\beta$ pour avoir Mm, et l'on tirera $\beta\mu$ de la même proportion que ci-dessus.

Comme exemple de l'un de ces problèmes, supposons que le point dont on cherche la projection ait la cote $20^m,7$, et que la génératrice normale qui contient cette projection ait en plan horizontal une longueur de $1^m,30$; nous aurons à résoudre la proportion

$$1^m,30 : \beta\mu :: 1^m : 0^m,3,$$

qui donne

$$\beta\mu = 0^m,39.$$

On voit que ce procédé fournit le moyen d'intercaler de nouvelles courbes de niveau entre celles qui sont primitivement données.

TRACÉ DES PROFILS SUR LE TERRAIN.

INDICATION DES POINTS DE HAUTEUR POUR LES DÉBLAIS ET LES REMBLAIS.

44. Le mode de description de la surface des ouvrages de terrassement projetés est semblable à celui que nous avons admis (36) pour la surface du terrain; c'est-à-dire que toute section faite, entre deux profils transversaux, par un plan vertical ou généralement par une surface parallèle à l'axe, est une ligne droite ou une hélice.

Digitized by Google

Nous supposerons donc que, par des considérations étrangères à l'objet de ce livre, l'ingénieur ait fait tracer sur chacun des profils en long et en travers du terrain naturel les contours en relief ou en creux, en *remblai* ou en *déblai*, qui doivent être donnés au sol pour l'exécution des travaux, lesdits contours étant aussi reliés au plan de comparaison par des cotes assez nombreuses pour déterminer complétement leur forme et leur position. On conçoit dès lors que les masses de terre qui doivent être rapportées ou enlevées pour donner au terrain la forme qui lui est assignée par le projet, sont limitées, dans chaque intervalle compris entre deux profils transversaux consécutifs, par des surfaces réglées, gauches ou planes, et que les volumes de ces masses peuvent être évalués, comme nous le verrons bientôt, par les procédés de la géométrie ordinaire, avec le degré d'exactitude que comportent, d'une part, la précision des opérations sur le terrain, d'autre part, le temps que l'on veut ou que l'on peut consacrer à ces calculs.

Nous avons montré de plus (37) comment on peut déterminer des hauteurs de remblai ou de déblai autres que celles qui résultent immédiatement des profils du terrain et du projet, et même construire à volonté de nouveaux profils; lorsque l'on s'est ainsi procuré les épaisseurs des tranches de terre à rapporter ou à enlever en chaque point ou, en d'autres termes, les cotes de remblai et de déblai, le premier soin à prendre, au moment de mettre la main à l'œuvre pour l'exécution, est de tracer ces divers profils sur le terrain, tant en ce qui concerne leur position en plan que pour fixer les *points de hauteur* des ouvrages à exécuter.

Cette opération est aussi simple dans ses procédés qu'elle est délicate quant aux conséquences que peut avoir la moindre fraude ou la moindre erreur; elle se réduit à planter des piquets dont la tête soit élevée au-dessus de terre ou abaissée au-dessous, conformément à des cotes connues.

45. Quelquefois un piquet est destiné à marquer un point trop élevé au-dessus de la surface du sol pour qu'il soit facile d'en assurer la stabilité; alors on retranche de sa hauteur totale un nombre exact de décimètres et, sur la portion laissée hors de terre, on marque ce même nombre de décimètres. Il importe, dans tous les cas, que les piquets plantés puissent être retrouvés; le meilleur moyen pour assurer ce résultat serait encore de les enfoncer jusqu'à ce que leur tête affleurât le sol: trop basse, elle deviendrait facilement invisible; trop haute, elle attirerait l'attention des gens malveillants. D'ailleurs, nous l'avons déjà dit (*Lever des Plans*, 64), le *piquetage* est une opération qui demande le soin le plus scrupuleux : ses résultats, dans l'exécution des travaux, embrassent des intérêts nombreux et souvent opposés; elle doit donc être toujours contradictoire entre les entrepreneurs chargés de construire et les agents de l'administration qui doivent surveiller et diriger la construc-

Digitized by Google

tion ; par suite, il est d'usage d'en consigner les détails dans un procès-verbal qui doit renfermer des indications précises sur l'emplacement et la hauteur des piquets principaux et sur les repères invariables auxquels chacun d'eux a été rattaché tant en plan qu'en nivellement.

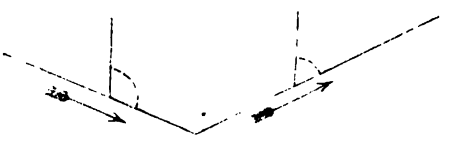
Pour l'exécution d'un ouvrage important, on se sert, au lieu de piquets, de bornes de pierres scellées dans de la maçonnerie : cette précaution, que l'on ne prend du reste que pour les points les plus importants, est surtout utile lorsque les travaux doivent durer pendant plusieurs années ou ne commencer qu'après un certain délai ; on grave sur la tête de chacune de ces bornes la hauteur du point de l'ouvrage auquel elle correspond.

NIVEAU DE PENTE DE CHÉZY.

NOTIONS SUR LES PENTES ET LES RAMPES.

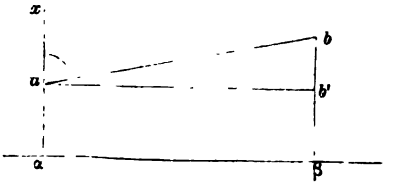
46. Lorsqu'un mobile parcourt une ligne droite inclinée à l'horizon, on dit qu'il *descend*, qu'il franchit une *pente*, si la partie de cette droite qu'il a devant lui fait un angle obtus avec la verticale du point où il se trouve ; on dit de même qu'il *monte* et gravit une *rampe* ou *contre-pente*, si cet angle est aigu. Il est clair que, quand le sens du mouvement vient à changer, les pentes deviennent des rampes et réciproquement, ainsi qu'il arrive sur une route que deux voyageurs parcourent en sens inverse : les rampes que l'un rencontre sont autant de pentes pour l'autre.

Fig. 23.



On emploie toutefois aussi le mot *pente* dans un sens plus absolu, et l'on dit qu'une droite ab, dont l'extrémité b est plus élevée de bb' que l'extrémité a, quel que soit d'ailleurs le sens du mouvement, présente de a en b une *inclinaison* ou *pente totale* égale à bb', et une *pente par mètre* exprimée par $\frac{bb'}{ab'}$ ou $\frac{bb'}{\alpha\beta}$; cette fraction n'est autre chose que la cotangente de l'angle bax que fait la droite donnée avec la verticale, ou la tangente de l'angle bab' qu'elle fait avec l'horizontale.

Fig. 24.



Soient, par exemple, $a\alpha = 5^m,79$, $b\beta = 6^m,77$ et $\alpha\beta = 28^m$; la pente totale de a en b sera $6^m,77 - 5^m,79$ ou $0^m,98$, et la pente par mètre,

Digitized by Google

que nous désignerons par p, sera $\frac{0^m,98}{28}$ ou $0^m,035$; ce qu'on exprime en disant que la pente de la droite *ab* est de 35 millimètres par mètre.

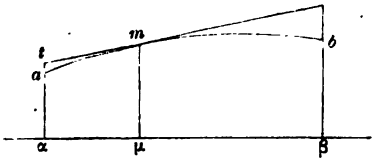
En général, les quatre quantités $\alpha\beta$, $a\alpha$, $b\beta$ et p sont liées par la relation

$$b\beta - a\alpha = \alpha\beta \times p,$$

qui sert à déterminer l'une quelconque d'entre elles, quand les trois autres sont connues.

On peut encore, et c'est l'ordinaire, désigner dans une même expression la position de la droite par rapport au sens du parcours et le taux de son inclinaison en disant, selon les cas, *rampe* ou *pente* de *tant* par mètre.

Fig. 25.



Si la ligne dont il s'agit n'est pas droite, on entend par pente en un point quelconque *m* de sa longueur, celle de la tangente *tm* menée à la courbe en ce point ; d'où il suit que la pente le long d'une courbe est nécessairement variable d'un point au suivant.

47. Quand un plan est incliné à l'horizon, on peut mener dans ce plan, par l'un quelconque de ses points, une infinité de droites qui sont toutes diversement inclinées à l'horizon, et la Géométrie enseigne que, parmi toutes ces lignes, celle qui fait avec l'horizon un angle maximum, celle dont la pente par mètre est la plus grande, la *ligne de plus grande pente* en un mot, est celle qui est dirigée perpendiculairement au système des horizontales du plan ; c'est la pente de cette ligne qui mesure la pente du plan.

Dans une surface courbe, la pente en chacun de ses points est celle de son plan tangent ; elle est donc égale à celle de la droite menée, dans ce plan, au point que l'on considère, normalement à la section déterminée dans la surface par un plan horizontal issu de ce point. De là le nom de *ligne de plus grande pente* que prend la ligne tracée sur une surface de manière à couper à angle droit toutes les sections horizontales.

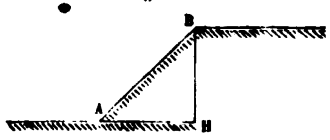
48. Lorsque l'inclinaison de certaines surfaces, planes ou courbes, est assez considérable, comme dans les parois latérales d'un fossé, dans la surface qui limite le déblai ou le remblai d'une route, etc., on lui donne le nom de *talus*, et plus particulièrement encore celui de *fruit*, quand il s'agit d'un mur à face inclinée.

L'usage a prévalu de mesurer les talus en comparant non plus la hauteur à la base, comme on le fait pour les pentes, mais la base à la hauteur. Ainsi un talus AB, qui se projette horizontalement en AH, se mesure par

Digitized by Google

la valeur du quotient $\frac{AH}{BH}$, et, suivant les longueurs relatives de la base AH et de la hauteur BH, ce talus sera de *un et demi de base pour un de hauteur, un de base pour un de hauteur, un demi de base pour un de hauteur*, etc.

Fig. 26.



Remarquons en passant que le talus de un et demi de base pour un de hauteur, ou de trois de base pour deux de hauteur, est celui qui est généralement assigné aux terres rapportées en remblai, et que le talus de un pour un, correspondant à une inclinaison de 45 degrés, est celui des tranchées ou déblais.

Il est évident d'ailleurs que le talus et la pente d'une surface sont deux quantités inverses l'une de l'autre, puisque l'un a pour mesure $\frac{AH}{BH}$ et l'autre $\frac{BH}{AH}$; la première de ces quantités peut donc facilement se déduire de la seconde, et réciproquement.

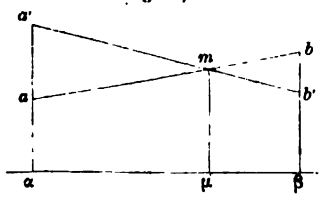
Quant au fruit d'un mur, il s'exprime en fraction de la hauteur, et l'on dit qu'il est de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, etc., quand la projection de la partie inclinée, ou l'empattement, est égale à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, etc., de la hauteur.

49. Ces définitions étant bien comprises, nous allons résoudre une question qui s'y rattache directement, et qui est d'une application fréquente.

Deux profils rectilignes ab, $a'b'$ étant donnés par les cotes de leurs points extrêmes qui sont projetés deux à deux sur les mêmes points donnés α, β, trouver 1° la position, 2° la cote du point de rencontre m de ces profils.

Remarquons, pour cela, que le point m appartenant aux deux profils donnés, sa cote μm satisfait nécessairement, dans chacun de ces profils, à la relation finale du n° 37, abstraction faite du signe — du numérateur, lequel correspond au cas où le point considéré se trouve en dehors des limites des profils; il en résulte que l'on a

Fig. 27.



dans le premier profil..... $\mu m = \frac{a\alpha \times \beta\mu + b\beta \times \alpha\mu}{\alpha\beta}$,

dans le second..... $\mu m = \frac{a'\alpha \times \beta\mu + b'\beta \times \alpha\mu}{\alpha\beta}$.

Digitized by Google

Or, l'égalité de ces deux expressions de μm conduit à la relation

$$a\alpha \times \beta\mu + b\beta \times \alpha\mu = a'\alpha \times \beta\mu + b'\beta \times \alpha\mu,$$

dans laquelle $\beta\mu$ et $\alpha\mu$ sont les quantités qu'il faut déterminer pour fixer le point m.

Remplaçant donc l'une d'elles, $\beta\mu$ par exemple, par son expression tirée de

$$\beta\mu + \alpha\mu = \alpha\beta,$$

nous obtenons sur-le-champ

$$a\alpha\,(\alpha\beta - \alpha\mu) + b\beta \times \alpha\mu = a'\alpha\,(\alpha\beta - \alpha\mu) + b'\beta \times \alpha\mu,$$

d'où, toute réduction faite,

$$\alpha\mu = \frac{a'\alpha - a\alpha}{(a'\alpha - a\alpha) + (b\beta - b'\beta)} \times \alpha\beta.$$

On aurait de même

$$\beta\mu = \frac{b\beta - b'\beta}{(a'\alpha - a\alpha) + (b\beta - b'\beta)} \times \alpha\beta.$$

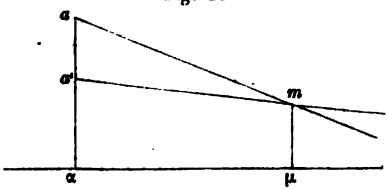
Quant à la cote μm elle-même, la substitution des valeurs trouvées pour $\alpha\mu$ et $\beta\mu$ dans l'une quelconque des deux expressions transcrites plus haut, fournit, après réduction, la valeur suivante :

$$\mu m = \frac{a'\alpha \times b\beta - a\alpha \times b'\beta}{(a'\alpha - a\alpha) + (b\beta - b'\beta)}.$$

50. Supposons maintenant que, au lieu d'être connu par deux de ses points, chacun des deux profils soit donné par un seul point et par le taux de sa pente, et cherchons encore, dans ce cas, la position et la cote du point de rencontre.

Soient donc $a\alpha$, $a'\alpha$ les cotes des deux points a et a' situés sur la même verticale, dans deux profils dont les pentes par mètre sont respectivement p et p', et cherchons à déterminer leur point de rencontre m par sa cote μm et sa distance horizontale $\alpha\mu$ au point a.

Fig. 28.



La relation du n° 45, appliquée successivement aux deux profils auxquels appartient également le point m, nous donnera d'une part,

$$a\alpha - \mu m = \alpha\mu \times p,$$

d'autre part,

$$a'\alpha - \mu m = \alpha\mu \times p',$$

et, en résolvant ces deux équations dans lesquelles μm et $\alpha\mu$ sont les deux

Digitized by Google

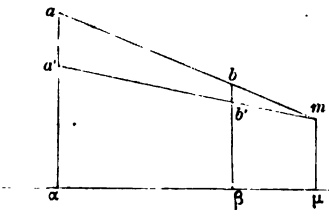
inconnues, on trouve

$$\alpha\mu = \frac{a\alpha - a'\alpha}{p - p'}, \quad \mu m = \frac{a'\alpha \times p - a\alpha \times p'}{p - p'}.$$

51. Nous ajouterons quelques observations sur les solutions des deux numéros qui précèdent.

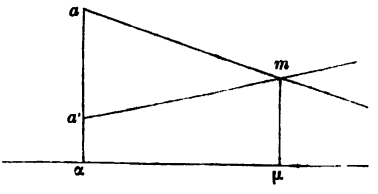
1°. Il pourrait arriver que les deux profils donnés fussent tels que leur point de rencontre se trouvât en dehors des verticales projetées en α et β; dans ce cas, représenté par la figure ci-contre, les calculs s'opéreraient tout à fait de la même manière; seulement la relation de départ serait modifiée en ce sens que l'on donnerait le signe — à la distance $\beta\mu$ (48), laquelle doit être retranchée de $\alpha\mu$, au lieu de lui être ajoutée, pour former $\alpha\mu$.

Fig. 29.



2°. Dans le cas où les deux profils sont donnés chacun par un point et sa pente, la solution serait la même que celle du n° 48, si l'on voulait commencer par calculer les cotes des deux profils pour une même distance horizontale arbitrairement choisie. Mais la marche directe que nous avons indiquée est de beaucoup la plus simple; elle conduit à la solution de tous les problèmes de cette nature. Seulement, il faut faire attention que quand, au lieu de deux profils inclinés dans le même sens, on cherche la rencontre d'une pente et d'une rampe, la différence $p - p'$ doit être remplacée par une somme; car la différence des cotes des deux profils pour chaque mètre de distance horizontale se compose alors de l'abaissement correspondant à la pente et de l'élévation due à la rampe, et il est évident que ces deux quantités s'ajoutent. On est du reste averti de cette circonstance par les deux équations de départ, dans l'une desquelles la différence qui constitue le premier membre change de signe et prend alors la forme

Fig. 30.



$$\mu m - a'\alpha = \alpha\mu \times p',$$

ou plutôt

$$\mu m - a'\alpha = \alpha\mu \times r,$$

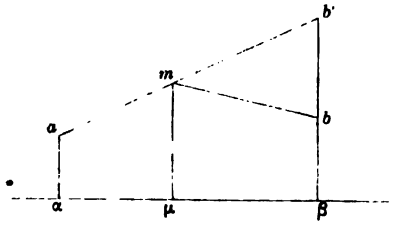
si l'on convient d'indiquer par r les inclinaisons en rampe, par opposition à celles en pente auxquelles reste spécialement affectée la lettre p.

3°. Lorsque les points extrêmes des profils ne sont pas donnés sur les

Digitized by Google

mêmes verticales, circonstance qui se présente assez souvent, on peut encore facilement en trouver le point de rencontre. Il suffit pour cela de chercher sur les verticales de l'un des profils les cotes des points qui appartiennent au second, et alors les solutions qui précèdent deviennent applicables. Si, par exemple, on voulait trouver la rencontre des deux profils *am* et *bm*, on prolongerait l'un d'eux *am* jusqu'à la rencontre en b' de la verticale $b\beta$; on aurait donc d'abord à calculer $b'\beta$, et l'on rentrerait dans le cas examiné.

Fig. 31.

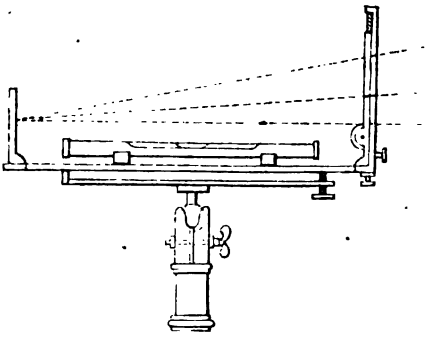


4°. Enfin, s'il arrivait que l'un des profils fût donné par deux cotes et l'autre par une cote et sa pente, il est évident qu'il faudrait opter entre les deux méthodes et ramener l'un des profils au système de détermination de l'autre. Ceci trouve notamment son application dans la recherche du point d'intersection d'un talus projeté avec le profil du terrain, question qui se rencontre à chaque instant dans les calculs relatifs aux plans parcellaires (78) et qui, comme on le voit, n'est qu'un cas particulier des problèmes que nous venons de résoudre.

DESCRIPTION ET USAGE DU NIVEAU DE PENTE.

52. On donne généralement le nom de *niveau de pente* à des instruments qui ont pour objet de diriger le rayon visuel, non plus horizontalement, mais dans une direction inclinée à l'horizon, en un mot, suivant une pente assignée d'avance ou qui doit être déterminée. Il en existe plusieurs, qui diffèrent notablement les uns des autres quant à leurs dispositions; celui que nous allons décrire, le niveau de pente de Chézy, se compose d'une règle supportant en son milieu une bulle d'air, et à ses extrémités deux pinnules verticales et de hauteurs inégales, lesquelles sont destinées à diriger le rayon visuel incliné. Le tout est d'ailleurs porté par une autre règle fixée sur le pied de l'instrument, et sur laquelle la première est articulée à charnière et calée par une

Fig. 32.



Digitized by Google

vis: Cette disposition et la présence de la bulle permettent de placer sans aucune difficulté le système dans la position horizontale qu'il doit nécessairement avoir pour donner l'indication de pente qu'il comporte.

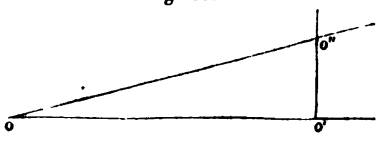
Les pinnules (*voir* le dessin complet de l'instrument, *Pl. III, fig.* 10, 11 et 12) sont deux cadres rectangulaires renfermant deux châssis qui, maintenus à coulisses, peuvent se mouvoir dans le sens vertical. Celui qui correspond à la grande pinnule reçoit directement le mouvement de la main à l'aide d'un bouton et, pour les petites variations, au moyen d'une vis sans fin qui, prise à ses extrémités dans deux collets, tourne sur elle-même sans avancer; c'est par conséquent le châssis qui est entraîné et qui se meut verticalement.

Le deuxième châssis n'est susceptible que d'un déplacement très-restreint qui peut s'opérer, comme pour le premier, au moyen d'une vis verticale, laquelle n'est d'ailleurs mise en jeu que dans les vérifications de l'instrument.

Chaque châssis porte des fils croisés et un petit trou rond évasé en cône intérieurement; c'est au sommet de ce cône que l'observateur applique l'œil pour viser, et l'oculaire ou le trou de chacune des pinnules correspond exactement à la croisée des fils de l'autre, de manière à donner deux rayons visuels situés dans des plans verticaux parallèles.

53. L'un des côtés du cadre de la grande pinnule porte une échelle divisée, et un index marqué sur le châssis mobile fait connaître l'inclinaison du rayon visuel. La construction de cette échelle est des plus simples, après ce qui a été dit des pentes au n° 46. Il suffit évidemment de rendre le rayon visuel oo' horizontal, la bulle étant entre les repères; on aura ainsi le zéro de l'échelle. Si l'on veut ensuite que ce rayon prenne une inclinaison donnée i par mètre, suivant la direction oo'', la quantité $o'o''$ dont il faudra élever l'index s'obtiendra par la relation

Fig. 33.



$$i = \frac{o'o''}{oo'},$$

d'où

$$o'o'' = i \times oo'.$$

Soit, par exemple, $oo' = 0^m,30$ et $i = 0^m,20$; on aura, par le calcul, $o'o'' = 0^m,06$, et la division de cette longueur en 200 parties égales que l'on porterait ensuite dans toute la longueur de l'échelle donnerait les millimètres d'inclinaison. Mais, pour ne pas avoir à établir et à lire des divisions aussi petites, on n'en fait que 40 dont chacune accuse $0^m,005$ de pente, et l'on trace sur le bord du châssis un vernier d'une longueur

Digitized by Google

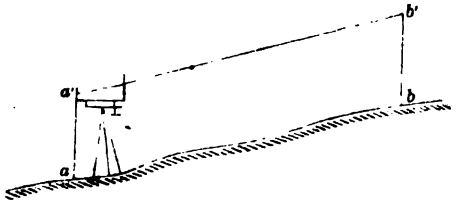
égale à 4 des parties ci-dessus, c'est-à-dire, répondant à une inclinaison de $0^m,02$; enfin, on divise ce vernier en cinq parties égales, comprenant par conséquent chacune $0^m,004$, de sorte que la différence entre celles-ci et les premières donne $0^m,001$ de pente (*Lever des Plans*, 27).

54. Avant de se servir du niveau de pente, il faut le vérifier ou le rectifier, pour s'assurer que le rayon de visée est bien horizontal, lorsque l'index marque zéro; sinon, l'instrument doit être réglé de manière que cette condition soit remplie. A cet effet, on appelle la bulle entre ses repères en tournant la vis à caler; puis, on fait couvrir un point éloigné, par exemple, le voyant d'une mire, par la croisée des fils de la grande pinnule. Si, après avoir retourné l'instrument bout pour bout et ramené la bulle au milieu de son tube, le même point se trouve sous la croisée des fils de la petite pinnule, c'est une preuve qu'il donne des indications exactes. Dans le cas contraire, on rachète la différence observée, moitié en tournant la vis du châssis de la petite pinnule, moitié en tournant la vis à caler, et quelques tâtonnements suffisent d'ordinaire pour arriver au résultat désiré.

On pourrait encore régler le niveau de pente en faisant mouvoir le voyant de la mire, dans la seconde opération, jusqu'à ce qu'il vînt sous la croisée des fils; en remarquant de combien on a dû le faire mouvoir, on lui donnerait la position moyenne à laquelle on ramènerait la ligne de visée par le moyen de la vis de la petite pinnule.

55. L'usage du niveau de pente de Chézy pour trouver la pente de la droite menée entre deux points donnés a, b, se présente de lui-même. On place l'instrument de manière que l'oculaire de la petite pinnule se trouve dans la verticale de celui a des points qui est le plus bas. On fait ensuite poser, au second point b, une mire dont le voyant a été fixé à une hauteur bb' égale à celle aa' de l'oculaire du niveau au-dessus du premier point, et l'on élève le châssis de la grande pinnule jusqu'à ce que la croisée des fils couvre la ligne de foi; dans cette position, la pente demandée sera évidemment celle qu'accusera le zéro du vernier.

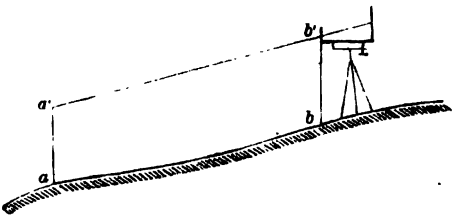
Fig. 34.



Si des circonstances quelconques obligeaient à placer le niveau de pente au point le plus élevé b, on le disposerait de manière à viser par l'oculaire de la grande pinnule, pour avoir un rayon visuel plongeant; mais il faudrait alors avoir le soin de placer la croisée des fils de la petite pin-

Digitized by Google

Fig. 35.



nule dans la verticale du point *b*, afin de pouvoir maintenir cette croisée à une hauteur constante.

Pour résoudre la même question par le nivellement proprement dit, il faudrait prendre les cotes des deux points *a* et *b*, les retrancher l'une de l'autre, puis diviser la différence par la distance horizontale de ces points; le quotient obtenu serait la pente cherchée.

56. M. l'ingénieur en chef Lefranc a simplifié le niveau de pente de Chézy. Dans son instrument, que représentent les *fig.* 13, 14 et 15 de la *Pl. III*, deux montants en bois remplacent les pinnules en cuivre. L'un de ces montants est fixe, et ne peut subir que de petits déplacements au moyen d'une vis inférieure qui permet de régler l'appareil; l'autre glisse à frottement dans une embrasse adaptée à la règle, et porte sur sa tige une graduation complétée par un vernier mobile qui donne les demi-millimètres de pente.

Au lieu d'un réticule formé par deux fils croisés, la ligne de visée est ici fixée, sur chaque pinnule, par deux droites, l'une verticale, l'autre horizontale, qui divisent en quatre parties égales un petit rectangle tracé sur une mince feuille de laiton; des quatre rectangles partiels ainsi formés, deux sont pleins, les deux autres sont évidés.

Ce niveau a l'avantage d'être léger, peu coûteux, facile à réparer; il donne d'ailleurs des résultats d'une approximation presque toujours très-suffisante.

EMPLOI DU NIVEAU DE PENTE POUR TRACER SUR LE TERRAIN UNE LIGNE D'UNE PENTE DÉTERMINÉE.

57. Le niveau de pente trouve sa principale application dans la recherche des tracés dont la pente est donnée. La marche à suivre consiste alors à disposer d'avance le châssis de la grande pinnule de manière que le rayon visuel ait l'inclinaison voulue, puis à chercher par tâtonnement un point de terrain tel que, en y faisant poser une mire dont la hauteur soit égale à celle de l'oculaire de la petite pinnule au-dessus du sol, la ligne de foi du voyant soit couverte par la croisée des fils. Il est bien clair que, d'après ce qui précède, la ligne qui va du pied de la verticale de l'oculaire à celui de la mire satisfait à la question.

Ce premier point trouvé, on y place le niveau de pente, et on détermine par le même procédé un second point satisfaisant à la condition donnée, puis un troisième et autant d'autres qu'on le voudra. On obtient ainsi, de

Digitized by Google

proche en proche, le tracé dont la pente est égale à celle du rayon de visée, c'est-à-dire à l'inclinaison donnée.

Les tâtonnements nécessaires pour trouver sur le terrain un point correspondant à la pente assignée peuvent paraître longs et pénibles, par la raison que, pour chaque position essayée, il est indispensable de rappeler soigneusement la bulle au milieu de son tube ; l'emploi du niveau de pente exige, en effet, que l'opérateur ait l'habitude de se servir de cet instrument et soit exercé dans la pratique des opérations topographiques en général ; mais celui qui réunit les deux conditions ci-dessus acquiert bientôt la facilité de ne porter ses recherches que sur des points du sol qui s'écartent peu de la direction convenable, et diminue par suite considérablement les tâtonnements inhérents à cette méthode.

58. Si, au lieu de laisser le voyant de la mire dans la position fixe que lui assigne la pente donnée, on tenait seulement note de cette position et que, en chaque point essayé, on fît hausser ou baisser le voyant jusqu'à ce qu'il rencontrât la ligne de visée, la quantité $b'o$ dont il aurait fallu le faire monter ou descendre par rapport à sa première position, indiquerait nécessairement la hauteur ou la profondeur bp du remblai ou du déblai qu'il faudrait effectuer en ce point pour donner au terrain la pente voulue.

Fig. 36.

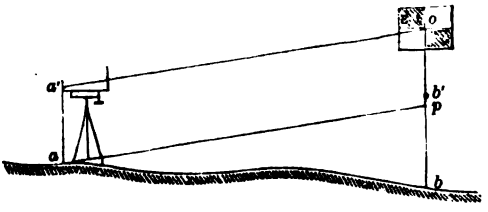
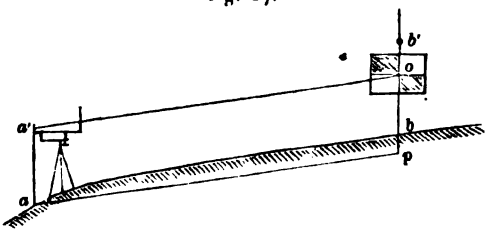


Fig. 37.



On comprend que, sous ce point de vue encore, le niveau de pente puisse être un instrument précieux.

59. Enfin, le niveau de pente peut encore être employé pour remplir l'office de stadia. Il suffit, pour cela, de le dresser à l'une des extrémités de la distance à mesurer, et de fixer d'abord, à l'autre extrémité, le voyant de la mire sur le rayon visuel horizontal. On relève ensuite le châssis mobile d'une quantité correspondante à une pente déterminée, et l'on remonte le voyant dans la direction de la nouvelle ligne de visée. La différence de niveau des deux positions du voyant, divisée par la pente connue, donne évidemment la distance cherchée.

Digitized by Google

Digitized by Google

CUBATURE DES TERRASSES

ET

MOUVEMENT DES TERRES.

ÉVALUATION DU CUBE DES TERRASSEMENTS PAR LA MÉTHODE DITE EXACTE.

1. Nous avons vu (*Nivell.*, 44) comment, au moyen des profils en long et en travers du terrain naturel et du projet, on se rendait compte, par aperçu, des cubes de terre à enlever ou à rapporter : nous avons dit que cette évaluation sommaire était basée sur la comparaison des cotes qui se correspondent dans la même verticale, c'est-à-dire, sur la détermination des différences entre ces cotes, différences qui expriment en chaque point l'épaisseur de la tranche de terre à mettre en mouvement, et qui sont, à proprement parler, les *cotes de déblai* et *de remblai*.

Un calcul plus exact, ou du moins plus approché, devient nécessaire quand il s'agit de l'estimation de dépenses à faire ; cette opération, que l'on désigne sous le nom de *cubature des terrasses*, et dont les méthodes sont exposées ci-après, demande que nous entrions dans quelques détails préliminaires qui éclairciront la question.

Supposons donc que le nivellement dont les résultats figurent au tableau du n° 25 soit relatif à une portion du *profil en long* sur l'axe d'un projet de route, et rapportons-le comme il a été dit plus haut, et comme il est représenté par la *fig.* 6 de la *Pl. IV ;* traçons en rouge, selon l'usage, la suite des lignes qui figurent l'axe du projet, et inscrivons également en rouge les cotes de déblai et de remblai auprès des longueurs respectives auxquelles elles correspondent ; ces cotes, qui, nous le savons, jouent un rôle important dans la question, sont celles que l'on désigne spécialement sous le nom de *cotes rouges*.

Pour ce qui est des profils en travers, traçons au-dessous du profil en long une droite QQ′ parallèle à la trace PP′ du plan de comparaison et, par conséquent, aux rives du papier, et prolongeons jusqu'au delà de cette droite les ordonnées des divers points nivelés. Nous obtiendrons ainsi un système composé d'une droite coupée par une série de perpendiculaires espacées entre elles comme le sont les profils en travers du nivellement ; nous pourrons donc, abstraction faite de la courbure réelle qui peut, en

Digitized by Google

certains points, être assignée à l'axe du projet, c'est-à-dire en supposant cet axe développé en ligne droite, le regarder comme représenté en projection horizontale par la droite QQ', de même que chacune des perpendiculaires à cette droite pourra être considérée comme la trace du profil en travers correspondant sur le plan de comparaison. Rien n'empêchera même que ces perpendiculaires figurent en projection la ligne horizontale passant, dans chaque profil, par son point de rencontre avec le profil en long du terrain (*Nivell.*, 31), ligne qui sert à dessiner lesdits profils en travers, tant du terrain que du projet, et autour de laquelle on les suppose ensuite rabattus de droite à gauche sur le plan du papier. On obtient ainsi une sorte de plan où les hauteurs et les longueurs ont des échelles correspondantes à celles du profil en long, et sur lequel le rabattement des profils en travers permet de faire toutes les constructions nécessaires à l'évaluation des cubes; il faut donc rapporter sur ce plan chaque profil en travers du terrain d'après le nivellement qui l'a fourni, et dessiner le profil du projet en rouge, en prenant pour point de départ sur l'axe la cote rouge du profil en long.

Quand il s'agit, comme dans le cas présent, d'un projet de route, le dessin des profils en travers relatifs à l'état futur du terrain est ordinairement bien simple; car le profil en travers est le même en chaque point, sauf en ce qui concerne les talus de remblai qui sont inclinés à 3 de base pour 2 de hauteur, tandis que, dans les déblais, le fossé est généralement limité par des talus à 45 degrés; on peut donc, pour abréger, découper sur du carton mince, ou mieux sur une feuille de corne transparente, deux panneaux respectivement relatifs à chacune de ces deux dispositions, et les transporter sur chaque profil pour en tracer les contours.

2. Ceci bien compris, rien n'est plus aisé que de se représenter, entre deux profils transversaux consécutifs, l'ensemble des surfaces dont le mode de génération a été exposé (*Nivell.*, 33 et 38), et qui limitent le terrain naturel et le relief projeté; ces deux surfaces se coupent suivant des arcs de courbes qui, lorsque ces intersections ont lieu dans l'intervalle même des deux profils, sont dites *lignes de passage*, parce qu'en chacun de leurs points le projet passe du déblai au remblai, ou réciproquement; le tracé de ces lignes en projection horizontale offre donc un certain intérêt, et nous nous y arrêterons quelques instants.

Pour construire un point quelconque de la ligne de passage entre deux profils consécutifs dont l'un présente un déblai, l'autre un remblai, il suffira de tirer une ligne parallèle à l'axe, laquelle sera la projection commune des deux génératrices rectilignes dont l'intersection est le point cherché, et de partager (*Nivell.*, 42) la portion de cette ligne comprise entre les plans des deux profils ou, suivant l'expression adoptée, la lon-

Digitized by Google

gueur de l'*entreprofil*, en parties proportionnelles aux cotes de déblai et de remblai correspondantes et préalablement calculées par les procédés du n° 34.

La détermination d'un pareil point peut d'ailleurs se faire plus facilement encore par une construction purement graphique, et par un simple rabattement de chacune des deux droites qui le contiennent.

Les lignes de passage sont des portions de courbes dont les attaches sont sur les génératrices qui correspondent aux brisures des profils; leur courbure est peu prononcée dans les questions relatives aux terrassements ordinaires, et l'on se contente de déterminer leurs extrémités que l'on joint par des droites qui ne sont autre chose que leurs cordes.

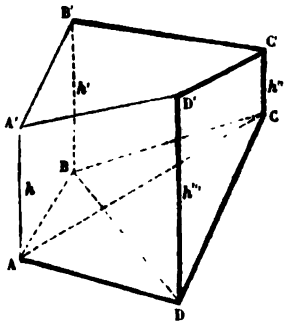
Ajoutons que, lorsqu'on a déterminé, sur une ligne de passage, le point où doit se terminer le fossé en passant d'un déblai à un remblai, il est impossible de faire succéder immédiatement le talus normal du remblai $\left(\frac{3}{2}\text{ de base pour 1 de hauteur}\right)$ à celui du fossé (1 pour 1), attendu que l'ouverture de celui-ci se trouverait en partie masquée et l'écoulement de l'eau gêné. Pour obvier à cet inconvénient, on raccorde les deux talus par une surface qu'engendre une ligne droite s'appuyant, d'une part, sur la ligne de passage déterminée dans le talus à 45 degrés du fossé, d'autre part, sur une section faite dans le talus de remblai à une distance déterminée, et qui est assez ordinairement celle du profil en remblai lui-même.

C'est d'après ces principes qu'a été tracée (*fig.* 7, *Pl. IV*) la ligne de passage *mnohgk*, par exemple, entre les profils II et III, ainsi que les deux lignes *gp*, *qk*, qui marquent sur le plan la limite du remblai et celle du déblai. Ces diverses lignes que notre dessin présente en pointillé rond sont ordinairement tracées en bleu.

3. Il est maintenant aisé de reconnaître que, si l'on mène des plans verticaux parallèles à l'axe par tous les points des profils transversaux où le terrain naturel rencontre le projet, les volumes de déblai ou de remblai à évaluer se trouveront ainsi décomposés en un plus ou moins grand nombre de prismes terminés latéralement par des plans verticaux, et à leurs bases inférieures et supérieures par des surfaces dont nous avons défini le mode de génération. Or, la géométrie enseigne, sans que les limites posées par notre programme nous permettent de le démontrer ici, 1° qu'un pareil solide a le même volume que le prisme dont les arêtes verticales auraient même hauteur et même projection, dont la base serait plane et horizontale, et dont la surface supérieure seule serait gauche; 2° que si, dans un de ces derniers prismes dont la base est généralement un quadrilatère quelconque ABCD, on désigne par h, h', h'', h''' les arêtes verticales

Digitized by Google

Fig. 1.



AA', BB', CC', DD' qui représentent les cotes rouges, et par T, T', T'', T''' les quatre triangles BCD, ACD, ABD, ABC qui ont pour base chacune des deux diagonales AC, BD du quadrilatère ABCD, le volume V du prisme est exprimé par la relation

$$V = \frac{1}{6}\begin{cases} T\ (h' + h'' + h''') \\ + T'\ (h + h'' + h''') \\ + T''\ (h + h' + h''') \\ + T'''\ (h + h' + h'')\,. \end{cases}$$

4. Telle est la formule générale propre à l'évaluation des cubes et dont l'application, généralement fort épineuse, constitue la *méthode exacte* du calcul des terrassements; elle se simplifie cependant dans la plupart des cas, suivant que la projection ou la base du prisme devient un trapèze, un parallélogramme ou un triangle.

Supposons, en effet, que le côté AB devienne parallèle à CD : les triangles T et T' sont équivalents, puisqu'ils ont même base et même hauteur; il en est de même des triangles T'' et T''', en sorte que l'expression du cube V se présente sous la forme

$$V = \frac{1}{6}\left\{T\,(h + h' + 2h'' + 2h''') + T''\,(2h + 2h' + h'' + h''')\right\}.$$

Si, par le parallélisme des deux autres arêtes de la base, le trapèze se transformait en parallélogramme, les quatre triangles seraient alors tous égaux entre eux, et l'on aurait

$$V = \frac{1}{2}T\,(h + h' + h'' + h''').$$

On peut mettre cette dernière relation, dont l'usage est fréquent, sous une forme encore plus simple, en remarquant que, si l'on représente par B la base entière du prisme, le triangle T, qui en est la moitié, équivaut à $\frac{1}{2}$ B; il vient donc, en substituant,

$$V = B\,\frac{h + h' + h'' + h'''}{4}.$$

Enfin, si le trapèze, par la diminution successive de la longueur du côté AB, devenait au contraire un triangle, les deux arêtes verticales h et h' coïncideraient ensemble, et le solide deviendrait alors un tronc de prisme triangulaire proprement dit dont le volume, exprimé, comme on le sait, par

$$V = T\,\frac{h' + h'' + h'''}{3};$$

Digitized by Google

est en même temps fourni par la formule relative au cas du trapèze, quand on y fait $T'' = o$ et $h = h'$.

5. Il importe encore de remarquer le cas où, la projection étant un quadrilatère quelconque, deux des arêtes h'' et h''', par exemple, deviennent nulles ; on a alors

$$V = \frac{1}{6}\left\{h(T' + T'' + T''') + h'(T + T'' + T''')\right\},$$

et, quand le quadrilatère se change, comme ci-dessus, en trapèze,

$$V = \frac{1}{6}(h + h')(T + 2T'').$$

Cette dernière formule s'appliquerait, par exemple, de chaque côté d'une ligne de passage, à des cubes compris entre deux plans verticaux parallèles à l'axe.

Dans la même hypothèse, la formule ci-dessus donnerait, pour le cas relatif au parallélogramme, en faisant $T = T''$,

$$V = \frac{1}{2}T(h + h') = B\frac{h + h'}{4},$$

et, s'il s'agissait d'une base triangulaire, c'est-à-dire d'un tétraèdre, on ferait, au contraire, comme plus haut, $T'' = o$, $h = h'$, et l'on trouverait la relation connue

$$V = T\frac{h}{3} = B\frac{h}{3}.$$

ÉVALUATION DES CUBES PAR LES MÉTHODES EXPÉDITIVES.

6. L'application des relations qui précèdent constitue, comme nous l'avons dit, la *méthode exacte*, ou mieux la méthode dite exacte, puisque la substitution des surfaces géométriques que nous avons définies aux surfaces irrégulières du terrain empêche nécessairement toute théorie de la cubature de comporter une solution rigoureuse. Mais une exactitude mathématique n'est heureusement pas nécessaire dans une question de cette nature, et n'approcherait même pas plus près de la vérité que les *méthodes expéditives* que l'on substitue aux calculs longs et pénibles auxquels conduirait celle que nous venons d'exposer.

Ces méthodes sont au nombre de deux : l'une dite méthode de la *moyenne des aires des sections extrêmes ;* l'autre, méthode de l'*aire de la section moyenne.* Nous allons les examiner successivement toutes deux, et éclaircir ce que ces dénominations peuvent encore conserver d'obscur.

7. *Méthode de la moyenne des aires extrêmes.* — Lorsqu'on veut cuber

Digitized by Google

un entreprofil, on le décompose, par des plans parallèles à l'axe et menés par les points de chaque profil où la ligne du projet rencontre celle du terrain, en des solides partiels dont les faces extrêmes sont entièrement en déblai ou entièrement en remblai, et qui sont projetés sur des rectangles, sauf deux cubes extrêmes projetés sur des triangles, quand les deux profils n'ont pas la même largeur.

Lorsqu'on veut mesurer l'un de ces cubes partiels, deux cas peuvent se présenter; il est entièrement en déblai ou en remblai, ou bien il comprend un déblai et un remblai séparés par une ligne de passage.

Dans le premier de ces deux cas, la méthode que nous examinons consiste à faire la moyenne des aires des deux sections extrêmes, et à multiplier cette moyenne par la longueur de l'entreprofil; le résultat peut se mettre alors sous la forme

$$V = L \times \frac{A + A'}{2},$$

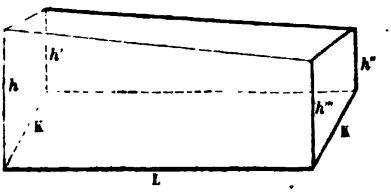
si l'on représente par L la distance des deux profils extrêmes, et par A, A' les aires des portions de ces profils que l'on considère, lesquelles sont toutes deux en remblai ou toutes deux en déblai.

Il est bon d'observer que, dans ce premier cas, la méthode expéditive donne un résultat identique avec celui que fournirait la méthode exacte (4) par la formule

$$V = B \times \frac{h + h' + h'' + h'''}{4}.$$

En effet, la base B est un rectangle dont une dimension est L, et si nous désignons l'autre, celle qui est perpendiculaire à l'axe, par K, nous aurons

Fig. 2.



$$B = L \times K;$$

on pourra, par suite, mettre V sous la forme

$$V = L \times \frac{K\frac{h + h'}{2} + K\frac{h'' + h'''}{2}}{2},$$

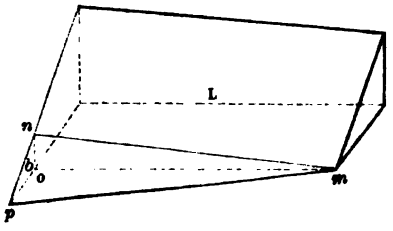
qui est identique avec la première, puisque les expressions $K\frac{h + h'}{2}$, $K\frac{h'' + h'''}{2}$ ne sont autre chose que les aires des trapèzes extrêmes, représentées plus haut par A et A'.

A ce cas se rattache directement celui dans lequel, l'un des deux profils en travers étant plus large que l'autre, le plan vertical mené paral-

Digitized by Google

lèlement à l'axe par l'extrémité m du plus étroit des deux profils, laisse en dehors un cube $mnop$ projeté sur un triangle mop; or, l'expression exacte de ce cube, ou mieux de cette pyramide, si l'on désigne par b sa base prise dans le profil le plus large, est, nous le savons,

Fig. 3.



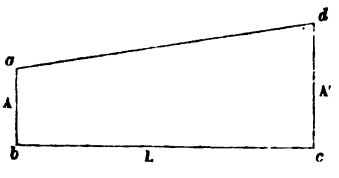
$$L \times \frac{b}{3}.$$

Mais, pour abréger et pour faire rentrer le calcul de cette pyramide dans celui des autres parties considérées, on remplace cette expression par $L \times \frac{b}{2}$, qui en diffère en plus de $L \times \frac{b}{6}$; de la sorte, l'ensemble des cubes partiels entièrement en déblai ou entièrement en remblai dans un même entreprofil peut se calculer du même coup, en faisant la somme des aires correspondantes dans chaque profil, et multipliant la moyenne de ces deux sommes par la longueur de l'entreprofil, pourvu que l'on ait soin, le cas échéant, de calculer à part la surface correspondante à l'excédant de largeur, et d'en retrancher le sixième, avant de faire entrer l'aire totale dans le calcul de la moyenne.

D'ailleurs, l'erreur que l'on commettrait en négligeant de retrancher ce sixième serait relativement peu considérable, et il arrive souvent que, pour aller plus vite, on se dispense de cette précaution.

8. Avant de passer au second cas qui se rapporte à des cubes partiels dont une portion est en remblai, l'autre en déblai, remarquons que, tant qu'il s'agit de cubes entièrement en remblai ou en déblai, les sections parallèles équidistantes faites dans l'entreprofil, en allant d'un profil extrême à l'autre, sont implicitement regardées comme décroissant en proportion arithmétique; en d'autres termes, on suppose que, si l'on construit un trapèze rectangulaire $abcd$, dont les bases ab, cd aient des longueurs proportionnelles aux aires des profils extrêmes, et dont la hauteur soit égale à la longueur L de l'entreprofil, toute parallèle aux bases du trapèze, menée à une distance quelconque de la première base, est proportionnelle à l'aire de la section faite dans l'entreprofil à la même distance de son origine; en effet, si l'on considère le profil extrême lui-même, l'aire du trapèze a une valeur $L \times \frac{A+A}{2}$ proportionnelle (7) au volume de cet entreprofil.

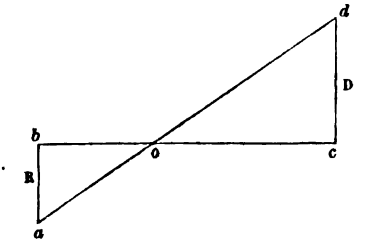
Fig. 4.



Digitized by Google

L'extension de la même supposition au cas où, des deux surfaces extrêmes d'un entreprofil, l'une D est en déblai et l'autre R en remblai, entraîne à considérer, dans ce cas, l'ensemble des solides de l'entreprofil comme pouvant être représenté par les aires de deux triangles ayant pour bases des longueurs *ab*, *cd* proportionnelles aux aires extrêmes de déblai et de remblai, et, pour hauteurs, des longueurs proportionnelles à ces bases; l'aire de l'un de ces triangles représente alors le volume en déblai, et celle de l'autre le volume en remblai.

Fig. 5.



Ceci admis, il ne reste plus qu'à partager la longueur L de l'entreprofil en deux parties *bo*, *oc* proportionnelles aux aires des profils, et à multiplier respectivement la moitié de ces aires par la longueur correspondante.

Il est facile alors de résumer en formules les trois cas qui se présentent dans le calcul des terrassements, quand on n'opère que sur des profils dont les aires correspondent entièrement à un déblai ou entièrement à un remblai. Soient, en effet, r et r' les aires en remblai qui se correspondent dans deux profils consécutifs, ou d et d' les aires correspondantes en déblai, le cube du remblai ou du déblai sera exprimé,

dans le premier cas, par... $\frac{L}{2}(r+r')$

et, dans le second, par.... $\frac{L}{2}(d+d')$.

Si, au contraire, l'un des profils avait une aire en remblai représentée par r, et l'autre une aire d en déblai correspondante à la première, les deux parties de L divisé proportionnellement à r et à d seraient

$$L \times \frac{r}{r+d}, \quad L \times \frac{d}{r+d},$$

et les cubes R et D du remblai et du déblai compris dans la portion de l'entreprofil considérée, seraient respectivement donnés par les formules

$$R = \frac{L}{2} \times \frac{r^2}{r+d}, \quad D = \frac{L}{2} \times \frac{d^2}{r+d},$$

lesquelles s'appliquent évidemment à l'entreprofil tout entier, si aucun des deux profils extrêmes ne contient à la fois une aire en déblai et une aire en remblai.

On remarquera ici, et cette remarque est fort importante, que le point *o* ci-dessus déterminé, et qui porte généralement le nom de *point de pas-*

Digitized by Google

sage, n'a aucun rapport direct avec les *lignes de passage* que nous avons définies au n° 1. Le point de passage n'est pas, comme on pourrait le croire, un point de la ligne de passage, celui, entre autres, où cette ligne couperait l'axe du profil en long ; c'est un point purement fictif, un moyen de calcul qui n'est rattaché à la question que par une convention plus ou moins approchant de la vérité ; la ligne de passage est au contraire une conséquence rigoureusement géométrique de la définition des surfaces du terrain et du projet. Il suffit, d'ailleurs, pour mettre en évidence la non-identité de ce point avec le point d'axe de la ligne de passage, de se rappeler que le premier se détermine en partageant la longueur de l'entre-profil proportionnellement aux surfaces des deux profils extrêmes, tandis que le second, de même que tous ceux de la ligne de passage, provient de la division de ladite longueur en parties proportionnelles aux deux cotes rouges extrêmes.

9. Quand les deux profils extrêmes de l'entreprofil considéré sont composés à la fois de surfaces en remblai et de surfaces en déblai, ou même lorsque l'un de ces deux profils seulement présente cette circonstance, on est obligé de renoncer à cuber d'un seul coup l'entreprofil tout entier ; on le partage, par des plans verticaux parallèles à l'axe, en portions qui rentrent dans l'un des cas examinés précédemment, et l'application de la méthode n'offre aucune difficulté ; il est même commode de calculer séparément, dans tous les cas, les déblais et remblais situés à droite et à gauche de l'axe.

10. Pour simplifier encore davantage, tout en restant dans les termes d'une approximation suffisante, on va jusqu'à admettre diverses manières à peu près arbitraires de diviser les entreprofils qui présentent à la fois du déblai et du remblai. On opère, soit comme nous l'avons fait jusqu'ici, en menant des plans verticaux parallèles à l'axe par chacun des points de passage de l'un ou l'autre des profils ; soit, plus simplement, en prenant pour lignes séparatives des droites allant des points de passage d'un profil aux points de passage qui leur correspondent plus ou moins exactement dans l'autre profil ; soit encore, quand un profil entièrement en déblai ou entièrement en remblai se trouve en regard d'un profil partie en déblai et partie en remblai, en divisant le profil entièrement en déblai ou en remblai en parties respectivement et sensiblement proportionnelles aux surfaces de déblai et de remblai qui sont en regard sur l'autre profil ; soit même, enfin, en combinant la surface entière du profil homogène avec la partie de même espèce de l'autre, et considérant ensuite la partie restante de celui-ci comme ayant en regard sur le premier une aire de même nature et de superficie nulle.

11. *Méthode de l'aire de la section moyenne.* — Dans le but de remédier aux défauts d'exactitude de la méthode précédente, M. de Noël, an-

Digitized by Google

cien Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a proposé de substituer à la demi-somme des profils extrêmes l'aire d'un profil pris au milieu de la longueur de chaque solide, ou, en d'autres termes, de prendre pour expression du volume d'un entreprofil le produit de sa longueur L par l'aire de la section moyenne.

On voit sur-le-champ que cette méthode exige des profils en travers assez rapprochés pour que le terrain n'éprouve pas d'inflexion notable dans le sens de la longueur du solide, en sorte qu'on puisse, sans erreur sensible, joindre par des lignes droites les points correspondants des profils extrêmes, et déterminer ensuite, directement ou par le calcul, le profil moyen correspondant au milieu de chaque entreprofil. En second lieu, elle est évidemment inapplicable dans son principe même, toutes les fois qu'il s'agit d'un entreprofil dont les aires sont l'une en déblai et l'autre en remblai, et, par ces motifs, quoique dans quelques cas cette méthode soit plus exacte que celle de la moyenne des aires, c'est encore cette dernière qui est adoptée dans les avant-métrés des terrassements relatifs aux travaux des Ponts et Chaussées.

12. Voici du reste, en quelques mots, comment on procède dans cette Administration : on calcule d'abord les surfaces de déblai et de remblai de chaque profil ; on multiplie ensuite les demi-sommes des surfaces de même espèce dans deux profils consécutifs par la distance qui les sépare; ou, ce qui revient au même pour le résultat final, on multiplie séparément la surface en déblai et la surface en remblai de chaque profil par la demi-somme de ses distances aux deux profils entre lesquels il se trouve compris, sous cette réserve toutefois que, quand un profil entièrement en déblai succède à un profil entièrement en remblai, ou réciproquement, on imagine, au point de passage déterminé comme il a été dit plus haut (8), un profil fictif ayant une surface nulle, lequel est censé correspondre, comme les autres profils, à une longueur nécessairement égale à la moitié de l'entreprofil qu'il divise.

USAGE DES TABLES DRESSÉES PAR ORDRE DE L'ADMINISTRATION.

13. C'est donc par l'application de la méthode de la moyenne des aires que nous allons présenter le calcul des cubes de terrassements qui résultent du nivellement que nous avons pris pour exemple, et nous aurons à effectuer d'abord, dans chaque profil, les aires de déblai et de remblai. Il convient d'appeler l'attention sur cette mesure des superficies, qui n'offre aucune difficulté, puisque nous avons appris à déterminer, dans tous les cas, les cotes rouges ; mais cette opération est assez longue, et, au moyen de formules que nous ne démontrerons pas ici, on a dressé, par ordre de

Digitized by Google

l'Administration supérieure, des Tables qui, pour certains cas déterminés et dans certaines limites, donnent, toutes calculées et sans même qu'il soit nécessaire de rapporter les profils, les superficies cherchées.

Ces Tables n'ont encore été dressées et publiées que pour des profils de route de 8 mètres et de 10 mètres de largeur; elles sont disposées de manière à donner les superficies de déblai et de remblai dans chaque demi-profil en travers pour un côté de l'axe du projet, en sorte que, en ajoutant les deux quantités qu'elles donnent pour la gauche et pour la droite de l'axe, on a les surfaces en déblai et en remblai pour le profil total. Elles s'étendent jusqu'à des cotes sur l'axe de 3 mètres en déblai et en remblai, et jusqu'à des pentes en travers du terrain de $0^m,25$ par mètre. Les cotes sur l'axe procèdent de centimètre en centimètre jusqu'à 1 mètre, et de 2 en 2 centimètres de 1 à 3 mètres. Les inclinaisons en travers du terrain procèdent de 5 en 5 millimètres par mètre jusqu'à $0^m,10$, et de centimètre en centimètre, de $0^m,10$ à $0^m,25$.

Nous devons ajouter ici que les Tables ne s'appliquent directement qu'au cas où le profil en travers du terrain est formé de deux lignes droites se coupant sur l'axe, circonstance qui se présente assez fréquemment. On peut remarquer cependant que, dans le cas où la coupe du terrain est représentée par deux lignes droites pour un seul côté de l'axe, la Table peut encore abréger le calcul des superficies. Il suffit pour cela de prolonger jusqu'à l'axe celle des deux lignes qui en est le plus éloignée; on formera par ce prolongement un triangle auxiliaire que l'on calculera d'après le dessin comme à l'ordinaire, à moins qu'on ne puisse disposer aussi d'une Table de calcul de ces triangles; puis, on composera par addition ou par soustraction, selon le cas, l'aire de ce triangle avec celle que donne la Table pour le terrain terminé par la ligne que l'on a prolongée.

Fig. 6.

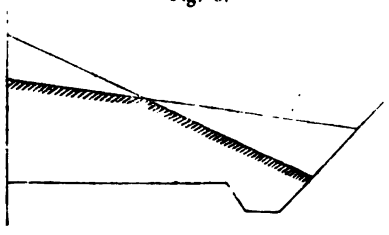
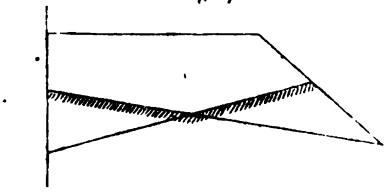


Fig. 7.



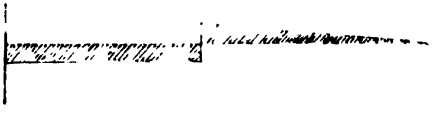
Quelquefois, il sera plus commode de prolonger jusqu'au talus en déblai ou en remblai celle des deux lignes du terrain qui est le plus rapprochée de l'axe, et il est très-peu de cas où l'un ou l'autre des triangles qu'on aura à calculer par l'une de ces deux méthodes ne soit tout en déblai ou tout en remblai. Si cela n'arrivait pas, il faudrait introduire deux trian-

Digitized by Google

gles, pour se servir de la Table, dont l'emploi cesserait alors bientôt de présenter une économie de temps.

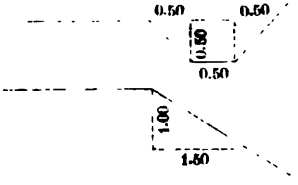
Enfin, les superficies sont calculées dans la supposition que le projet est réduit à une horizontale tracée à une hauteur telle, que les déblais à faire en dessous de cette ligne pour former le fond de l'encaissement soient égaux aux remblais qui seraient nécessaires pour former en dessus les accotements. Cette ligne se trouve à très-peu près à la hauteur du bord extérieur desdits accotements; le gabarit normal du projet se compose ainsi, de chaque côté de l'axe, d'une droite horizontale passant par les arêtes extérieures des accotements et d'un fossé avec talus de déblai, ou seulement d'un talus de remblai.

Fig. 8.



Les talus des fossés et des déblais sont inclinés à 1 de base pour 1 de hauteur; ceux des remblais sont à 3 de base pour 2 de hauteur.

Fig. 9.



Toutes les fois que le déblai à creuser, pour la confection du fossé, se réduirait à un triangle, le fossé est supprimé et remplacé par un talus de remblai. La largeur du fossé est de 1m,50 en gueule, à la hauteur de l'horizontale passant par les arêtes extérieures des accotements; elle est au fond de 0m,50, ainsi que la profondeur.

14. Telles sont les diverses hypothèses qui ont servi de base à la confection des Tables, et qui sont d'ailleurs en harmonie avec les dispositions généralement adoptées dans la pratique. Cela posé, on remarquera que, lorsqu'il s'agit de chercher dans les Tables une superficie de déblai ou de remblai pour un demi-profil en travers, la cote sur l'axe peut être en déblai ou en remblai, et que l'inclinaison du terrain naturel dans ce demi-profil peut être en rampe ou en pente, à partir de l'axe; aussi les Tables, dont l'argument principal est la cote rouge sur l'axe, sont-elles divisées en quatre parties correspondant respectivement aux quatre cas suivants :

1°. *Cote en déblai sur l'axe, terrain en rampe;*
2°. *Cote en déblai sur l'axe, terrain en pente;*
3°. *Cote en remblai sur l'axe, terrain en rampe;*
4°. *Cote en remblai sur l'axe, terrain en pente.*

De petites figures tracées en haut de chaque page préviennent les erreurs que l'on commettrait en cherchant dans une des quatre parties autre que

Digitized by Google

celle qui correspond à la disposition du profil que l'on considère. Enfin, après s'être porté à la page qui présente en tête la cote rouge que l'on a en vue, on descend dans les colonnes convenablement choisies jusqu'à la ligne horizontale commençant par l'inclinaison qui approche le plus de celle du terrain. Quand on sera dans le cas de la première figure, les remblais seront toujours nuls, et la colonne qui devrait les contenir a pu être supprimée; d'ailleurs, lorsqu'on ne trouve rien dans une colonne, c'est que la superficie qu'on y cherche est zéro.

15. Comme application de la méthode expéditive de cubature des terrassements que nous avons développée et de l'usage des Tables, nous pouvons maintenant calculer les cubes correspondants au nivellement en long et en travers déjà examiné; on réunit d'ordinaire les éléments et les résultats de cette opération dans le tableau suivant, dont la forme a d'ailleurs reçu la sanction de l'Administration :

Digitized by Google

NUMÉROS des PROFILS.	LONGUEURS auxquelles s'appliquent les PROFILS.	DÉBLAIS. SURFACES à gauche de l'axe.	DÉBLAIS. SURFACES à droite de l'axe.	DÉBLAIS. SURFACES totales par profil.	DÉBLAIS. CUBES.	REMBLAIS. SURFACES à gauche de l'axe.	REMBLAIS. SURFACES à droite de l'axe.	REMBLAIS. SURFACES totales par profil.	REMBLAIS. CUBES.	INDICATIONS SOMMAIRES des calculs particuliers à certains profils. OBSERVATIONS.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	m	m car	m car	m car	m cub	m car	m car	m car	m cub	
1	20,50	»	»	»	»	6,12	1,97	8,09	165,85	
2	36,67	»	»	»	»	8,51	7,62	16,13	591,49	Profil fictif pour le passage d'un profil tout en remblai à un profil tout en déblai.
»	28,75	»	»	»	»	»	»	»	»	
3	36,71	7,02	5,53	12,55	460,71	»	»	»	»	
4	59,12	3,60	7,19	10,79	637,50	»	»	»	»	
5	60, »	»	3,42	3,42	205,20	11,55	1,40	12,95	777, »	Les deux profils 5 et 6 présentant des inclinaisons supérieures à 0m,25, les surfaces correspondantes ont été calculées par les procédés ordinaires de la géométrie.
6	25, »	0,88	4,38	5,26	131,50	1,70	»	1,70	42,50	
	266,75				1435,31				1576,84	

Digitized by Google

La seule remarque à laquelle donne lieu ce tableau se rapporte à la colonne 2, dans laquelle, grâce à l'introduction des profils de passage à superficie nulle, on retrouve au total la longueur entière de la partie du tracé qu'on y a introduite; c'est là une utile vérification qui ne doit jamais être négligée.

RÈGLES GÉNÉRALES POUR LA RÉPARTITION DES DÉBLAIS.

16. Quand, par l'application de l'une ou de l'autre des méthodes qui viennent d'être exposées, on est parvenu à se rendre un compte aussi approché que possible des volumes de terre à déplacer, tant pour le déblai que pour le remblai, il est nécessaire, au point de vue de l'économie, de chercher à répartir les déblais de la façon qui doit procurer la moindre somme de transports et, par suite, la moindre dépense.

Dans les efforts que l'on fait pour arriver à ce résultat, on tend généralement et avec raison à employer tous les déblais à effectuer les remblais; quelquefois même on s'attache à disposer des pentes et rampes du projet de telle sorte qu'il y ait égalité entre les déblais et les remblais; mais on va comprendre que certaines bornes veulent être posées à cette séduisante compensation. Il est évident, en effet, que si, pour trouver tous les remblais dans les déblais, on est obligé d'aller chercher ceux-ci à une distance telle que le prix de transport soit supérieur à la dépense d'un *emprunt* d'un côté, et d'un *retroussement* de l'autre, on n'obtient pas alors la moindre dépense. La comparaison du prix de transport avec celui des fouilles des terres, et avec l'indemnité à payer pour les emprunts et les dépôts, doit donner la plus grande distance à laquelle on puisse transporter les déblais avec économie, et, par conséquent, celle au-dessus de laquelle il y aurait désavantage à ce que les terrassements fussent exactement compensés.

17. Nous supposons donc que, cette distance de transport maximum étant fixée par l'Ingénieur, comme l'ont été d'abord les pentes et rampes du profil en long, il s'agisse d'arrêter la distribution des déblais.

Une première règle consiste à employer en remblai, le plus souvent par un simple jet à la pelle, dans chaque entreprofil ou dans la longueur correspondante à chaque profil, toute la partie des déblais de cette même longueur qui peut y trouver sa place, sauf à compléter, s'il y a lieu, les remblais au moyen de terres étrangères, ou à transporter sur d'autres points les déblais surabondants. On n'a donc à transporter en remblai ou à effectuer avec des déblais empruntés, dans chaque longueur ci-dessus spécifiée, que les déblais ou les remblais en excès, et ce transport se fait généralement suivant des directions parallèles entre elles et à la voie de communication que l'on construit.

Digitized by Google

Maintenant, il peut y avoir bien des manières différentes de répartir les déblais excédants, et il est difficile de poser des règles générales et absolues pour la solution de ce problème; ce qu'il y a de plus naturel, de plus simple, et qui paraît, dans le plus grand nombre des cas, pouvoir être adopté comme conduisant au minimum de dépense, c'est de former chaque portion de remblai avec la partie contiguë ou la plus proche dans le déblai disponible; il restera alors, dans la longueur du projet, des portions de déblai qui n'auront pas trouvé leur place en remblai dans les limites de distance préalablement posées, et des lacunes de remblais qui, par la même raison, n'auront pas été comblées par des terres provenant de la route. C'est alors qu'il y aura lieu de porter les premiers en dépôt et d'emprunter les autres aux champs voisins, en combinant toujours le lieu, la distance et les dimensions de ces *cavaliers* et de ces *chambres d'emprunt*, de manière à arriver à faire le moins de frais possible.

DIVERS MODES DE TRANSPORT.

TRANSPORTS A LA BROUETTE.

18. Les cubes des déblais à transporter, soit du champ de la route en remblai ou en dépôt, soit d'un lieu d'emprunt sur la route, étant calculés et leurs destinations respectives étant précisées, on détermine, par des considérations qui trouveront leur place un peu plus loin, la distance à laquelle chacun de ces cubes doit être transporté, pour fixer le prix de ce transport et pour faire, toujours en vue de la moindre dépense, le choix du mode suivant lequel il aura lieu. Nous allons, pour le moment, supposer ces distances fixées, et, après avoir examiné les principaux véhicules employés communément dans les travaux de terrassements, nous donnerons le moyen d'adapter chacun d'eux aux parcours qu'il peut le plus avantageusement fournir.

L'instrument le plus en usage pour les terrassements à petite distance est la *brouette*, traînée ou poussée par un homme; sa forme varie suivant les localités, et sa contenance est généralement comprise entre $\frac{1}{25}$ et $\frac{1}{33}$ de mètre cube.

Dans les grands travaux de terrassements, les ateliers sont nombreux; il importe à un haut degré d'y établir une régularité et un ordre qui sont les seuls garants d'un résultat prompt et économique; il est donc nécessaire que les Conducteurs des Ponts et Chaussées soient familiarisés avec les conditions dans lesquelles ces ateliers fonctionnent de la manière la plus avantageuse; aussi regardons-nous comme très-précieuses pour eux les considérations suivantes:

Quand les terres qu'il s'agit de déblayer sont d'une nature telle qu'elles n'aient pas besoin d'être piochées avant d'être prises à la pelle, le per-

Digitized by Google

sonnel d'un atelier de terrassiers à la brouette se compose exclusivement de *chargeurs* et de *rouleurs*. Pour mettre ces deux espèces d'ouvriers dans une proportion convenable, et faire qu'aucun d'eux ne reste inoccupé pendant toute la durée du travail, on part de ce fait d'expérience, résultat d'observations ayant un caractère suffisant d'exactitude, qu'*un chargeur peut déblayer à la pelle et charger dans des brouettes 15 mètres cubes de terre dans une journée de dix heures de travail.* Or, pendant qu'un chargeur remplit une brouette, le rouleur ne peut parcourir, avec sa brouette pleine, qu'une certaine longueur du chemin telle qu'il soit de retour avec sa brouette vide au moment où l'autre est pleine ; cette distance est ce que, en termes de terrassements, on appelle un *relais ;* il s'agit de la déterminer.

La longueur du relais ne dépend, à proprement parler, que de la capacité de la brouette, puisque de cet élément résulte le temps qu'on emploie à la remplir. Soit donc, en général,

c le nombre de mètres cubes qu'un ouvrier peut charger en t heures; il chargera 1 mètre cube en $\frac{t}{c}$ heures; si la brouette a une capacité de $\frac{1^{mc}}{b}$, il la chargera en $\frac{t}{c} \times \frac{1}{b}$ heures.

D'un autre côté, si le rouleur parcourt v mètres dans le temps t, moitié avec la brouette pleine et moitié avec la brouette vide, il parcourra dans une heure la longueur $\frac{v}{t}$ et, dans $\frac{t}{c} \times \frac{1}{b}$ heures, c'est-à-dire pendant le temps du chargement d'une brouette, il parcourra $\frac{v}{t} \times \frac{t}{c} \times \frac{1}{b}$ ou $\frac{v}{bc}$ mètres; cette distance sera donc le double de la longueur R qui doit être assignée au relais, et nous aurons

$$R = \frac{v}{2bc}.$$

Cette formule devient, quand on y fait, comme l'expérience l'a établi, $v = 3oooo$ pour le temps t correspondant au cube $c = 15$,

$$R = \frac{1000}{b},$$

et elle montre que, pour des brouettes contenant $\frac{1}{25}$ de mètre cube, le relais doit être de 40 mètres, tandis qu'il n'est que de $30^m,30$ avec des brouettes de $\frac{1}{33}$.

Quoi qu'il en soit, les relais étant réglés d'après la formule précédente, on voit qu'il est avantageux pour les ouvriers, quand ils sont payés à la tâche, de charger beaucoup leurs brouettes; car ils font moins de chemin

Digitized by Google

pour transporter leurs 15 mètres cubes, et la difficulté de rouler n'augmente pas en proportion. De même, il est économique, pour celui qui paye, que l'on se serve de grandes brouettes; car la longueur des relais et, par conséquent, l'ouvrage fait par le rouleur, augmentent avec la capacité de ces brouettes, tandis que le prix du relais ne doit presque pas varier, la difficulté du travail étant à peu près la même.

Cependant, dans les analyses de prix et dans les marchés, le relais est ordinairement fixé à 30 mètres; cette longueur est peut-être un peu faible, car, dans notre pays, il faut presque toujours moins de trente brouettes pour 1 mètre cube de déblai; mais on compense par là la difficulté du roulage sur les remblais récents, les pertes de temps inévitables, etc....

19. Lorsque la distance à laquelle on doit rouler les terres surpasse un relais, il faut plusieurs rouleurs pour tenir tête à un chargeur; dans ce cas, on partage cette distance en portion de 30 mètres, et chaque rouleur ne parcourt que la longueur d'un relais, au bout duquel il pose sa brouette pleine, pour en prendre une vide qu'il ramène au point d'où il est parti.

On voit ainsi que tous les relais sont égaux et parcourus dans le même temps que le chargeur emploie à remplir une brouette; tous les relais doivent donc être payés au même prix que la charge dans la brouette, c'est-à-dire, pour 1 mètre cube, le quinzième du prix P de la journée de terrassier; d'où il résulte que le prix X du mètre cube de déblai chargé en brouettes et transporté à la distance D qui correspond à $\frac{D}{30}$ relais, est exprimé par la formule

$$X = \frac{P}{15}\left(\frac{D}{30} + 1\right),$$

le chiffre 1 placé dans la parenthèse correspondant au temps du chargement, temps équivalent à celui du parcours d'un relais.

20. La formule indiquée dans l'analyse des prix des Ponts et Chaussées pour la construction des routes diffère de celle que nous venons d'établir; la voici :

$$X = \frac{2\,PD}{1000} = \frac{PD}{500}.$$

Comme on le voit, elle ne tient pas compte du chargement de la terre dans les brouettes, et cette main-d'œuvre doit être comptée à part. La parité une fois rétablie sous ce rapport, les dénominateurs numériques sont l'un 500, l'autre 150×30 ou 450; l'analyse officielle admet donc le nombre 500 pour le produit de la longueur du relais par le cube qu'un ouvrier peut charger dans la journée de dix heures. Ces bases étant différentes, les deux relations devaient nécessairement différer aussi numériquement; mais elles reposent évidemment sur des principes identiques, et

Digitized by Google

c'est ici le seul point important. Pour l'application dans chaque cas particulier, on devra bien étudier les raisons spéciales qui peuvent influer sur l'évaluation des deux éléments qui viennent d'être indiqués, et composer ensuite le dénominateur de la formule d'après les résultats de cet examen.

Quant à la convenance de comprendre le prix de la charge dans la formule du transport, au lieu de rattacher ce prix à celui de la fouille, il ne saurait être douteux que, la charge en brouettes différant très-notablement de la charge en tombereaux, par exemple, il y ait avantage à isoler la fouille, et à lier l'opération du chargement à la formule de transport spéciale à chaque nature de véhicule. C'est, du reste, ce que l'Administration elle-même a recommandé, en inscrivant le paragraphe qui suit en tête de ses analyses :

« Lorsqu'on devra employer les deux modes de transport à la brouette » et au tombereau, le prix élémentaire relatif à la charge étant différent » pour chacun d'eux, on le comprendra dans le sous-détail du transport, » et non dans celui de la fouille. »

21. Nous avons supposé jusqu'ici que la terre mise dans les brouettes pouvait être enlevée directement avec la pelle; il est bien entendu que, s'il n'en était pas ainsi, il faudrait, par un piochage préalable, la ramener à cet état; puis, ajouter au prix de chaque mètre cube de déblai transporté le prix de cette main-d'œuvre préparatoire.

A cette occasion, nous ferons remarquer qu'il est encore intéressant de placer un nombre de piocheurs convenable, eu égard à la dureté de la terre, pour que le chargeur puisse déblayer d'une manière continue ses 15 mètres cubes par jour. Or, ce nombre de piocheurs ne peut être déterminé que par expérience; il suffit alors de faire piocher un terrain déterminé, par un ouvrier habitué à ce genre de travail, pendant un certain nombre de minutes; puis, de faire charger dans des brouettes, par un homme exercé de même au travail de la terre, le déblai pioché par le premier; le rapport des nombres de minutes employées par chacun de ces ouvriers exprime évidemment le nombre de piocheurs que cette terre exige pour que le chargeur puisse travailler sans interruption.

On doit toutefois observer que certaines terres, quoique d'une dureté assez grande, peuvent cependant encore être déblayées à la pelle sans exiger l'emploi de la pioche; il faut donc avoir soin de soumettre d'abord son terrain à cette épreuve préliminaire, si l'on ne veut s'exposer à conclure de l'expérience précitée qu'un piocheur est nécessaire pour la fouille, et, par suite, à faire en pure perte une dépense considérable.

22. On a vu que le chargeur devait travailler sans interruption; il importe donc qu'il ait constamment devant lui une brouette à remplir, et qu'on lui en présente une autre aussitôt que la première est pleine; d'un autre côté, chaque rouleur a aussi constamment une brouette entre les

Digitized by Google

mains; il s'ensuit que, dans un atelier bien réglé, il doit toujours y avoir un nombre de brouettes égal à la somme des nombres des rouleurs et des chargeurs.

TRANSPORTS AU TOMBEREAU.

23. Lorsqu'il faut transporter des terres à une distance un peu grande, il est économique de se servir du tombereau plutôt que de la brouette. On n'attelle le plus ordinairement au tombereau qu'un seul cheval; quelquefois, cependant, il est traîné par deux et même par trois chevaux; c'est assez dire que le cube que contient ce véhicule varie dans des limites étendues. Il y a des tombereaux qui ne contiennent qu'un demi-mètre cube; il y en a d'autres, et notamment ceux de Paris, qui se chargent de plus d'un mètre cube; ceux de Lille et de toute la Flandre contiennent communément quatre cinquièmes de mètre cube; leur charge correspond à 8 ou 900 kilogrammes, quoiqu'ils ne soient attelés que d'un seul cheval.

L'opération du transport au tombereau, quand il s'agit de terre qui peut s'enlever à la pelle, comprend, 1° le chargement; 2° le parcours, aller et retour, de la distance qui sépare le déblai du remblai; 3° le déchargement, le relèvement du tombereau et la mise du cheval en marche.

On admet comme un fait acquis que :

1 *homme charge en tombereau* 12 *mètres cubes de terre en* 10 *heures;*

il charge donc..... 1 mètre cube ... en $\frac{10}{12}$ d'heure,

ou C mètres cubes ... en $\frac{10}{12} \times$ C heures,

et H hommes chargent..... C mètres cubes ... en $\frac{10}{12} \times \frac{C}{H}$ heures.

Tel est le temps $\frac{10\,C}{12\,H}$ que H ouvriers emploient à charger un tombereau contenant C mètres cubes; nous verrons plus tard dans quel cas il est convenable de mettre un, deux ou trois chargeurs à un même tombereau : ce dernier nombre ne peut, du reste, guère être dépassé.

Pour ce qui est du temps du parcours, on admet qu'un cheval attelé à un tombereau plein parcourt, sur un terrain plat, de 2,600 à 3,000 mètres par heure, et que ce parcours est de 3,600 à 4,000 mètres lorsque le tombereau est vide; soient, en moyenne, 2,800 et 3,800 mètres par heure. Le même cheval parcourra donc la distance D, savoir :

Avec charge, en $\frac{1}{2800} \times$ D heures, et, à vide, en $\frac{1}{3800} \times$ D heures;

soit, aller et retour, en $\left(\frac{1}{2800} + \frac{1}{3800}\right)$ D heures, ou 0,00062 $\times$ D heures.

Digitized by Google

Il faut enfin, pour vider le tombereau, le relever et remettre le cheval en marche, à peu près deux minutes, ou $0^h,033$.

Ainsi, le temps total nécessaire pour charger un tombereau de C mètres cubes, avec H chargeurs, y compris le conducteur de la voiture, pour le parcours de la distance D, le déchargement et le retour, sera représenté par

$$\frac{10\,C}{12\,H} + 0{,}00062\,D + 0{,}033,$$

et, si nous désignons par T le temps nécessaire pour effectuer les mêmes opérations pour 1 mètre cube, nous aurons évidemment :

$$T = \frac{\dfrac{10\,C}{12\,H} + 0{,}00062\,D + 0{,}033}{C}.$$

24 D'un autre côté, si dans le temps T heures on transporte 1 mètre cube,

$$\text{en 1 heure on transportera } \frac{1}{T} \text{ mètres cubes,}$$

$$\text{et en 10 heures on transportera } \frac{10}{T} \text{ mètres cubes.}$$

Or, soient P le prix de la journée du terrassier, chargeur ou conducteur de voiture, P' celui de location du tombereau et de son attelage par jour; la dépense journalière de la voiture et des H ouvriers sera $HP + P'$, et cette somme représentera la charge et le transport de $\frac{10}{T}$ mètres cubes à la distance D.

Si donc on représente par X le prix correspondant à 1 mètre cube, on aura

$$X = \frac{HP + P'}{\frac{10}{T}} = \frac{(HP + P')\,T}{10},$$

et, en mettant pour T sa valeur trouvée plus haut,

$$X = \frac{HP + P'}{10\,C}\left(\frac{10\,C}{12\,H} + 0{,}00062\,D + 0{,}033\right).$$

25. Une discussion détaillée et des hypothèses diverses faites sur les différentes variables qui entrent dans cette formule conduiraient à la mise en évidence de toutes les circonstances relatives au transport en tombereau.

En faisant varier, par exemple, le nombre H des hommes employés à la charge, lequel nombre doit toujours comprendre le conducteur du véhicule, on constaterait qu'il est avantageux d'employer à la charge d'un tombereau deux ou trois hommes au lieu d'un seul; mais que cependant

Digitized by Google

cet avantage diminue à mesure que la distance augmente. Ainsi, au delà de 150 mètres, il vaut mieux ne mettre que deux hommes à la charge, au lieu de trois; quand on approche de 500 mètres, le conducteur doit être le seul chargeur.

On verrait aussi que, toutes choses égales d'ailleurs, il est plus économique de se servir de grands tombereaux que de petits. Ce résultat pouvait d'ailleurs être prévu; car il est évident que, plus les tombereaux sont grands, moins il faut de voyages pour transporter un mètre cube et, par conséquent, plus il y a de mètres cubes transportés dans une journée.

26. Nous avons supposé jusqu'ici qu'on n'employait qu'un seul tombereau par atelier de chargeurs; mais cette manière de disposer le travail n'est pas, à beaucoup près, la plus économique. Lorsqu'on met deux hommes, par exemple, un terrassier et le conducteur à la charge d'un tombereau, il est clair que, pendant tout le temps que ce tombereau emploie à aller et revenir, le terrassier qui reste à l'atelier n'a rien à faire; si la distance à laquelle on mène la terre est un peu considérable, ce terrassier pourra remplir un autre tombereau, en tout ou en partie, avant que le premier soit de retour. Si cette distance était telle que ce terrassier pût remplir entièrement un second tombereau, avec l'aide de son conducteur, pendant le voyage du premier, on pourrait déjà employer deux tombereaux par chaque atelier de chargeurs; si la distance est encore plus considérable, on pourra mettre trois tombereaux, et ainsi de suite.

De même, en employant deux, trois, etc. hommes avec le conducteur à la charge d'un tombereau, on pourra, à certaines distances, mettre deux, trois, etc. tombereaux par atelier de chargeurs, en ne perdant néanmoins pas de vue que, pratiquement, il y aurait gêne mutuelle et perte de temps à mettre plus de trois hommes à la charge.

Pour calculer ces diverses distances, il faut se rappeler que le temps du chargement d'un tombereau contenant C mètres cubes, avec H — 1 hommes et le conducteur, est $\frac{10\,C}{12\,H}$; que le temps du parcours de la distance D et du retour est 0,00062D, et que le temps du déchargement est représenté par 0,033. Si donc, connaissant le cube C des tombereaux employés, on égale le temps de la marche et du déchargement à un multiple quelconque m du temps du chargement, on exprimera, par la relation indéterminée

$$m \times \frac{10\,C}{12\,H} = 0{,}00062\,D + 0{,}033,$$

que, à la distance D, $m + 1$ tombereaux peuvent être remplis d'une manière continue pendant la période de travail, par H — 1 terrassiers restant à l'atelier et aidés successivement par chacun des $m + 1$ conducteurs.

Si, par exemple, les tombereaux cubant $0^{mc},50$, on met à la charge

Digitized by Google

deux hommes et le conducteur, et si l'on veut savoir à quelle distance on pourra employer deux tombereaux, il faudra faire $H = 3$ et $m = 1$, avec $C = 0,50$, dans l'équation ci-dessus qui donnera $D = 170$ mètres.

Si, dans les mêmes circonstances, on faisait $m = 2$, $m = 3$, etc., on trouverait successivement $D = 395^m$, $D = 619^m$, etc. On conclurait de ces résultats que, avec trois chargeurs, il faut employer deux tombereaux, à partir de 170 mètres de distance jusqu'à 395 mètres; trois tombereaux, de 395 à 619 mètres, et ainsi de suite. C'est d'après ces indications que nous supposerons fixés les prix de la charge et du transport, toutes les fois cependant qu'on ne sera pas gêné par le terrain, et qu'on aura assez de tombereaux à sa disposition pour pouvoir les mettre, avec la distance, dans le rapport qui vient d'être indiqué. A cette occasion, il est bon de remarquer qu'à 800 mètres et plus de distance, il ne faut encore que quatre tombereaux par atelier de chargeurs.

27. Pour mettre en évidence, dans la formule du n° 24, le nombre $m + 1$ des tombereaux qui, selon la distance des transports, doivent être employés pour un même atelier de chargeurs, il nous suffira de remarquer que la dépense journalière des $m + 1$ voitures et des $H + m$ ouvriers sera, non plus $HP + P'$, comme pour un seul véhicule, mais bien $(H + m)P + (m + 1)P'$, et cette somme représentera la charge et le transport de $(m + 1) \times \frac{10}{T}$ mètres cubes, à la distance D.

Par conséquent, on aura, comme dans le cas d'une voiture unique,

$$X = \frac{(H + m)P + (m + 1)P'}{\frac{10(m + 1)}{T}} = \frac{(H + m)P + (m + 1)P'}{10(m + 1)} \times T,$$

ou enfin

$$X = \frac{(H + m)P + (m + 1)P'}{10(m + 1)C}\left(\frac{10C}{12H} + 0,00062D + 0,033\right),$$

et l'on se rappellera que, dans cette formule générale, la quantité m doit, pour l'emploi le plus avantageux des ressources, recevoir des valeurs entières déterminées, comme on l'a vu dans le numéro précédent, d'après celle de la distance D à laquelle on veut l'appliquer.

28. Nous devons encore rapprocher cette dernière formule de celle qui figure pour le même objet en tête de l'analyse des prix des Ponts et Chaussées; cette dernière, plus simple en apparence, est la suivante:

$$X = \frac{P(2D + d)}{L \times C},$$

et les quantités P, d et L y représentent respectivement 1° le prix de la journée d'un tombereau attelé et de son conducteur; 2° la distance que

Digitized by Google

parcourrait le véhicule pendant le temps employé au chargement et au déchargement; 3° son parcours non interrompu pendant la journée de travail, en faisant la moitié du trajet à charge et la moitié à vide.

Puisque nous donnons la préférence à la première, il faut bien que nous lui attribuions sous d'autres rapports une supériorité que nous allons chercher à mettre en évidence.

Et d'abord, la formule officielle laisse encore en dehors le prix de la charge; nous avons dit, en parlant de la brouette, pourquoi cette main-d'œuvre doit plus naturellement y être englobée. La même formule ne s'occupe aucunement du nombre des tombereaux qui peuvent être utilement employés avec les mêmes chargeurs, ni du nombre de ceux-ci dont la présence influe cependant notablement sur le temps employé à la charge; elle considère un tombereau unique, chargé par son conducteur, et divise simplement par le cube transporté dans un voyage la fraction du prix de la journée qui correspond au temps dépensé dans ce voyage. En dehors de ces premières observations, les deux relations ne peuvent donc être comparées que quand nous aurons fait dans la nôtre $m = 0$ et $H = 1$, et que nous y aurons ensuite remplacé $P + P'$ par P; elle devient alors

$$X = \frac{P}{10C}\left(\frac{10C}{12} + 0{,}00062D + 0{,}033\right).$$

Cette préparation effectuée, rapprochons l'un de l'autre les termes de chaque formule qui varient avec la distance D; c'est, d'une part, $\frac{2P}{L \times C}D$, de l'autre, $0{,}00062\frac{P}{10C}D$, et ces deux termes ne diffèrent que par les facteurs $\frac{2}{L}$ et $\frac{0{,}00062}{10}$, dans l'un desquels la fraction décimale 0,00062 est égale (23) à $\frac{10}{l} + \frac{10}{l'}$, si l'on appelle l et l' les nombres 28000 et 38000 respectivement égaux aux parcours journaliers à charge et à vide.

Les deux facteurs dont il s'agit sont donc enfin, comme on le voit, $\frac{2}{L}$ et $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}$; ils seraient égaux, si l'on prenait $L = 32242$ mètres. Si, au contraire, on prend L égal à la moyenne 33000 des deux valeurs ci-dessus posées pour l et l', ce que suppose la formule officielle sans se préoccuper de la différence entre la vitesse à charge et la vitesse à vide, la préférence devra nécessairement être accordée à notre formule au point de vue de l'exactitude.

Quant aux deux termes indépendants de la variable D, nous nous bornerons à indiquer que, d'un côté, la quantité d est fort difficile à évaluer avec quelque précision, tandis que, de l'autre, tous nos éléments sont parfaitement définis.

Digitized by Google

29. On doit répéter ici l'observation que nous avons présentée au n° 22, relativement au prix additionnel du piochage, quand la terre a besoin de ce travail préparatoire avant d'être déblayée. Nous nous bornerons à ajouter que ce prix additionnel ne dépend pas seulement de la nature de la terre, mais encore de la distance à laquelle se fait le déblai et du nombre d'hommes employés à la charge; car il importe toujours de mettre à la fouille un nombre de piocheurs tel que les hommes occupés à la charge et aux transports travaillent sans interruption pendant toute la durée de la journée.

30. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici est indépendant du nombre des chevaux attelés à chaque voiture; on conçoit, en effet, que cette considération est indifférente, puisque, la capacité des tombereaux étant déterminée, il importe uniquement d'avoir une force motrice capable de les traîner avec leur charge; d'ailleurs, le nombre des chevaux est implicitement compris dans la quantité P′ qui représente le prix de location d'un tombereau et de son attelage, quel qu'il soit.

Le plus souvent, au reste, on n'emploie que des voitures à un seul cheval; ce système est généralement le plus économique. On ne met deux chevaux qu'autant qu'il y a beaucoup à monter, ou que, la contenance du tombereau étant considérable, un seul cheval se fatiguerait trop à le traîner. A Paris, où les tombereaux contiennent plus d'un mètre cube, on y attelle ordinairement deux chevaux.

TRANSPORTS AU CAMION.

31. Les terrassements des routes et, en général, de la plupart des travaux exécutés par l'Administration des Ponts et Chaussées, se font presque exclusivement à la brouette et au tombereau. Il est cependant un troisième mode de transport qui tient le milieu entre les premiers et qu'il est bon de connaître, parce que, outre des avantages réels, il est fréquemment et utilement employé par les cantonniers dans les soins journaliers de l'entretien des routes; nous voulons parler du *camion*.

C'est une petite voiture dont la hauteur totale au-dessus du sol n'est guère que d'un mètre, et la caisse, portée sur deux roues, contient environ $0^{mc},20$. Elle est traînée par deux hommes placés dans les brancards, et poussée par un troisième à l'arrière.

Nous admettrons qu'*un terrassier peut, dans sa journée de* 10 *heures, charger* 15 *mètres cubes de terre dans un camion* et que, par conséquent, il lui faut $0^{h},133$ pour charger $0^{mc},20$. Si donc on fait charger le camion par deux terrassiers, ils y emploieront $0^{h},067$, et, s'ils sont trois, $0^{h},045$; mais nous ne pensons pas qu'on puisse utilement mettre plus de deux hommes à la charge d'un pareil véhicule.

D'un autre côté, l'expérience a fait voir que la vitesse moyenne des

Digitized by Google

hommes qui traînent un camion alternativement plein et vide est de 55 à 65 mètres par minute; soit, moyennement, 60 mètres parcourus en $0^h,017$, ou mieux, en $0^h,02$, pour tenir compte, comme dans le transport à la brouette, des pertes de temps et de la difficulté de rouler sur des remblais récents. On voit que cette vitesse, ainsi établie, correspond précisément à celle des rouleurs à la brouette, c'est-à-dire, à un parcours de 30,000 mètres en 10 heures.

Enfin, il faut, pour décharger le camion et le remettre en marche, de 25 à 30 secondes; nous compterons $0^h,01$, et, avec ces données, nous trouverons facilement ce qu'il faut payer pour un mètre cube de déblai transporté à une distance quelconque D.

32. On peut faire diverses hypothèses sur le mode d'emploi du camion et des hommes occupés, soit à le charger, soit à le traîner; les indications fondamentales qui précèdent permettent d'établir facilement, dans chaque cas, la formule qu'il convient d'appliquer. Pour en donner un exemple, nous supposerons ici que, comme cela se pratique ordinairement par les cantonniers et leurs aides, les trois hommes qui roulent le camion sont aussi ceux qui le chargent; seulement nous admettrons que, pour reprendre haleine, et pour rester dans les conditions d'un utile emploi des forces, l'un des trois, à tour de rôle, laisse charger les deux autres qui emploieront, par conséquent, à ce travail $0^h,067$.

Puisque le camion parcourt 60 mètres en $0^h,02$, savoir 30 mètres avec la charge et 30 mètres à vide pour le retour, il parcourra, dans les mêmes conditions, la distance D en $0^h,02 \times \frac{D}{30}$; d'ailleurs, le déchargement demandera $0^h,02$, et le temps total de la charge, du parcours, du déchargement et du retour, pour un cube de 0,20, sera

$$0^h,067 + 0^h,02\,\frac{D}{30} + 0^h,02 \quad \text{ou} \quad 0^h,087 + \frac{D}{1500}.$$

Le temps T correspondant à 1 mètre cube sera donc exprimé par

$$T = \frac{0,087 + \frac{D}{1500}}{0,20} = 0,435 + \frac{D}{300}.$$

Si maintenant on divise les 10 heures de travail journalier par ce temps T, on aura évidemment, dans le quotient $\frac{10}{T}$, le nombre de mètres cubes qui seront transportés dans une journée; enfin, si par ce nombre de mètres cubes $\frac{10}{T}$ nous divisons la somme 3P des prix des journées des trois ouvriers, ce nouveau quotient $\frac{3PT}{10}$ ne sera autre chose que le prix

Digitized by Google

cherché X du mètre cube de terre chargé et transporté à la distance D; cette valeur de X se présente ainsi sous la forme

$$X = \frac{3P}{10}\left(\frac{D}{300} + 0{,}435\right) = P\,(0{,}001\,D + 0{,}1305).$$

33. Dans les terrassements importants qui s'exécutent avec des camions, les rouleurs sont, comme pour la brouette, distribués par relais, et le temps employé à parcourir chacun de ces relais est précisément égal à celui que les chargeurs mettent à remplir le camion; la longueur que doit avoir chacun de ces relais est facile à déterminer d'après cette condition.

En supposant qu'il y ait deux hommes à la charge du camion, le temps du chargement sera de $0^h{,}067$.

Or, puisque les rouleurs parcourent 60 mètres en $0^h{,}02$,
ou 3000 mètres en 1 heure,

ils parcourront $3000 \times 0{,}067$ mètres en $0^h{,}067$, soit 200 mètres.

Le relais du transport au camion doit donc être de la moitié de cette distance, ou de 100 mètres, et comme il faut, pour vider le camion, à peu près le même temps que pour parcourir 30 mètres, le dernier relais devra être diminué de 15 mètres; il sera donc de 85 mètres seulement, tous les autres étant de 100 mètres; de la sorte, une distance quelconque D représentera $\left(\frac{D-85}{100} + 1\right)$ relais.

34. On vient de voir que, comme pour la brouette, les relais du camion sont tous parcourus dans le même temps que les deux chargeurs emploient à remplir le véhicule; or, d'une part, les deux chargeurs, payés 2P par jour, chargent dans cette période 30 mètres cubes, et, par suite, chaque mètre cube coûte, pour son chargement, $\frac{2P}{30}$. D'autre part, chaque relais est desservi par 3 ouvriers payés 3P par jour; d'où il résulte que, pour une distance D, le transport des terres coûterait par jour

$$3P\left(\frac{D-85}{100} + 1\right).$$

Mais les rouleurs transportent en un jour le cube résultant du travail continu des deux chargeurs, ou 30 mètres cubes; par conséquent, le transport de chaque mètre cube équivaut au trentième de la dépense journalière y relative, ou à

$$\frac{3P}{30}\left(\frac{D-85}{100} + 1\right),$$

et le prix total X du chargement d'un mètre cube et de son transport à

Digitized by Google

une distance D est exprimé par la formule

$$X = \frac{2P}{30} + \frac{3P}{30}\left(\frac{D-85}{100} + 1\right) = P\,(0{,}001\,D + 0{,}082).$$

35. Pour la commodité des énonciations relatives aux distances de transport, l'usage a prévalu d'affecter spécialement le nom de *relais* à la distance de 30 mètres que parcourent les rouleurs à la brouette, et d'exprimer toutes les distances, même pour les autres modes de transport, au moyen de cette nouvelle unité. Cet usage, que nous n'avons pas cru devoir observer ici, dans l'intérêt de la clarté, ne change absolument rien aux déductions qui précèdent et à celles qui vont suivre sur le même sujet.

TRANSPORTS AU WAGON.

36. Les terrassements des chemins de fer s'exécutent généralement par les mêmes procédés que ceux des autres voies de communication; cependant, leur importance relative, et la rapidité d'exécution qui leur est imposée, s'accommodent souvent mal de la lenteur avec laquelle marchent d'ordinaire les travaux de cette nature, quand on n'emploie que les modes de transport que nous avons décrits dans les pages qui précèdent.

Il était, d'ailleurs, tout naturel de songer à faire servir à la confection même du chemin les puissants moyens de locomotion que ces voies mettent en jeu, et l'on exécute maintenant, avec des *rails* provisoires ou définitifs et avec des véhicules spéciaux appelés *wagons* qu'entraînent des chevaux ou la vapeur, une grande partie des terrassements auxquels donne lieu la construction des chemins de fer. Il y a plus; les avantages de ce nouveau mode sont si incontestables et si incontestés, qu'il est généralement adopté maintenant pour la confection de tous les grands travaux.

Toutefois, la question du transport des déblais au wagon est encore neuve aujourd'hui; elle comporte une grande complication dans ses détails. Aussi, jusqu'à présent, les Ingénieurs ne sont point encore d'accord sur l'emploi de ce nouveau système dans ses conditions les plus avantageuses, et sur l'admission d'une formule type, comme ils le sont pour la brouette et le tombereau. Nous ne pourrons donc présenter ici que quelques indications générales qui dominent le problème sans le résoudre complétement.

37. Le choix du mode d'organisation d'un atelier de terrassements au wagon dépend de plusieurs éléments, dont le principal est le temps fixé pour l'exécution, ou le *débit* journalier que l'on doit atteindre pour achever le travail dans les limites posées; on comprend, en effet, que cette connaissance du cube à transporter en moyenne par jour influe nécessairement et d'une manière directe sur le nombre des wagons à employer, sur la longueur des voies à poser, et définitivement sur le prix de revient du

Digitized by Google

mètre cube. Il faut aussi tenir un grand compte de plusieurs autres circonstances, parmi lesquelles on ne saurait impunément négliger les dimensions du déblai et du remblai, la nature des terres, la distance des transports, les dispositions particulières des lieux, et la possibilité d'employer le même matériel à l'exécution successive de plusieurs ateliers.

38. Il y a trois choses qui doivent parfaitement concorder dans tout chantier de terrassements bien organisé : le *chargement*, le *transport* et le *déchargement*. C'est surtout dans un atelier exploité avec des wagons que le rapport exact de ces trois éléments, et la précision des manœuvres auxquelles ce rapport établi donne lieu, sont d'une absolue nécessité, puisque les cubes transportés ne voyagent plus isolément comme avec la brouette et le tombereau, mais par masses agglomérées qui multiplient sur-le-champ les pertes de temps et d'argent résultant de la moindre discordance dans les mouvements prévus.

Dans un atelier exploité au tombereau, l'extraction et le chargement des déblais n'ont, pour ainsi dire, d'autres limites que celles qui résultent de l'étendue du sol à fouiller; le peu d'espace qu'exige une voiture pour ses mouvements, la facilité de lui faire suivre des pentes ou rampes rapides sans autre dépense qu'un surcroît d'effort momentané, permettent de distribuer les véhicules de la manière la plus convenable, et de les amener aux points où l'extraction et la charge peuvent s'opérer avec le plus d'économie. Il n'en est pas ainsi sur un atelier au wagon où, pour multiplier les points de chargement et atteindre le degré d'activité voulu, il faut d'abord ouvrir, dans le sens de l'axe de la tranchée, une galerie secondaire dans laquelle on établit des voies de transport avec des inclinaisons convenables. Cette galerie ne donne d'abord passage qu'à un seul rang de wagons; mais elle s'élargit bientôt au fur et à mesure de l'extraction, de manière à permettre de multiplier le nombre des voies, et d'aller charger les déblais sur le bord de la fouille.

Le mode d'ouverture et la disposition des galeries ou goulets de déblai varient d'ailleurs avec la profondeur des tranchées, la nature et la consistance du terrain, et la rapidité imposée à l'exécution du terrassement.

39. Quant au transport en lui-même, on comprend qu'il ne saurait jamais être un obstacle, puisqu'on peut toujours l'assurer au moyen d'un nombre suffisant de chevaux et de relais, ou par l'emploi, s'il y a lieu, de machines à vapeur. Dans le cas de relais desservis par des chevaux, il est toutefois nécessaire d'en coordonner le nombre et la longueur avec le temps de la charge et du déchargement, de manière qu'aucune lacune ne vienne troubler l'économie du travail ; il faut, en un mot, que tout soit arrangé pour que les chargeurs et les déchargeurs soient constamment occupés, et pour réduire à ses moindres termes la somme des temps per-

Digitized by Google

dus. Les combinaisons propres à assurer ce résultat sont nombreuses, et nous avons dit que les règles générales de ce système n'avaient pas encore été posées; aussi nous contenterons-nous d'ajouter que l'on profite quelquefois de la différence de niveau qui existe entre le lieu du chargement et celui du déchargement, pour diminuer les frais de transport en établissant des plans inclinés sur lesquels les wagons font tout ou partie du trajet par le seul effort de la pesanteur.

40. Le déchargement était autrefois considéré comme devant limiter à 500 mètres cubes environ le débit journalier des plus grandes tranchées; ceci serait vrai si l'on devait nécessairement décharger tous les wagons au même endroit; mais, de même qu'on peut prendre plusieurs points de chargement, rien n'empêche également de se donner un second lieu de déchargement, et de faire, par exemple, le remblai en deux couches. On peut d'ailleurs, sans recourir à ce dernier moyen, multiplier la décharge en l'exécutant sur trois voies de front dans la largeur de la levée, et arriver à décharger ainsi jusqu'à 600 mètres cubes par jour sur le même point.

Il a fallu, pour obtenir ce résultat, chercher le moyen d'abréger le plus possible la manœuvre du déchargement des wagons. La méthode anglaise est la plus répandue; elle consiste à amener au trot, quelquefois même au galop, le wagon détaché du convoi, qui stationne à une certaine distance de l'extrémité du remblai, et à favoriser son mouvement de bascule par un petit plan incliné que termine un heurtoir en bois; le choc renverse alors la caisse du wagon qui se vide tout seul, même avec des déblais un peu collants. Les régaleurs remettent immédiatement la caisse en place, et le charretier rattelle le cheval lanceur qui repart au trot, pour aller conduire le véhicule vide sur une voie d'évitement et chercher un autre wagon plein.

Ce mode de déchargement s'applique difficilement aux glaises humides qui adhèrent à la caisse, et qu'il faut souvent en détacher avec la pioche, après avoir inutilement renouvelé la manœuvre du renversement. On y a substitué quelquefois l'emploi de deux longues pièces reliées entre elles et prolongeant les rails en avant du remblai. Ces deux pièces, appelées *baleines*, appuient leur extrémité sur une estacade en bois que termine inférieurement un chariot mobile le long d'une voie provisoire posée sur le sol; cette dernière est relevée et avancée au fur et à mesure que les remblais progressent.

Les wagons sont amenés en convoi jusque sur le bord de cette estacade; ils sont alors séparés et successivement amenés à bras sur cette dernière, renversés, puis poussés jusque sur l'avant de l'échafaudage; là, ils sont réunis de nouveau, et repris pour retourner au lieu de chargement. Dans ce système, on s'arrange pour qu'un nombre convenable de wagons se

Digitized by Google

déchargent sur le côté, ce qui permet d'amener facilement à largeur les extrémités de la levée.

L'expérience a démontré qu'on pouvait décharger par jour, sur une seule baleine, jusqu'à 450 mètres cubes de terre, pourvu que le déblai n'adhère pas aux parois des wagons, de manière à nécessiter l'emploi de la pioche pour en être détaché après le renversement. On voit par là quelle rapidité peut prendre la construction d'un grand remblai, quand on le fait en plusieurs couches, au moyen de plusieurs baleines employées simultanément.

41. En l'absence d'une formule générale renfermant tous les éléments de l'importante question du transport au wagon, et notamment le temps fixé pour l'exécution, formule qui paraît dès l'abord devoir être assez compliquée, on peut payer à part : 1° les mains-d'œuvre et frais divers relatifs à l'établissement et à l'entretien des voies de roulement ; 2° une indemnité pour chaque wagon que l'entrepreneur met sur rails à la réquisition des Ingénieurs. De cette manière, les frais d'appropriation du chantier peuvent disparaître de la formule du transport, ainsi que leurs variations avec le temps d'exécution ; on y conserve seulement les frais de traction proprement dite, et les frais fixes qui comprennent la dépense spéciale du déchargement, le roulage en brouette d'une partie des déblais au chargement, les pertes de temps imposées aux terrassiers de la fouille pour former les convois, répartir entre eux les wagons vides, nettoyer les rails, etc., la surveillance des travaux, et sont indépendants de la masse transportée ainsi que de la distance moyenne.

Ainsi réduite à sa plus simple expression, la formule du transport au wagon apparaît encore sous la forme connue

$$P = a D + b,$$

a représentant, comme nous l'avons annoncé, les frais de traction pour un mètre de parcours, et b les frais fixes qui viennent d'être énumérés.

La diversité des circonstances dans lesquelles peuvent se présenter les exploitations de tranchées au wagon nous empêchent de préciser davantage et de donner des valeurs numériques aux deux coefficients a et b ; nous ne nous étendrons donc pas davantage sur cette matière non encore suffisamment éclairée.

FORMULES QUI FIXENT LA LIMITE DES DISTANCES ENTRE LESQUELLES IL CONVIENT DE PRÉFÉRER TEL OU TEL MODE DE TRANSPORT.

42. Nous venons d'examiner successivement les quatre modes de transport les plus usités et, sauf pour le wagon, nous avons exprimé par une

Digitized by Google

formule relative à chacun d'eux le prix X du mètre cube de déblai chargé et transporté à une distance quelconque D. Ces formules sont les suivantes:

Pour la brouette (19). . . . . $X = \frac{P}{15}\left(\frac{D}{30}+1\right)$;

Pour le tombereau (27). . . . . $X = \frac{(H+m)P+(m+1)P'}{10(m+1)C}\cdot\left(\frac{10C}{12H}+0,00062D+0,\right.$

Pour le camion { à distance entière (32) $X = P(0,001D+0,1305)$; avec relais (34). . . . $X = P(0,001D+0,082)$.

N'oublions pas que, dans ces relations, P exprime le salaire journalier d'un terrassier; dans la seconde, P' représente en outre le prix de location d'un tombereau attelé, non compris le salaire du conducteur; C, la capacité du tombereau; m, le nombre de ces véhicules employés par chaque atelier de chargeurs, et H, le nombre des ouvriers employés à charger chaque tombereau, ce nombre comprenant le conducteur de la voiture.

Pour comparer entre eux les divers modes de transport, au point de vue du plus ou moins grand avantage que leur emploi présente en raison de la distance D dans des circonstances données, nous allons faire des hypothèses particulières sur les valeurs numériques des quantités P, P', C, m et H; la quantité D restera seule indéterminée, et il sera facile alors de réunir dans un tableau les diverses valeurs de X qui résulteront des variations de la distance.

Nous supposerons en conséquence,

$$P = 1^f,50, \quad P' = 4^f,50,$$
$$C = 0^f,50, \quad H = 3^f.$$

Quant à m, il recevra (26), jusqu'à une distance de 170 mètres, la valeur 0; de 170 à 395 mètres, la valeur 1; de 395 à 620 mètres, la valeur 2, et ainsi de suite. Le tableau ci-après donne les valeurs de X correspondantes aux quatre modes de transport pour des distances croissantes de 30 en 30 mètres, ou, pour employer la locution en usage, de relais en relais, jusqu'à 600 mètres ou 20 relais; il a été calculé au moyen des formules ci-dessus, préalablement mises, d'après les données numériques de la question, sous la forme commune suivante :

Brouette. .		$X = 0,003D + 0,10$,
Tombereau.	pour les 5 premiers relais.	$X = 0,001116D + 0,31$,
	pour les 8 suivants.	$X = 0,00093D + 0,26$,
	pour les 7 suivants.	$X = 0,00087D + 0,24$,
Camion. . .	à distance entière.	$X = 0,0015D + 0,20$,
	avec relais.	$X = 0,0015D + 0,12$.

Digitized by Google

DISTANCES des TRANSPORTS.	PRIX DU MÈTRE CUBE DE DÉBLAI chargé et transporté				OBSERVATIONS.
	à la BROUETTE.	au TOMBEREAU.	AU CAMION à distance entière.	AU CAMION avec relais.	
1	2	3	4	5	6
m	f c	f c	f c	f c	
30	0 19	0 34	0 24	0 16	Les quantités de la 3e colonne ont été calculées par la première des trois formules relatives au transport par tombereaux pour les cinq premiers relais, par la deuxième pour les huit relais suivants, et par la troisième pour les sept derniers.
60	0 28	0 38	0 29	0 21	
66,67	0 30	»	0 30	»	
90	0 37	0 41	0 33	0 25	
111,50	0 43	0 43	»	»	
120	0 46	0 44	0 38	0 30	
150	0 55	0 48	0 42	0 34	
170	»	0 48	0 46	»	
180	0 64	0 43	0 47	0 39	Il n'y a pas lieu de chercher la distance qui rendrait rigoureusement égaux les prix du transport au tombereau et au camion à distance entière, parce que cette distance, qui ne saurait être fournie que par la deuxième formule du tombereau, serait évidemment inférieure à 170 mètres, et tomberait par conséquent en dehors des limites d'application de cette formule.
210	0 73	0 46	0 51	0 43	
240	0 82	0 48	0 56	0 48	
270	0 91	0 51	0 60	0 52	
300	1 00	0 54	0 65	0 57	
330	1 09	0 57	0 69	0 61	
360	1 18	0 59	0 74	0 66	
390	1 27	0 62	0 78	0 70	
420	1 36	0 61	0 83	0 75	
450	1 45	0 63	0 87	0 79	
480	1 54	0 66	0 92	0 84	
510	1 63	0 68	0 96	0 88	
540	1 72	0 71	1 01	0 93	
570	1 81	0 74	1 05	0 97	
600	1 90	0 76	1 10	1 02	

43. L'inspection de ce tableau donne lieu à plusieurs remarques importantes :

1°. Si l'on examine isolément la colonne relative aux transports exécutés par tombereaux, on voit que, en passant du cinquième au sixième relais, entre lesquels nous savons qu'il y a lieu de commencer à employer deux tombereaux au lieu d'un, non-seulement le prix du mètre cube ressort moindre qu'il n'eût été si l'on n'avait pas changé de formule, mais encore ce prix est moindre que les deux précédents qui correspondent à des distances plus petites. Il en est de même quand on passe du treizième au quatorzième relais; le prix correspondant au quatorzième relais est moindre que celui du treizième.

2°. En comparant deux à deux les nombres écrits dans les deuxième et

Digitized by Google

troisième colonnes, on s'aperçoit que, dans les trois premiers relais, le prix du mètre cube est plus élevé pour le tombereau que pour la brouette; mais que, à partir du relais suivant, c'est constamment le contraire qui a lieu; en sorte que, à partir de quatre relais, il y a toujours avantage, et un avantage de plus en plus marqué, à effectuer les déblais et transports au tombereau, de préférence à la brouette. Cependant, il faut observer que la vitesse que nous avons fixée pour la marche du tombereau ne peut s'acquérir qu'au bout d'une certaine distance, et que, par cette raison, les prix correspondants aux premiers relais sont peut-être trop faibles, puisqu'ils supposent une vitesse plus grande que celle qui aurait réellement lieu. Si l'on observe aussi que, pour préparer un chemin commode aux tombereaux, il faut souvent faire des dépenses qui ne seraient point occasionnées par le transport des terres avec des brouettes, on conclura qu'il ne peut guère arriver qu'il y ait réellement avantage à remplacer celles-ci par des tombereaux, lorsque la distance à laquelle se fait le remblai n'égale pas au moins cinq relais.

3°. Une remarque complétement analogue peut se faire pour les transports à la brouette et ceux au camion parcourant la distance entière, quand on passe du deuxième au troisième relais.

4°. Le prix du mètre cube chargé et transporté dans des camions, par relais, comme avec la brouette, est toujours inférieur à celui qui correspond, pour la même distance, à ce dernier mode de transport, et la différence en faveur du premier va toujours en augmentant.

5°. Si l'on compare les prix correspondants du tombereau et du camion à distance entière, on s'aperçoit que le camion, qui a l'avantage dans les cinq premiers relais, le perd à partir de 170 mètres, grâce à l'économie qui résulte de l'emploi de plusieurs tombereaux pour un même atelier de chargeurs. Il faut d'ailleurs ne pas perdre de vue que le transport au camion, quand les mêmes hommes le traînent du lieu du déblai jusqu'au remblai, ne peut, par sa nature même, s'appliquer qu'à des distances relativement peu considérables.

6°. Le transport au camion à relais est plus économique que l'un quelconque des trois autres modes, jusqu'à une distance de 240 mètres, c'est-à-dire, pendant les huit premiers relais; au delà, il ne le cède encore qu'au tombereau, qui reste le seul mode de transport avantageusement applicable aux distances supérieures à celle-ci.

44. Les résultats consignés dans le tableau ci-dessus, et les déductions que nous venons d'en tirer, sont des conséquences immédiates des formules; mais il était facile de conclure les mêmes choses, et avec plus de précision encore, du rapprochement desdites formules deux à deux. On comprend en effet qu'il suffit, pour déterminer, par exemple, la distance à laquelle il y a lieu de substituer l'emploi du tombereau à celui de la brouette, de chercher la valeur de D susceptible de donner une même va-

Digitized by Google

leur pour X dans les deux formules correspondantes. Cette valeur de D se tirera évidemment de l'équation obtenue en égalant les deux valeurs de X; pour le cas présent, cette équation est la suivante :

$$0{,}003\,D + 0{,}10 = 0{,}001116\,D + 0{,}31,$$

qui fournit

$$D = 111^{m},50, \quad \text{et, par suite,} \quad X = 0^{f},43.$$

C'est ce résultat et d'autres analogues que nous avons placés en chiffres capillaires dans le tableau ci-dessus; une discussion semblable mettrait facilement en évidence toutes les autres circonstances de la question qui nous occupe.

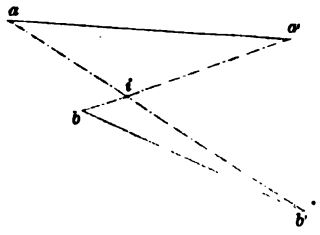
DÉTERMINATION DE LA DISTANCE MOYENNE DES TRANSPORTS.

TABLEAU DU MOUVEMENT ET DE LA RÉPARTITION DES DÉBLAIS ET DES REMBLAIS.

45. Ce qui précède suppose que, les volumes des terres à mouvoir étant calculés, pour répartir ces volumes de manière à procurer autant que possible la moindre dépense, on sache évaluer la distance moyenne des divers éléments d'un cube de déblai aux éléments correspondants d'un cube de remblai. Quelques principes généraux, applicables à ce sujet, ne seront point inutiles ici :

1°. Si l'on a deux volumes égaux, l'un en déblai, l'autre en remblai, disposés de telle sorte que les transports des éléments de la masse de déblai aux parties correspondantes du remblai puissent tous s'effectuer suivant des parcours parallèles, il est clair que la longueur moyenne des transports relatifs à cette masse sera égale à la distance des centres de gravité des volumes de déblai et de remblai; si, au contraire, les transports ne pouvaient être parallèles, la moyenne longueur des transports serait plus grande que la distance des centres de gravité, et par conséquent il importe de s'arranger, autant que possible, pour réaliser ce parallélisme des transports, condition qui se trouve généralement remplie dans les travaux de terrassements relatifs à la construction des routes.

Fig. 10.



2°. Si les parcours ne peuvent être parallèles, il faudra du moins, pour que la longueur moyenne des transports reste la plus petite possible, que les parcours soient dirigés de manière à ne pas s'entrecroiser; car, si deux volumes égaux étaient portés, l'un du point a au point b', et l'autre du point b au

Digitized by Google

point a', la somme des distances $aia' + bib'$ serait évidemment plus grande que l'ensemble des parcours directs aa' et bb', suivant lesquels les transports auraient également pu s'effectuer.

3°. Si, pour se rendre du déblai au remblai, il y a plusieurs points de passage obligés, tous les transports auront un parcours commun entre le premier et le dernier point obligés, convergeront des diverses parties du déblai vers le premier point de passage, et divergeront du dernier point de passage vers les différentes parties du remblai.

46. Quand on admet que les transports des diverses portions d'un cube de déblai se font suivant des directions sensiblement parallèles entre elles, la détermination de la distance moyenne de ces transports ne dépend donc plus que de la fixation plus ou moins certaine que l'on peut faire des centres de gravité du déblai et de celui du remblai. L'irrégularité des formes qu'affectent généralement les cubes de terrassements rend ce problème impossible à résoudre d'une manière rigoureuse, et ce n'est que par assimilation, soit à des prismes, soit à des pyramides, que l'on peut fixer d'une manière approchée leur centre de gravité, au moyen des notions développées dans notre premier volume (*Statique*, 30 et suivants).

Toutefois, ce travail se simplifie notablement par une construction graphique déjà indiquée (8), et laquelle a pour objet de représenter les divers cubes par des surfaces trapézoïdales ou triangulaires placées les unes par rapport aux autres de la même manière que ces cubes. Cette solution consiste essentiellement à porter sur une ligne droite des longueurs égales à celles qui séparent les profils transversaux, et à élever, à tous les points de division, des perpendiculaires de longueurs proportionnelles aux surfaces de déblai et de remblai dans chaque profil, en ayant soin de porter au-dessus de la ligne droite qui sert de base les perpendiculaires correspondant aux déblais, et au-dessous d'elles celles qui sont relatives aux remblais.

Cela fait, on réunit par des lignes droites les extrémités de ces perpendiculaires, et l'on regarde le centre de gravité des trapèzes ou triangles ainsi obtenus, comme se trouvant dans le même plan perpendiculaire à l'axe que le centre de gravité du solide qu'il représente. Rien ne sera donc plus facile que de déterminer géométriquement ces points, ainsi que la distance qui les sépare horizontalement. Une précaution importante est néanmoins à prendre dans tous les cas où, un profil contenant à la fois une surface en déblai et une surface en remblai, le profil voisin est tout en déblai ou tout en remblai, quand on a, comme c'est l'ordinaire, adopté le mode de subdivision de l'entreprofil qui consiste (10) à partager la surface du dernier profil en parties correspondantes et proportionnelles aux surfaces de déblai et de remblai du premier; il existe alors une superposition partielle des surfaces représentatives du déblai ou du

Digitized by Google

remblai, et il importe de prendre soin de dédoubler ces surfaces par une petite construction additionnelle, si l'on veut éviter de notables erreurs.

On divise ensuite, dans chacun des entreprofils où il y a à la fois déblai et remblai, la plus grande de ces deux surfaces en deux parties telles que l'une d'elles soit égale et symétrique, ou, si cela est impossible, simplement équivalente à l'autre. Les deux aires égales ou équivalentes dans le déblai et le remblai représentent les déblais immédiatement employés en remblai dans l'étendue de l'entreprofil, et ce sont seulement les terres correspondantes aux surfaces excédantes qui doivent être transportées dans d'autres entreprofils ou retroussées dans les lieux de dépôt.

Si l'épure est faite dans de justes et convenables proportions, il suffit, après avoir fixé graphiquement la position des centres de gravité, de mesurer à l'échelle, parallèlement à la base, les distances qui séparent les centres correspondants du déblai et du remblai pour toute l'étendue du nivellement.

47. Quelquefois, pour se soustraire à l'inconvénient des surfaces superposées, on commence par mettre de côté les déblais qui doivent trouver leur emploi dans la largeur de la route sans transport parallèle à l'axe, et l'on n'a plus à s'occuper, dans chaque entreprofil, que de l'excédant du déblai ou du remblai.

On simplifie même encore davantage la recherche des distances de transport, en admettant que le centre de gravité des trapèzes qui représentent les cubes de terre est situé à égale distance des deux bases; il suffit alors, pour avoir la distance du transport d'un cube de déblai compris entre deux profils en une place également limitée par deux profils consécutifs en remblai, d'ajouter aux deux demi-entreprofils de départ et d'arrivée les longueurs de tous les entreprofils intermédiaires.

48. Le plus souvent on néglige de faire ce dessin, et on le remplace par le tableau suivant, qui a été adopté par l'Administration supérieure pour les projets de route, et qui n'est d'ailleurs que la reproduction synoptique des éléments numériques de la question que nous venons de traiter:

Digitized by Google

Nos des profils. 1	Cube des déblais pour chaque profil. 2	Foisonnement. 3	Cube définitif des déblais 4	Cube des remblais pour chaque profil. 5	Cubes à employer dans la longueur répondant à chaque profil. 6	Excès des cubes des déblais sur les remblais. par profil. 7	Excès des cubes des déblais sur les remblais. par suite non interrompue de profils. 8	Excès des cubes des remblais sur les déblais. par profils. 9	Excès des cubes des remblais sur les déblais. par suite non interrompue de profils 10	Déblais en excès. à porter en remblai sur la route. 11	Déblais en excès. à porter en dépôt ou réservés pour un autre usage 12	Emprunts pour remblais. 13	Indication des lieux d'emploi ou de dépôt des déblais en excès. 14	Distances de transport. 15	Transports à la brouette. Cubes. 16	Transports à la brouette. Produits des cubes par les distances. 17	Transports au tombereau. Cubes. 18	Transports au tombereau. Produits des cubes par les distances. 19
														m				
1	»	»	»	165,85	»	»	»			»	»	141,53	Dans la carrière du Grand-Chêne.....	130	»	»	60,00	7800,00
									757,34				Dans le coteau des Ruelles.....	300	»	»	81,53	24459,00
2	»	»	»	591,49	»	»	»	591,49		»	»	»	/ »	»	»	»	»	»
3	460,71	»	460,71	»	»	460,71	»	»	»	24,32	»	»	Dans la longueur répondant au profil I.	69	24,32	1678,02	»	»
										436,39	»	»	*Id.* au profil II....	66	436,39	28801,74	»	»
4	637,90	»	637,90	»	»	637,90	»	»	»	155,10	»	»	*Id.* au profil III....	78	155,10	12097,80	»	»
										482,80	»	»	*Id.* au profil V....	48	482,80	23174,40	»	»
5	205,20	»	205,20	777,00	205,20	»	»	571,80	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
6	131,50	»	131,50	42,50	42,50	89,00	»	»	»	89,00	»	»	*Id.* au profil V....	17	89,00	1513,00	»	»
	1435,31	»	1435,31	1576,84	247,70	1187,61		1329,14		1187,61	»	141,53			1187,61	67264,96	141,53	32259,00

Digitized by Google

49. La première observation à faire porte sur les troisième et quatrième colonnes; la troisième est intitulée *foisonnement;* elle est réservée pour le cas où, par leur nature, les déblais portés dans la deuxième colonne doivent produire un cube de remblai plus considérable, et la quatrième renferme alors la somme des deux précédentes. Ce foisonnement est nécessairement variable avec chaque nature de déblai : on le néglige le plus souvent; mais, dans certains cas particuliers, il est nécessaire d'y avoir égard et d'en tenir compte au moyen d'expériences directes. Toutefois, on s'en rend généralement indépendant en faisant pilonner les remblais au fur et à mesure de leur exécution, ou mieux, en les faisant tasser par le roulement des véhicules de transport eux-mêmes.

Sous cette réserve, les cinq premières colonnes se prennent directement dans le tableau du calcul des terrasses; seulement, on doit ici supprimer les profils intermédiaires fictifs, qui n'avaient été introduits dans l'autre tableau que pour rendre la marche des opérations plus uniforme et pour faciliter la vérification des calculs.

Dans la colonne 6 s'inscrit le plus petit des deux nombres portés dans les colonnes 4 et 5.

La différence entre ces deux nombres se place dans la colonne 7 ou dans la colonne 9, suivant que c'est le déblai ou le remblai qui se trouve en excès.

Les colonnes 8 et 10 se déduisent immédiatement des colonnes 7 et 9.

Dans les colonnes 11 et 12, on indique la répartition des déblais qui restent en excès dans l'entreprofil que l'on considère, en distinguant chacune des parties de ces déblais à transporter sur la route dans des entreprofils différents, ainsi que les cubes à mettre en dépôt ou ceux à réserver pour un usage spécial, comme lorsqu'il s'agit, par exemple, de déblais dans le rocher qui peuvent être employés pour l'exécution des maçonneries ou l'empierrement des chaussées.

Dans la colonne 13 doivent être inscrits, en regard des cubes de remblai de la colonne 9, les cubes de déblai d'emprunt à exécuter pour suppléer à l'insuffisance des déblais provenant de la route.

On indique dans la colonne 14 les numéros des entreprofils ou les lieux de dépôt où doivent être portées, chacune séparément, les masses de déblais indiquées dans les colonnes 11 et 12, et les lieux d'emprunt où doivent être pris les déblais portés dans la colonne 13.

Dans la colonne 15 on inscrit, en regard des cubes correspondants des colonnes 11, 12 et 13, les distances auxquelles ces cubes doivent être respectivement transportés. Ces distances se déterminent alors, soit d'après la considération du profil en long, en ajoutant une plus ou moins forte fraction de la longueur des entreprofils de départ et d'arrivée à la somme de tous les profils intermédiaires, soit, s'il s'agit de dépôts ou d'emprunts, par l'évaluation des distances des centres de gravité, ou par tout autre moyen tiré des circonstances spéciales de la question.

Digitized by Google

Les distances auxquelles doivent être respectivement transportées les diverses masses de déblai étant ainsi déterminées avec soin, la distinction des cubes à transporter à la brouette ou à la voiture se fait naturellement (42 et suivants); on écrit les uns dans la colonne 16, et les autres dans la colonne 18.

50. Les colonnes 17 et 19 présentent, pour les transports à la brouette et à la voiture, les produits des cubes par les distances correspondantes: ces produits sont en effet essentiels à connaître, puisque le prix à payer pour faire un remblai est nécessairement proportionnel à la fois et au cube et à la distance qu'il doit parcourir. Mais on conçoit qu'il serait très-pénible de calculer pour chaque masse de déblai un prix de transport particulier; il est plus simple et tout aussi exact de déterminer une *distance moyenne*, et, par suite, un prix moyen pour l'ensemble des transports à effectuer suivant le même mode. Cette distance moyenne Δ, pour des masses m, m', m'',... m^n respectivement transportées à des distances d, d', d'',... d^n, doit évidemment, d'après sa définition connue, satisfaire à la relation

$$(m + m' + m'' + \dots m^n)\Delta = md + m'd' + m''d'' + \dots m^n d^n,$$

qui fournit

$$\Delta = \frac{md + m'd' + m''d'' + \dots + m^n d^n}{m + m' + m'' + \dots + m^n}.$$

C'est ainsi que, dans l'exemple précédent, la distance moyenne du transport à la brouette est exprimée par

$$\frac{67264,96}{1187,61} \quad \text{ou} \quad 57 \text{ mètres},$$

et que celle du transport à la voiture est égale à

$$\frac{32259,00}{141,53}, \quad \text{ou à} \quad 228 \text{ mètres}.$$

51. On a d'ailleurs, comme moyen de vérification des calculs, les relations suivantes, dans lesquelles les quantités C_1, C_2, C_3,... C_{19}, représentent respectivement les totaux des colonnes portant les numéros marqués par les indices :

1°. $C_4 + C_5 = C_7 + C_9 + 2C_6$,

2°. $C_4 = C_6 + C_{11} + C_{12}$,

3°. $C_5 = C_6 + C_{11} + C_{13}$,

4°. $C_1 + C_{13} = C_3 + C_{12}$.

Ces relations, dont nous ne nous arrêterons pas à démontrer la vérité, se traduisent, dans l'exemple qui nous occupe, par les identités ci-

Digitized by Google

après :

$$1435,31 + 1576,84 = 1187,61 + 1329,14 + 2 \times 247,70,$$
$$1435,31 = 247,70 + 1187,61 + \text{»},$$
$$1576,84 = 247,70 + 1187,61 + 141,53,$$
$$1435,31 + 141,53 = 1576,84 + \text{»}.$$

52. On opère le plus souvent la répartition des déblais par masses, en prenant pour chiffres à comparer les nombres compris dans les colonnes 8 et 10, au lieu de l'effectuer par parties au moyen des cubes élémentaires portés dans les colonnes 7 et 9. Cette manière d'opérer, qui est certainement beaucoup plus expéditive, a l'inconvénient de rendre toutefois moins sûre l'évaluation des distances de transport, et d'exposer par conséquent à des erreurs.

DES TRANSPORTS SUR DES RAMPES.

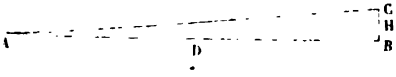
53. Nous avons supposé jusqu'ici que les transports se faisaient horizontalement; mais il arrive souvent qu'ils doivent s'effectuer en montant, et, dans ce cas, les prix veulent naturellement être augmentés.

L'usage est de donner aux chemins que doivent parcourir les déblais transportés à la brouette ou au camion des inclinaisons d'environ $\frac{1}{12}$ ou de $0^m,08$ par mètre; avec une rampe plus raide, le moteur se fatigue trop; plus douce, cette rampe ferait parcourir trop de chemin et nécessiterait trop de frais pour sa construction et son entretien. On admet en outre, comme résultat d'expérience, que le transport d'une masse à la brouette ou au camion, sur 20 mètres en rampe inclinée à $\frac{1}{12}$, équivaut au transport de la même masse sur 30 mètres de longueur en plaine.

Il est dès lors facile de transformer en parcours horizontaux équivalents tous les transports à effectuer suivant des inclinaisons diverses, et l'on n'a plus ensuite qu'à appliquer un seul tarif de prix, sans distinction de déclivités; cette transformation peut s'opérer d'après les considérations suivantes :

Premier cas. — Si la hauteur H à franchir est précisément égale au douzième de la hauteur horizontale D à parcourir, c'est-à-dire, si l'on a $D = 12H$, le parcours suivant AC équivaudra, d'après l'hypothèse admise, à celui de $\frac{30}{20} \times AB$ ou $\frac{3}{2}D$, ou encore $18H$.

Fig. 11.

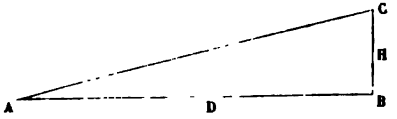


Deuxième cas. — Si la hauteur H est plus grande que le douzième

Digitized by Google

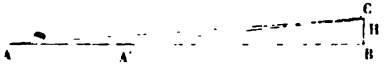
de D, la ligne AC aura une inclinaison plus forte que celle adoptée. On doit alors créer, par un allongement convenable de parcours entre le point de départ et le point d'arrivée, un système de rampes inclinées au douzième; on rentre ainsi dans le premier cas, et le parcours horizontal équivalent est encore égal à 18H.

Fig. 12.



Troisième cas. — Si, au contraire, H est plus petit que le douzième de D, on pourra parcourir d'abord sur AB une longueur AA′ telle que la ligne A′C soit inclinée au douzième, et le parcours de cette ligne équivaudra, comme on l'a vu, au parcours horizontal de 18H; ou bien à cause que

Fig. 13.



$$A'B = 12H,$$

au parcours de

$$A'B + 6H;$$

de telle sorte que l'ascension totale de A en C se représentera par un parcours horizontal équivalent à

$$AA' + A'B + 6H,$$

ou

$$AB + 6H,$$

c'est-à-dire

$$D + 6H.$$

Ordinairement on ne tient pas compte des rampes quand elles sont au-dessous de $\frac{1}{40}$, bien que rigoureusement on doive le faire; si l'on voulait conserver cette pratique, il faudrait le mentionner expressément au devis.

34. Des considérations analogues à celles que nous venons d'indiquer, au sujet de la manière dont il faut tenir compte des inclinaisons, quand il s'agit des transports à la brouette ou au camion, peuvent s'appliquer aux transports à exécuter au tombereau. Seulement, la pente du douzième étant trop forte pour les chevaux, on admet qu'un parcours de 100 mètres, sur une rampe de $\frac{1}{20}$ ou de $0^m,05$ par mètre, équivaut à un parcours de 150 mètres en plaine. Mais, les transports à la voiture ayant presque toujours lieu suivant des inclinaisons très-faibles, on ne tient guère compte des rampes que dans les cas exceptionnels qui se présentent lors de

Digitized by Google

l'exécution des grandes tranchées, ou dans les fouilles à faire pour l'établissement d'ouvrages d'art considérables.

55. Si le déblai devait avoir une grande profondeur, le développement des rampes serait très-coûteux; on partage alors le transport en deux périodes, l'une d'ascension du fond sur le bord de la fouille, au moyen de *banquettes* disposées en gradins par étages de $1^{m},60$, et sur lesquelles des ouvriers jettent successivement les déblais à la pelle, l'autre de transport au lieu du remblai par les moyens ordinaires; d'autres fois, on fait monter les brouettes ou les camions du fond de la fouille sur des plans inclinés très-raides, par le moyen d'appareils mécaniques qui viennent ajouter leur action à la force de l'homme.

Il peut enfin arriver que la fouille soit trop étroite et sa profondeur trop considérable pour que l'emploi des plans inclinés et même des banquettes soit praticable; cette circonstance se présente notamment quand il s'agit d'extraire des déblais d'un puits, d'une mine, etc. On a recours alors à l'enlèvement vertical, au moyen d'une machine composée d'une caisse ou panier que l'on remplit de terre, et d'un treuil qui sert à l'élever; l'ensemble de ce système porte le nom de *bourriquet*, et la caisse contient environ $0^{mc},033$ (un pied cube).

Pour que le travail du bourriquet soit bien et régulièrement conduit, il faut employer cinq hommes à la manœuvre, savoir : un pour remplir le panier, deux pour tourner la manivelle et deux autres pour décrocher le panier et le vider. Les deux hommes qui sont à la manivelle ne peuvent y rester qu'une heure de suite; au bout de ce temps, ils doivent être remplacés par les deux ouvriers qui étaient occupés à décharger la caisse, et de cette manière le travail peut se soutenir sans interruption pendant dix heures par jour.

Si les circonstances locales permettaient de faire un choix entre le système des banquettes et l'emploi du bourriquet, une analyse semblable à celles que nous avons présentées pour la brouette, le tombereau et le camion, fournirait l'expression du prix de l'élévation de chaque mètre cube pour un mètre de hauteur dans chacune des deux hypothèses, et permettrait d'assigner sans difficulté l'avantage d'un procédé sur l'autre, pour une hauteur déterminée.

Enfin, dans ces divers cas, et en général toutes les fois que des combinaisons spéciales peuvent influer notablement sur les conditions du travail, il faut établir des prix *ad hoc* et apporter dans le tableau du mouvement des terres les modifications nécessaires, pour grouper séparément les masses auxquelles doivent s'appliquer ces prix particuliers.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRATIQUE DES TRAVAUX.

NOTIONS SUR LES QUALITÉS ET LES DÉFAUTS DES MATÉRIAUX.

1. Les matériaux généralement employés dans notre pays pour les constructions de toute nature, et notamment pour les travaux publics, peuvent se classer sous les dix titres suivants :

1°. Les pierres ;
2°. Les briques ;
3°. Les chaux et ciments ;
4°. Les sables et pouzzolanes ;
5°. Les mortiers ;
6°. Les bétons ;
7°. Le plâtre ;
8°. Les bitumes et mastics bitumineux ;
9°. Les bois ;
10°. Les métaux.

Nous allons successivement passer en revue ces diverses substances, et chercher à mettre en évidence leurs qualités et leurs défauts, au point de vue spécial de leur emploi dans les constructions.

I. PIERRES.

2. La valeur relative des différentes sortes de pierres, considérées comme *pierres* propres *à bâtir*, tient essentiellement à leur composition minéralogique, et de ce rapprochement nous tirerons naturellement la classification de ces matériaux en *pierres calcaires*, *pierres siliceuses* et *pierres argileuses*.

PIERRES CALCAIRES.

3. Les *pierres calcaires* ont pour caractère distinctif leur propriété de se laisser rayer par une pointe d'acier, de faire effervescence avec les acides et de se décomposer, sans apparence de fusion, à une certaine température, en passant, par le dégagement de l'acide carbonique qu'elles contiennent, à l'état de chaux. Elles présentent, au reste, de grandes variétés de couleurs dues à la présence de substances étrangères, telles que l'oxyde de fer, des matières charbonneuses ou bitumineuses, etc.

Cette classe comprend la plus grande partie des pierres en usage dans

Digitized by Google

l'art de construire; elle est très-abondante dans la nature et se présente sous plusieurs aspects bien distincts. Nous ne mentionnerons ici que : 1° le calcaire *saccharoïde*, dont la cassure est analogue à celle du sucre et la contexture plus ou moins cristalline : parfaitement pur, ce calcaire est d'un blanc éclatant qui le fait rechercher pour la Statuaire sous le nom de *marbre blanc*; 2° le *calcaire compacte*, dont la contexture est plus fine et généralement plus serrée que celle du précédent; dont les variétés les plus communes ont cependant, comme la *craie*, le grain visible, un peu lâche, quelquefois terreux, happent à la langue et sont entièrement opaques, avec cassure inégale et souvent rude au toucher : c'est dans cette catégorie qu'il faut ranger les marbres de diverses nuances dont le grain serré les rend susceptibles de recevoir un beau poli; 3° le *calcaire siliceux*, ou mélange intime de calcaire et de silice. Quand cette dernière substance domine, le calcaire participe à ses propriétés; il fait feu au briquet, et l'effervescence par les acides cesse presque entièrement : quelques variétés demeurent toutefois aptes à prendre un certain poli, et cette pierre a été, dans ces derniers temps, avantageusement employée à la construction de quelques monuments publics de la capitale, tels que la Bourse, une partie de l'arc de triomphe de la barrière de l'Étoile, les bassins du Château-d'Eau et quelques autres.

C'est surtout cette dernière espèce de pierre que l'on désigne vulgairement sous le nom de *calcaire grossier*, à raison de sa contexture terreuse, de sa cassure souvent raboteuse et de sa couleur qui varie du jaune au blanc sale; elle fournit presque exclusivement toutes les pierres calcaires employées dans les constructions.

4. On établit encore, parmi les pierres calcaires, la distinction pratique de *pierres dures* et de *pierres tendres*. Les premières sont celles qui ne peuvent se débiter qu'au moyen de la scie sans dents, au moyen de l'eau et du grès tendre réduit en sable fin; tels sont les marbres, quelques bancs connus, dans les environs de Paris, sous les noms de *liais*, *clicquart*, *banc-franc*, et le *calcaire coquillier*. Les pierres tendres, composées des mêmes éléments que les précédentes, se débitent à sec, avec la scie à dents, se taillent facilement et, quand elles sont bien-choisies, leur parement a l'avantage de durcir à l'air; elles sont d'un usage très-répandu dans Paris pour la construction des édifices et des bâtiments particuliers, et les variétés les plus estimées y portent les noms de *lambourde* et *vergelet*. On emploie aussi, dans certaines localités et pour les parties des édifices qui n'ont pas à supporter une lourde charge, une pierre tendre appelée *tuf*, *tuffeau*, ou *marne solide*; quand cette pierre renferme une trop grande quantité d'alumine, elle ne résiste pas à la gelée et il importe, dans tous les cas, de ne l'employer qu'après une complète dessiccation. Le tuf des environs de Paris n'est pas assez résistant pour être utilisé

Digitized by Google

dans les constructions; il en existe des bancs assez estimés et très-abondants dans les environs de Saumur (Maine-et-Loire).

PIERRES SILICEUSES.

5. Les pierres siliceuses ne font point effervescence quand on les soumet à l'action des acides, et donnent en général des étincelles sous le choc du briquet; après les calcaires, ce sont les pierres le plus fréquemment employées dans les constructions.

Le type de cette classe de minéraux est le *quartz*, qui n'est autre chose que de la silice pure ou à peu près, et qui se trouve en grandes masses dans les Alpes; mais les plus utiles, entre les pierres siliceuses, sont sans contredit les *granits*, les *grès* et les *meulières*.

Sous le rapport de la résistance aux chocs, aux charges pesantes, aux actions destructives de l'atmosphère et autres, sous le rapport de la grosseur des blocs, le *granit* tient le premier rang parmi les matériaux de construction; c'est une roche formée de fragments accolés de trois substances siliceuses distinctes : le quartz, le *feldspath* et le *mica*, assemblés dans des proportions variables, mais où cependant le feldspath domine généralement. Ce dernier se présente dans le granit sous la forme de cristaux lamelleux, brillants et souvent colorés; la texture feuilletée et les paillettes brillantes du mica le font aisément reconnaître; les couleurs qu'il affecte généralement sont le blanc, le gris, le jaune, le brun foncé et le noir. Quant au quartz, il est disséminé dans la masse en grains irréguliers et habituellement incolores.

Quelquefois, le mica se trouve remplacé par l'*amphibole*, autre substance siliceuse de forme et d'aspect bien différents, à texture fibreuse et présentant elle-même quelques variétés. Ainsi modifié, le granit prend le nom de *syénite*, de la ville de Syène, en Égypte, où il en existe de forts beaux.

La présence des cristaux de feldspath et des paillettes micacées dans le granit empêche la plupart des espèces employées dans les constructions de prendre le poli; toutefois certains granits, dont les éléments sont proportionnés et disposés d'une manière plus favorable, peuvent rivaliser avec les plus beaux marbres sous le rapport de l'éclat des couleurs et du poli dont il sont susceptibles.

Le degré de dureté du granit paraît être en raison inverse de la quantité de mica qui s'y rencontre, et en proportion, au contraire, de l'abondance du quartz; toutefois, on comprend que cette précieuse qualité ne peut plus, au delà de certaines limites, être considérée comme un avantage, parce qu'elle rend la mise en œuvre de la pierre plus difficile et trop dispendieuse. Mais toutes les carrières de granit que renferme le sol de la France, ou du moins celles qui ont été mises au jour jusqu'à présent, sont

Digitized by Google

encore loin de présenter cette dureté exceptionnelle, et l'on peut sans crainte donner la préférence à la roche la plus dure.

Les granits ne sont pas, comme la plupart des autres pierres à bâtir, déposés par bancs réguliers dans le sein de la terre; ils existent par masses compactes dans le flanc des montagnes et paraissent y atteindre des proportions indéfinies; presque tous cependant offrent deux directions suivant lesquelles il est plus aisé de les diviser. Bien que difficiles à reconnaître à l'inspection de la pierre, elles n'échappent pas à l'habitude de l'ouvrier, qui les désigne et les distingue sous les noms de *grande feuille* et de *petite feuille*. Il importe beaucoup de ne pas confondre la grande et la petite feuille avec des solutions de continuité qu'on appelle des *glaces*, et qui sont dues à des fendillements plus ou moins anciens de la masse; loin d'être avantageuses, ces glaces, qui n'apparaissent souvent dans un gros bloc qu'après qu'il a coûté beaucoup de travail et d'argent pour sa préparation, sont au contraire des défauts très-graves et très-redoutés.

En France, les meilleurs granits sont ceux tirés de la Normandie et de la Bourgogne; on en trouve également dans presque toutes les autres contrées de notre pays; mais la Bretagne, l'Auvergne, les Vosges, les Pyrénées et les Alpes le fournissent surtout en grande abondance.

6. Les *grès* ne sont autre chose qu'une agglomération de grains de sable quartzeux, noyés dans un ciment siliceux, calcaire ou argileux; de là la distinction en *grès siliceux*, *grès calcaire* et *grès argileux*. Ils prennent d'ailleurs les noms de *poudingues* ou de *brèches*, quand les grains de sable sont de forte dimension et suivant que ces éléments sont arrondis ou anguleux.

Comme le quartz, les grès donnent des étincelles sous le briquet et ne font pas effervescence avec les acides; souvent complétement blancs, ils sont parfois colorés en gris ou en rouge par la présence de certains oxydes métalliques, principalement de l'oxyde de fer.

On reconnaît les *grès siliceux* à leur extrême dureté, à la finesse de leurs grains et à la ténacité de la matière qui en réunit les éléments; ils servent rarement comme pierre à bâtir, parce que leur constitution les empêche d'adhérer convenablement au mortier; ils ne sont même que d'un médiocre usage pour le pavage des rues et des routes.

Les *grès calcaires* ont différents degrés de dureté, en raison de l'abondance et du plus ou moins de fermeté du ciment calcaire qui en réunit les grains; aussi les distingue-t-on, sous ce rapport, par les dénominations de *grès tendre* et de *grès dur*. Les grès tendres s'écrasent trop facilement pour qu'ils puissent être utilisés comme pierres de construction; quelques-uns se réduisent en poudre sous la simple pression des doigts, et ils ne sont généralement applicables qu'à l'affûtage des outils.

Digitized by Google

Les grès calcaires durs, au contraire, servent non-seulement au pavage, mais sont aussi très-fréquemment employés comme pierres à bâtir dans les travaux publics. Ils ont l'avantage de réunir à une grande dureté, qui les rend capables de résister longtemps aux frottements et aux chocs, la propriété de se laisser débiter facilement et dans toutes les directions en masses de différentes formes et de toutes grandeurs.

Ces grès sont généralement blancs et d'un grain égal et fin ; on les trouve en bancs d'une grande étendue ou par blocs isolés au milieu d'un sable de même nature, qui prend, avec le temps, en s'agglutinant, la consistance de la masse.

Il existe beaucoup de carrières de grès dans les environs de Paris; la vaste forêt de Fontainebleau est tout entière assise sur un rocher de cette pierre et renferme, sous ce rapport, d'immenses richesses.

Le *grès argileux* se rencontre par couches, comme le grès calcaire et dans les mêmes conditions; il est de couleur grise et se laisse facilement tailler dans les premiers moments de son extraction; mais, dès qu'il a été pendant quelque temps soumis à l'action de l'atmosphère, il a acquis un degré de dureté qui le rend comparable aux pierres calcaires les plus résistantes. Cette matière est d'un usage fort répandu dans le sud-est de la France, où elle est ordinairement désignée sous le nom de *molasse*.

7. Les *meulières* sont ainsi nommées, parce qu'elles servent à former d'excellentes meules, soit d'une seule pièce, soit par l'assemblage de plusieurs morceaux ; elles se composent de débris quartzeux, de carbonate de chaux, d'alumine et d'oxyde de fer dans diverses proportions, et leur masse est criblée de cavités irrégulières qui les rendent très-propres à adhérer avec force au mortier et à entrer dans la maçonnerie. La variété qui porte le nom de *caillasse* présente toutefois une structure plus uniforme ; sa cassure est très-unie, et ces circonstances la font presque toujours proscrire des constructions importantes.

La meulière véritablement recherchée dans les maçonneries se rencontre par petites masses, en blocs peu épais et peu étendus, à une faible profondeur et parfois même à la surface du sol; sa couleur est d'un rouge jaunâtre, et ses cavités principales sont toujours remplies de terres rougeâtres dont il importe de purger les parties exposées à l'air, afin d'arrêter le développement de la végétation qui y entretiendrait l'humidité et altérerait bientôt les mortiers.

Les dimensions généralement restreintes des blocs de meulière ne permettent guère d'employer cette pierre, dans les parements vus des maçonneries, que comme moellon de petit appareil ; mais, outre qu'elle est très-dure, très-résistante et qu'elle brave impunément les influences atmosphériques, elle peut encore contribuer efficacement à la décoration

Digitized by Google

des ouvrages, par sa couleur et sa texture spéciales, qui la font trancher nettement avec les pierres de taille qui l'encadrent.

On fait un usage assez répandu de pierre meulière à Paris et dans ses environs, notamment pour l'établissement des murs des fosses d'aisances et des égouts publics; les revêtements des murs de l'enceinte fortifiée de la capitale sont également en meulière, et de nombreux ouvrages d'art, sur les canaux et les chemins de fer, doivent à l'emploi de cette pierre une partie du bon effet qu'ils produisent.

PIERRES ARGILEUSES.

8. Les *pierres argileuses* se distinguent des pierres calcaires en ce que, en général, elles ne font pas effervescence sous l'action des acides, et des pierres siliceuses en ce qu'elles ne produisent pas d'étincelles quand elles sont frappées par le briquet; elles affectent le plus souvent une texture schisteuse.

Les pierres argileuses propres à servir dans les constructions sont très-rares, et l'on n'en tire guère que des dalles propres soit au pavage, soit à la couverture des édifices. Aussi ne citerons-nous, comme type vraiment utile de cette classe, que le *schiste à ardoises*, d'un gris bleuâtre habituellement foncé, et qui a la propriété de se laisser diviser par feuillets minces et unis.

Les environs d'Angers fournissent des carrières abondantes d'excellentes ardoises auxquelles le commerce donne des dimensions appropriées à ses besoins; ces ardoises sont dures, légères, bien planes et d'une épaisseur uniforme; elles n'absorbent pas l'eau et se laissent tailler et percer sans se briser : telles sont d'ailleurs les qualités qui doivent être recherchées et réunies dans les bonnes ardoises.

II. BRIQUES.

9. Les *briques* sont des pierres factices composées principalement d'argile; soit qu'on les emploie après une simple dessiccation, soit qu'on leur fasse préalablement subir une cuisson à haute température, les briques proprement dites ont toujours la forme d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont variables selon les besoins et les localités, mais qui ont généralement leur longueur sensiblement double de la largeur, et cette dernière dimension double de l'épaisseur. Cependant les développements donnés dans ces derniers temps à l'art de bâtir ont conduit à fabriquer des briques sous toutes les formes appropriées aux besoins des constructions : pour les voûtes qui doivent supporter des pressions considérables, on en fait en forme de voussoirs; on en a de creuses pour les voûtes légères, les planchers et les cloisons; de circulaires pour les tuyaux de cheminée; de plates, à base carrée ou hexagonale, pour le carrelage des lieux couverts, etc.

Digitized by Google

Nous ne parlerons ici que pour mémoire des briques crues ; si bien qu'on les ait fait sécher avant leur emploi, elles sont toujours d'un mauvais usage à l'humidité, surtout quand elles ne sont pas recouvertes : aussi est-il rare qu'elles résistent longtemps à l'action délétère des gelées et des pluies prolongées. Elles sont exclues à bon droit des constructions de quelque importance, et jamais il n'en est fait le moindre usage dans les travaux publics.

10. La brique cuite est donc la seule qui doive nous occuper ici. L'argile commune est la terre employée à la fabrication de ces matériaux, et c'est par des essais qu'on reconnaît la nature et la quantité des substances étrangères par lesquelles il convient de l'amender.

Quatre opérations distinctes constituent la conversion complète de l'argile en briques ; ce sont : 1° la préparation de la terre ; 2° le moulage ; 3° le séchage, et 4° la cuisson. Examinons-les rapidement dans l'ordre qui vient d'être indiqué.

La terre destinée à la confection des briques s'extrait d'ordinaire avant le commencement de l'hiver, vers le mois de novembre, et ce n'est qu'au printemps qu'on la jette dans les fosses où elle doit recevoir la manipulation nécessaire au succès de l'opération. Pendant tout l'hiver l'argile reste exposée aux intempéries atmosphériques ; on a même le soin de la remuer fréquemment pour en soumettre successivement toutes les parties à l'action de l'air, et cette main-d'œuvre a pour résultat de rendre la matière plus facile à travailler qu'au moment où elle vient d'être extraite du sein de la terre. On jette donc au printemps l'argile à briques dans des fosses solidement construites en maçonnerie, et l'on y ajoute la quantité d'eau nécessaire pour en former une pâte ferme, mais suffisamment susceptible d'être corroyée par des ouvriers qui descendent dans les fosses, armés de bêches et les pieds nus. Là, ces ouvriers triturent profondément la terre en la piétinant, la *marchent*, pour employer l'expression technique, en y ajoutant les matières reconnues nécessaires, et en purgeant soigneusement la masse des petites pierres qui se trouvent fréquemment dans l'argile et qui nuiraient à la qualité de la brique. La *marche* de la terre à briques est une opération très-importante pour la bonne réussite de l'entreprise ; mais elle est longue, pénible et dangereuse pour la santé des ouvriers : les tentatives faites, dans ces derniers temps, pour lui substituer l'emploi d'un manége n'ont pas pu remplacer l'habitude du marcheur pour l'enlèvement des matières nuisibles.

Le *moulage* s'exécute, dès que le mélange est assez homogène, dans des cadres sans fond, en bois ou en fer, qui ne contiennent la terre que latéralement et auxquels on a soin de donner des dimensions un peu supérieures à celles que doivent avoir les briques, pour compenser le retrait de l'argile dans la cuisson, retrait variable, dont l'expérience détermine

Digitized by Google

la valeur pour chaque espèce de terre. Dès que les briques ont acquis, par une première dessiccation, un degré de fermeté qui permet de les transporter impunément, on les porte au *séchoir*, ordinairement abrité par un hangar contre l'action directe du soleil; sans cette dernière précaution, la partie extérieure des briques se desséchant trop promptement et inégalement sur toutes les faces, les briques se tourmenteraient et l'humidité intérieure ne pourrait plus sortir qu'en faisant gercer et brisant la première enveloppe. Soit que le séchage se fasse sous un hangar, soit que l'on dresse, avec les briques elles-mêmes, des murailles à jour que l'on recouvre de planches ou de paillassons, il importe de les disposer toujours de manière à faciliter les courants d'air et à multiplier les surfaces en contact avec eux; c'est là une opération longue: elle ne dure presque jamais moins d'un mois, et il faut quelquefois bien davantage.

Il existe un autre procédé de séchage beaucoup plus expéditif et dont les produits sont bien supérieurs; il consiste à placer la brique préparée dans un moule de fonte et à la frapper d'un coup de balancier. L'eau, que l'évaporation n'enlèverait que lentement, se trouve instantanément et complétement chassée par ce choc; mais la différence notable dans les frais laissera toujours la supériorité à l'ancienne méthode.

Enfin, on procède à la *cuisson* des briques, soit dans des fours avec du bois ou de la tourbe, soit en plein air avec de la houille.

Dans les fours, dont les dimensions varient du reste en raison de la quantité de briques à faire cuire, on place ces dernières de champ, par couches horizontales croisées en sens inverse, de manière à favoriser le tirage et à rendre la cuisson aussi uniforme que possible. Pour la conduite du feu, il importe surtout de ne pousser la chaleur que quand la masse entière est suffisamment échauffée, et de fermer hermétiquement le four lorsque la cuisson est terminée, pour que le refroidissement n'ait lieu que lentement.

Si l'on opère en plein air, on place aussi les briques de champ, par lits horizontaux alternant avec des couches de houille menue de 2 à 3 centimètres de hauteur, et l'on enveloppe latéralement le *tas* avec de l'argile détrempée, pour s'opposer autant que possible à l'action du vent ou de la pluie. Comme dans les fours, on ne retire les briques que plusieurs jours après l'extinction du feu, de peur de les rendre cassantes par un refroidissement trop rapide.

Dans les contrées où la houille abonde, le mode de cuisson en plein air est beaucoup plus économique que le premier; mais son exécution présente plus de difficultés et il donne des produits moins parfaits: les briques ne sont pas cuites aussi uniformément, et il y en a beaucoup plus qui se déforment ou se fendent sous les pressions inégales auxquelles elles sont nécessairement soumises. C'est d'ailleurs vers le tiers de la hauteur du four, ou du tas, que se trouvent les briques les plus estimées, par la rai-

Digitized by Google

son qu'elles sont cuites au degré le plus convenable et qu'elles ne sont presque pas déformées.

11. On reconnaît facilement les briques de mauvaise qualité par leur teinte jaune-rougeâtre et par le son sourd qu'elles rendent sous le marteau ; elles s'émiettent facilement sous les doigts, se brisent sans le moindre effort et absorbent l'eau avec avidité.

Les bonnes briques, au contraire, rendent un son clair par la percussion ; elles sont dures et ont le grain fin et serré dans la cassure : leur couleur est ordinairement d'un rouge brun foncé, et leur surface présente quelquefois des parties vitrifiées. Il ne faudrait toutefois pas se fier aveuglément à ce dernier caractère ; car, souvent, des briques faites avec de l'argile impure ou mal préparée doivent au degré de cuisson seul ce commencement de vitrification : il n'est même pas rare que le fabricant provoque spontanément cet effet, en répandant sur la plate-forme du séchoir du sable siliceux fin et du mâchefer qui s'attachent à la surface encore humide des briques, et dont la fusion, au moment de la cuisson, donne une belle apparence à des produits du reste très-défectueux.

III. CHAUX ET CIMENTS.

12. Sous le nom de *pierres à chaux*, on désigne en général toutes les variétés de pierres qui contiennent, plus ou moins mélangé de matières étrangères, le carbonate de chaux, lequel laisse échapper son acide carbonique, s'il est soumis à une température suffisante, et reste à l'état de *chaux ;* on conclut sans peine que la dénomination de *pierres calcaires* énoncée plus haut (3) est identique avec celle de *pierres à chaux*, plus communément employée quand on a spécialement en vue la fabrication de ce précieux produit.

Dans l'état où se présente une chaux quelconque à sa sortie du four, elle ne contient pas d'eau ; elle est *vive*. Dès qu'on la met en contact avec l'eau, elle *s'éteint* en dégageant une certaine quantité de chaleur, et se réduit en poudre impalpable ou en pâte plus ou moins épaisse.

Lorsque la chaux est pure ou à peu près pure, elle augmente considérablement de volume lors de l'extinction ; son *foisonnement* est tel que le volume de la chaux éteinte devient, suivant les circonstances, égal à deux et même à trois fois celui de la chaux vive. Les chaux qui jouissent de cette propriété sont dites *chaux grasses ;* réduites en pâte par l'adjonction d'une certaine quantité d'eau, s'il est nécessaire, elles se dessèchent par l'évaporation de l'eau surabondante, et acquièrent, au bout d'un certain temps, une assez grande dureté que favorise notablement l'absorption de l'acide carbonique contenu dans l'air.

Si, au contraire, la chaux vive contient seulement de 0,10 à 0,30 de

Digitized by Google

matières étrangères, elle ne foisonne plus, ou presque plus, dans l'extinction; c'est une *chaux maigre*.

13. Parmi les chaux maigres, il en est qui doivent à la nature et aux proportions des substances qui en altèrent la pureté, la propriété remarquable de durcir, non-seulement à l'air libre, mais même et mieux encore quand elles sont employées sous l'eau. Ces chaux prennent alors le nom de *chaux hydrauliques;* elles sont fournies par les calcaires argileux, et elles doivent cette précieuse faculté à la présence de la silice, dont l'action est toutefois augmentée par l'adjonction d'une certaine quantité d'alumine ou de magnésie.

C'est à M. l'Inspecteur général des Ponts et Chaussées Vicat que l'on doit la mise en lumière des propriétés si importantes des chaux hydrauliques. Cet Ingénieur, dont le nom est désormais attaché à cette branche essentielle des constructions, divise les chaux hydrauliques en trois classes, suivant le degré de rapidité de leur durcissement, qu'il regarde comme consommé dès que la chaux en pâte supporte, sans dépression sensible, une aiguille à tricoter de $0^{m},0012$ de diamètre, limée carrément à son extrémité et chargée d'un poids de $0^{k},30$; lorsqu'elle a acquis cette consistance, la chaux résiste au doigt poussé avec la force ordinaire du bras, et elle ne peut plus changer de forme sans se briser.

Après des expériences nombreuses qui ont embrassé presque toutes les chaux fournies par les calcaires de notre pays, M. Vicat a donc établi trois classes de chaux hydrauliques, sous les désignations suivantes :

Chaux moyennement hydrauliques,

Chaux hydrauliques,

Chaux éminemment hydrauliques.

Les premières font prise au bout de quinze à vingt jours d'immersion; les secondes ne demandent que six à huit jours, et les troisièmes acquièrent le degré de dureté nécessaire du deuxième au quatrième jour.

14. Dans les pierres calcaires qui sont propres à fournir de la chaux hydraulique, la quantité d'argile est toujours comprise entre le neuvième et le quart du carbonate de chaux, soit de 10 à 20 parties d'argile pour une quantité de chaux variant entre 90 et 80; toutes choses égales d'ailleurs, la propriété hydraulique est d'autant plus développée que la proportion se rapproche davantage de la dernière limite. Mais, si l'argile dépasse 25 pour 75 parties de carbonate, le résidu de la calcination ne fuse plus quand on le met en contact avec l'eau, et ne peut plus être, à proprement parler, considéré comme une chaux. Si cependant on le gâche, après l'avoir réduit mécaniquement en poudre fine, il fait prise avec une grande promptitude, soit à l'air, soit à l'eau, et acquiert en peu de temps une très-grande dureté.

On comprend qu'une pareille propriété soit de nature à rendre de pré-

Digitized by Google

cieux services dans la construction des ouvrages immergés ou accidentellement soumis au contact de l'eau ; aussi cette matière est-elle d'une grande valeur et fort employée sous les divers noms de *plâtre-ciment*, *ciment romain*, *ciment Parker*, *ciment de Pouilly*, *etc.* M. Vicat l'a désignée sous le nom de *ciment naturel*, et appelle *chaux-limites* des produits compris, sous le rapport de la proportion d'argile, entre les chaux hydrauliques et les ciments, et qui forment, pour ainsi dire, le passage des unes aux autres.

Enfin, quand la quantité proportionnelle d'argile dépasse 65 pour 35 de carbonate de chaux, le produit de la calcination, à quelque degré qu'elle ait été poussée, est complétement incapable de durcir seul, dans quelque condition qu'on le place ; il ne peut plus être utilement employé que dans la fabrication des mortiers et en qualité de pouzzolane, comme nous le verrons bientôt.

15. Nous avons dit que la mise en œuvre de la chaux exigeait que cette matière fût préalablement éteinte ; on distingue trois modes d'extinction, dont le choix influe notablement sur la manière dont se comportent les produits.

1°. L'*extinction ordinaire* s'opère en plaçant la chaux vive dans un bassin en maçonnerie ou en bois, et en jetant sur la masse une quantité d'eau convenable pour la réduire en bouillie. Par cette opération, la chaux se fend avec bruit, se boursoufle, produit un dégagement considérable de vapeurs brûlantes et légèrement caustiques, et se fond enfin en une pâte épaisse.

Il importe beaucoup de ne pas confondre ce procédé avec celui qu'emploient trop facilement les maçons, quand ils ne sont pas surveillés ; il consiste à verser sur la chaux assez d'eau pour l'amener à une consistance laiteuse et à la laisser couler ensuite dans un second bassin perméable, où elle s'affermit en perdant l'eau qu'elle contient en excès. Dans ce dernier cas, la chaux est noyée et a perdu beaucoup de ses qualités.

On doit avoir soin, quand on emploie la méthode d'extinction ordinaire que nous avons décrite, de verser toute l'eau nécessaire en une seule fois ; s'il arrivait que l'eau ne fût pas en assez grande quantité, la chaux décrépiterait à sec, et l'addition d'un nouveau volume d'eau produirait, avec un sifflement considérable, une division très-imparfaite de la matière.

Quoi qu'il en soit, ce premier procédé, s'il est appliqué convenablement, est celui qui procure, pour toutes les chaux, le foisonnement le plus considérable, et leur assure, lorsqu'elles ne sont mélangées avec aucune autre matière, le plus grand degré de dureté. Éteinte en bouillie très-épaisse, la chaux grasse donne deux et quelquefois trois volumes pour un ; les chaux maigres et, par conséquent, les chaux hydrauliques donnent encore un volume et un quart et même quelquefois un volume et demi.

2°. Le second procédé, connu sous le nom d'*extinction par immersion*,

Digitized by Google

consiste à placer la chaux vive, préalablement concassée en morceaux de la grosseur d'une forte noix, dans un panier à claire-voie, et à la plonger ainsi dans l'eau pendant quelques secondes; on la retire avant la fusion; elle siffle, éclate avec bruit, répand des vapeurs brûlantes et tombe en poudre. On peut conserver longtemps la chaux dans cet état, pourvu qu'on la mette soigneusement à l'abri de l'humidité; pour obtenir ce résultat, on la place dans des sacs, et elle peut être transportée ainsi sans rien perdre de ses qualités.

Ce mode d'extinction est surtout employé pour les chaux hydrauliques, à l'égard desquelles il donne des résultats à peu près aussi satisfaisants que le premier sous le rapport du foisonnement.

3°. Par l'*extinction spontanée*, on expose purement et simplement la chaux à l'action lente et continue de l'atmosphère dont elle absorbe l'humidité; elle s'y réduit en poudre fine avec un léger dégagement de chaleur et sans vapeurs. Ce mode est rarement employé pour les chaux hydrauliques, qui perdent de leurs qualités à l'air; mais il convient pour les chaux grasses, dont l'exposition à l'air transforme quelques particules en carbonate de chaux, ce qui facilite le durcissement quand ces chaux sont mélangées avec du sable.

Enfin, il faut conclure de ce qui précède que les trois modes d'extinction décrits donnent des résultats différents, non-seulement sous le rapport du volume, mais encore sous le rapport du poids relatif des produits obtenus, par suite des quantités d'eau variables que la chaux absorbe dans chaque opération; en d'autres termes, trois volumes égaux d'une même chaux quelconque, mesurés en pâte d'égale consistance obtenue par chacun des trois procédés d'extinction, ne contiennent ni la même quantité de chaux, ni la même quantité d'eau.

Il est bon d'ajouter que la plupart des chaux éprouvent, en durcissant, un retrait plus ou moins important qui en réduit le volume; ce retrait est d'ailleurs d'autant plus prononcé, que la chaux considérée est plus grasse et que, par une circonstance quelconque, son foisonnement a été plus considérable.

16. L'eau qu'il convient d'employer pour l'extinction des chaux doit être aussi pure que possible; les eaux saumâtres, et principalement les eaux de la mer, doivent être sévèrement proscrites; ces dernières, quand on les emploie à la fabrication des mortiers, rendent la dessiccation plus lente et produisent pendant longtemps, à la surface des maçonneries, des efflorescences salines qui doivent les faire rejeter pour toutes les parties visibles des constructions, principalement pour l'édification des maisons d'habitation.

17. Bien que la chaux hydraulique, ou plutôt la pierre propre à la produire, soit assez commune dans la nature, il n'est pas moins beaucoup de

Digitized by Google

localités où cette matière ne peut être employée qu'au moyen de transports lointains qui en augmentent singulièrement le prix. Les précieux travaux de M. Vicat l'ont encore naturellement conduit à essayer et à propager la fabrication des *chaux hydrauliques artificielles* par le mélange intime des divers éléments qne l'analyse avait fait découvrir comme essentiels dans la composition des chaux hydrauliques naturelles. Deux procédés différents sont mis en usage pour cette préparation. Le plus parfait, mais aussi le plus dispendieux, consiste à mêler de la chaux grasse, et déjà cuite d'une manière quelconque, avec une certaine proportion d'argile, à réduire le mélange en pains et à le soumettre à une nouvelle cuisson; c'est ainsi que s'obtient la chaux artificielle dite de *double cuisson*.

Dans le second procédé, on réduit en poudre un calcaire plus ou moins argileux; on y ajoute la dose d'argile que des essais chimiques ou une cuisson préalable ont montrée nécessaire pour réunir les proportions propres à fournir la chaux hydraulique que l'on veut produire; puis, après un mélange aussi intime que possible, on réduit le tout en pâte avec de l'eau et l'on soumet à la cuisson. Cette méthode exige d'abord que l'on fasse choix d'un calcaire qui puisse être facilement broyé, de la *craie* par exemple, ou du *calcaire marneux;* en outre, le mélange qui s'opère au moyen de manéges semblables à ceux que l'on emploie, sur les grands chantiers de construction, à la fabrication du mortier, paraît devoir toujours être plus complet dans le premier système que dans le second, et ce dernier est regardé comme inférieur à l'autre quant à la qualité des produits; mais la raison de dépense le fait néanmoins préférer toutes les fois que la nature du calcaire disponible le permet.

IV. SABLES ET POUZZOLANES.

18. Quelle que soit la nature d'un sable quelconque, il est certain que cette substance est le produit de la désagrégation de l'une des roches qui composent l'enveloppe terrestre; de là résulte une grande variété dans la grosseur, dans la forme et dans la composition de ses grains.

Outre les sables que l'on trouve en abondance dans le lit des rivières et sur les rivages de la mer, on rencontre aussi d'immenses dépôts de *sables fossiles* qui sont le produit des révolutions que le globe a subies à des époques très-reculées, et que les eaux ont charriés sur les points où nous les voyons aujourd'hui; enfin, il en est d'autres qui sont le résultat de la décomposition spontanée, actuelle et sur place, de certaines montagnes et principalement des montagnes granitiques au pied desquelles ils gisent. Ces derniers, qui sont toujours mélangés d'argile en proportions variables, se désignent sous les noms spéciaux de *sables vierges* ou *arènes*.

En général, les sables sont quartzeux, parce que les grains argileux et calcaires sont trop tendres pour résister aux chocs et aux frottements

Digitized by Google

réitérés qu'ils éprouvent dans les maniements et les transports qu'ils ont à subir, et se réduisent bientôt à l'état de boue ou de poussière. Ils s'emploient, dans les constructions, soit comme éléments des mortiers, soit seuls, pour l'établissement des pavages ou pour asseoir des fondations sur les terrains peu résistants.

19. Mélangé, dans la fabrication des mortiers, avec la chaux qui n'a généralement aucune action sur lui, le sable a simplement pour objet:

1°. De diminuer la consommation de la chaux et, par suite, la dépense;

2°. De prévenir les gerçures dans les maçonneries, en modérant et régularisant le retrait de la chaux, lors du durcissement;

3°. De faciliter la dessiccation et la régénération du carbonate de chaux, et par conséquent d'accélérer la prise;

4°. Enfin, d'augmenter la solidité des mortiers.

Il ne convient d'ailleurs à cet usage qu'autant qu'il est parfaitement débarrassé, par le lavage, de toutes les matières terreuses, argileuses ou animales qu'il pourrait contenir. Les sables de mer, auxquels la présence du sel communique des propriétés hygrométriques, ne peuvent également être employés dans les mortiers qu'après un lavage abondant à l'eau douce, ou après une exposition d'une année au moins à l'action des pluies.

20. Le sable est employé dans les pavages et dans quelques fondations, à cause des propriétés qu'il a : 1° d'être très-résistant à l'écrasement; 2° d'être à peu près incompressible dès qu'il a subi un tassement suffisant; 3° de ne pas faire pâte avec l'eau, quand il a été préalablement purgé de toute matière étrangère. Pour ces ouvrages, les sables les plus recherchés sont naturellement les sables quartzeux, à grains fins et arrondis, ces qualités favorisant mieux que toute autre l'assimilation d'une masse sableuse à un liquide qui remplirait les interstices compris entre les pavés, sans laisser se créer aucun vide à la suite des trépidations du roulage, ou qui répartirait uniformément dans tous les sens les pressions des masses supportées et les empêcherait de s'accumuler d'une manière nuisible sur certains points en particulier.

21. Nous terminerons ce que nous avons à dire ici sur les sables, en exposant que les sables arènes, lesquels, comme nous l'avons vu, contiennent toujours plus ou moins d'argile, possèdent seuls la propriété remarquable de former, par leur mélange avec la chaux grasse, des mortiers qui jouissent à un certain degré de la vertu hydraulique.

22. On donne généralement le nom de *pouzzolanes* à des substances qui, mélangées dans des proportions convenables avec de la chaux grasse, fournissent des mortiers capables de durcir plus ou moins rapidement sous l'eau. Certains produits naturels jouissent de cette propriété; ce

Digitized by Google

sont des matières volcaniques, pulvérulentes, essentiellement composées de silice et d'alumine, combinées avec quelques autres substances, telles que la chaux, la potasse, la soude, l'oxyde de fer et autres : leur couleur, le plus souvent brune, passe quelquefois au rouge, au jaune ou au gris. Quelques pierres volcaniques sont également susceptibles de devenir, par la pulvérisation, d'excellentes pouzzolanes; d'autres, telles que les basaltes, ont besoin d'être soumises à une chaleur très-intense pour acquérir cette propriété : les arènes citées plus haut remplissent, ainsi que nous l'avons indiqué (21), le rôle de pouzzolanes naturelles, peu énergiques à la vérité, mais dont la puissance peut être sensiblement augmentée par la chaleur.

Toutes ces pouzzolanes n'ont pas la même énergie et c'est, comme pour la chaux, par des essais, qu'on détermine la valeur hydraulique de telle ou telle substance, ainsi que la proportion dans laquelle elle doit être mélangée à la chaux pour produire de bon mortier.

23. Comme pour les chaux hydrauliques, on a suppléé à la pouzzolane naturelle par la fabrication de *pouzzolanes artificielles*, en soumettant à une torréfaction intense des corps essentiellement composés de silice et d'alumine; les matières le plus généralement employées à cet usage sont les argiles, les vases tirées des ports de mer, les arènes, des schistes argileux, etc. On les fait cuire, soit en fragments irréguliers, soit en pains à la manière des pierres à chaux ou des briques, soit encore pulvérisées et dans des fours à réverbères.

Le degré de chaleur nécessaire à la bonne fabrication des pouzzolanes varie considérablement avec la nature des matières employées; pour chacune d'elles, il est un point qui correspond au maximum d'énergie, et qu'il faut atteindre sans le dépasser, sous peine de voir rapidement décroître la qualité du produit; c'est encore par des essais spéciaux que l'on détermine, dans chaque cas, à quelle température il convient de porter la matière, et pendant combien de temps il faut l'y maintenir.

24. On utilise comme pouzzolanes certains produits de l'industrie, tels que les débris pulvérisés de tuileaux et de briques, quelques cendres de houille et de tourbe, les cendres de bois et le ciment d'eau-forte, résidu provenant de la fabrication de l'acide nitrique au moyen de l'argile et du nitrate de potasse. Ce résidu se comporte comme une pouzzolane très-énergique; mais son prix élevé en restreint beaucoup l'emploi.

25. Nous avons dit qu'on ne pouvait rigoureusement juger que par des essais de la qualité d'une pouzzolane, soit naturelle, soit artificielle; cependant l'inspection de la contexture et quelques expériences rapides fournissent presque toujours de très-utiles indications : la dureté du grain, l'aspect vitreux ou émaillé, le refus de happer à la langue, en un mot, tout ce qui annonce une grande cohésion, doivent être regardés comme

Digitized by Google

des signes à peu près certains de qualités pouzzolaniques peu développées. De plus, les pouzzolanes dépouillent l'eau de chaux quand on les projette à l'état pulvérulent dans ce liquide, et se laissent en général attaquer par les acides; il est même regardé comme certain que la plupart d'entre elles sont d'autant plus énergiques qu'elles manifestent ces propriétés à un plus haut degré.

Il y a, du reste, deux choses à considérer dans l'appréciation d'une pouzzolane, la promptitude de la prise et la dureté ultérieure du mortier dans lequel on la fait entrer, qualités que l'expérience démontre n'être pas toujours proportionnelles. Quand le constructeur a le choix entre plusieurs substances, c'est à lui qu'il appartient de donner la préférence à l'une ou à l'autre de ces deux qualités, suivant la nature du travail qu'il veut exécuter.

V. MORTIERS.

26. On donne le nom de *mortier* à tout mélange de chaux éteinte, réduite en pâte molle, avec du sable ou de la pouzzolane, quelquefois avec l'une et l'autre de ces matières; leur propriété essentielle est de durcir plus ou moins rapidement en adhérant fortement aux matériaux de construction, de manière à les relier et à en former des masses solides. Nous n'avons pas besoin d'expliquer ni de motiver la distinction des mortiers en *mortiers hydrauliques* et *mortiers non hydrauliques;* il est assez clair que ces dénominations tiennent à la manière dont ils se comportent, quand ils sont employés sous l'eau.

27. Le mortier formé du mélange d'une certaine quantité de sable avec de la *chaux non hydraulique,* grasse ou maigre, durcit assez rapidement à l'air, par dessiccation et absorption d'acide carbonique; mais il n'y prend jamais autant de cohésion que la chaux seule placée dans les mêmes circonstances. Employé sous l'eau, ce mortier reste indéfiniment mou et se dépouille de toute la chaux qu'il contient, si l'eau est suffisamment renouvelée; s'il est enfoui dans le sol, à l'abri du contact de l'air, il conserve la même consistance pendant de nombreuses années, et s'il finit par y durcir, ce n'est qu'avec une extrême lenteur.

Si nous substituons de la pouzzolane au sable, le mortier devient hydraulique; il fait prise plus ou moins rapidement, suivant la qualité de la nouvelle substance, mais toujours en fort peu de temps, et acquiert, soit enfoui, soit sous l'eau, une dureté supérieure à celle de beaucoup de pierres de construction. A l'air libre, ce mortier ne se comporte toutefois pas bien; il devient promptement pulvérulent et il est facilement attaqué par les gelées; si l'on met une certaine quantité de sable avec la pouzzolane, il en résulte un mortier dont la prise est plus lente, mais qui est beaucoup moins gélif et plus économique.

Digitized by Google

28. Les *chaux hydrauliques* mélangées avec du sable donnent des mortiers hydrauliques, c'est-à-dire, qui durcissent sous l'eau et en dehors du contact de l'air, de la même manière que la chaux elle-même, et y acquièrent à très-peu près le même degré de dureté. S'ils sont exposés à l'air, ces mortiers deviennent encore beaucoup plus durs, et d'autant plus que la chaux qu'ils contiennent est plus hydraulique; il n'en est pas de meilleur pour les constructions élevées au-dessus du sol.

On ne fait jamais de mortier avec de la chaux éminemment hydraulique et de la pouzzolane; la substitution de cette dernière matière au sable n'ajouterait rien aux vertus du mélange et ne serait qu'une dépense en pure perte, soit qu'il s'agisse de constructions immergées ou enfouies, soit qu'on l'emploie à des travaux extérieurs. Mais si l'on ne dispose que de chaux peu hydrauliques ou de chaux supérieures légèrement avariées, il y a toujours avantage à ajouter au sable une certaine dose de bonne pouzzolane, ou à lui substituer une pouzzolane peu énergique; exposés à l'air libre, ces mortiers résistent moins bien sans doute qu'enfouis ou immergés, mieux toutefois que ceux de chaux grasse et de pouzzolane.

En résumé, les meilleurs mortiers, pour les ouvrages placés sous l'eau, sont ceux de chaux non hydraulique avec pouzzolane, ou de chaux peu hydraulique avec sable et pouzzolane; et les mortiers les plus convenables pour les constructions exposées à l'action de l'air sont ceux de chaux hydraulique avec sable; il y a cela de remarquable, dans cet exposé, que les chaux changent de rôle par suite de leur tranformation en mortier.

29. Il ne faut d'ailleurs pas perdre un instant de vue que les proportions dans lesquelles on réunit les divers ingrédients doivent exercer une très-grande influence sur les qualités du mélange. Celles qui donnent les meilleurs résultats ne sont point constantes: elles dépendent de la nature des matières employées et de l'usage auquel on destine le mortier, et elles doivent être déterminées, dans chaque cas en particulier, par des expériences spéciales. On peut dire cependant que, en général, on doit prendre, avec les chaux grasses éteintes suivant le procédé ordinaire, de 200 à 250 parties de sable pour 100 parties de chaux éteinte en pâte ferme, et, avec les chaux hydrauliques de divers degrés, de 180 à 200 de sable pour 100 de chaux éteinte, toutes ces mesures étant prises au volume.

Quant à la pouzzolane, lorsqu'elle est employée à la confection du mortier, il est essentiel que son poids ne soit pas au-dessous de cinq fois celui de la chaux, ce dernier étant évalué avant l'extinction.

30. Pour qu'un mortier possède toutes les qualités que l'on doit attendre de sa composition, il ne faut pas le délayer dans une trop grande quantité d'eau, suivant la pratique habituelle et vicieuse de la plupart de nos maçons; il faut, au contraire, les gâcher en pâte ferme, sauf à n'en préparer à la fois que la quantité qui peut être employée dans la même journée.

Digitized by Google

Il n'importe pas moins de s'opposer à une trop prompte dessiccation du mortier, lorsqu'il a été mis en œuvre; car, si l'eau qu'il contient lui est brusquement enlevée, soit par une température élevée, soit par l'absorption des pierres avec lesquelles il est mis en contact, il devient bientôt pulvérulent et perd à peu près complétement toute vertu. On prévient facilement cet effet en abritant le mortier et, si faire se peut, les maçonneries contre les rayons solaires pendant les fortes chaleurs, et en arrosant les pierres, en abreuvant même celles qui sont poreuses et les briques, avant de les mettre en place dans la construction.

Les gelées exercent une action plus désastreuse encore sur tous les mortiers qui n'ont pas acquis un certain degré de dureté avant d'y être exposés. Un mortier n'est complétement à l'abri de cette active cause de détérioration qu'environ six mois après sa confection et son emploi; un temps un peu plus long est nécessaire pour les mortiers de chaux grasses; il en faut un peu moins pour ceux de chaux hydrauliques et d'autant moins, dans l'un et l'autre cas, qu'ils renferment une plus forte proportion de sable.

31. La manière dont on prépare le mortier exerce aussi beaucoup d'influence sur les qualités de cette matière; quels que soit les procédés de manipulation que l'on emploie, il faut toujours tendre à mélanger intimement les divers ingrédients, sans introduire un plus grand volume d'eau qu'il n'est strictement nécessaire.

Sur les chantiers peu importants, où l'on n'a que de faibles quantités de mortier à faire à la fois, le mélange se fait simplement à bras d'hommes, au moyen de rabots en bois ou en fer; quelquefois, quand la chaux a acquis assez de consistance et que le sable est assez sec pour rendre l'usage du rabot trop pénible, on opère la trituration avec des pilons ou des fléaux en fer, et ce dernier mode, bien que plus dispendieux, mérite encore la préférence, en ce qu'il divise mieux la chaux, rend le mélange plus homogène, tout en exigeant l'addition d'une moindre quantité d'eau.

Si la consommation du mortier doit être plus considérable, l'économie commande de recourir à des machines mues soit par des chevaux, soit même par la vapeur.

Cette manipulation mécanique s'opère généralement à l'aide d'un simple manége faisant tourner une, deux, rarement trois roues dans une auge circulaire qui reçoit en même temps les matières à mélanger; le diamètre de ces roues varie de $1^m,70$ à $1^m,90$, et leur jante présente une largeur de $0^m,10$ à $0^m,15$; l'auge est elle-même évasée et n'a dans le fond que $0^m,65$ environ de largeur dans le sens du rayon ou du bras du manége. L'une des roues est disposée de manière à tourner contre le bord extérieur et l'autre contre le bord intérieur; elles broient ainsi le mortier qui leur est sans cesse ramené par des rabots en forme de socs de char-

Digitized by Google

rue, lesquels sont également fixés au bras mobile et participent au mouvement de l'appareil. Enfin, un autre rabot, ayant la forme de la section transversale de l'auge, se meut au-dessus d'elle pendant la trituration des matières, et est décroché quand le mélange est accompli, pour amener le mortier à une vanne de fond que l'on ouvre alors, et qui communique avec un hangar couvert préparé dans ce but.

On fabrique aussi le mortier, sur les grands chantiers, dans des cuves cylindriques ou légèrement évasées par le haut, et percées à leur partie inférieure d'une porte latérale à coulisse qui sert à la sortie du mélange. La cuve tourne autour d'un arbre dont l'axe se confond avec le sien; quelquefois, au contraire, c'est l'arbre qui se meut autour de la cuve immobile. Quoi qu'il en soit, ledit arbre, souvent aussi les parois intérieures de l'enveloppe, sont armés horizontalement et à diverses hauteurs de râteaux en fer à dents verticales, disposés de manière à s'entre-croiser les uns avec les autres. Des chevaux ou une machine à vapeur impriment un mouvement de rotation à tout le système dont l'arbre seul est fixe, et les éléments du mortier, versés par la partie supérieure, arrivent au bas parfaitement divisés et mélangés.

Il est bon de remarquer que, quel que soit le mode de fabrication que l'on emploie, le volume du mortier est toujours moindre que celui des ingrédients mélangés; l'importance de cette réduction dépend à la fois de la nature et des proportions des matières, et elle ne peut guère être évaluée, dans chaque cas particulier, qu'au moyen d'expériences directes. On comprend, en effet, que la chaux mêlée au sable vient naturellement occuper tout ou partie des vides que laissent entre eux les grains de ce dernier, et que, par suite, il n'est pas surprenant de voir le volume du mélange différer plus ou moins de la somme des volumes mélangés.

32. La solidification des mortiers, quand ils ont été soigneusement confectionnés et placés dans des circonstances favorables, paraît s'accroître indéfiniment; mais les progrès sous ce rapport se ralentissent bientôt avec l'âge; deux ans au plus après l'époque de leur fabrication, le durcissement des mortiers à chaux hydraulique n'est plus sensible. Toutefois, ce qui précède explique facilement l'extrême dureté des mortiers employés par les Romains dans les constructions séculaires qui sont parvenues jusqu'à nous, sans qu'il soit besoin de supposer que ce peuple avait des procédés spéciaux et inconnus de ses descendants pour l'art de construire en général, et pour la fabrication des mortiers en particulier.

VI. BÉTONS.

33. On donne le nom de *béton* à un mélange de mortier hydraulique avec des cailloux ou de menus éclats de pierre; plus économique que le mortier seul, ce mélange, employé dans les maçonneries, offre aussi plus

Digitized by Google

de résistance. Quelquefois mis en œuvre dans les constructions non submergées, pour les remplissages ou pour faire des voûtes, il est surtout précieux dans l'établissement des fondations, lorsqu'elles sont sous l'eau. C'est presque exclusivement à ce dernier usage que le béton s'applique dans les travaux publics.

34. La nature du mortier qui entre dans la composition du béton, ainsi que l'adhérence des pierres employées, influent considérablement sans doute sur la promptitude de la prise et la résistance ultérieure à l'écrasement sous les charges considérables qui lui seront imposées; mais ces qualités dépendent aussi des proportions des matières mélangées, proportions qui doivent elles-mêmes varier avec la nature de ces matières et la destination du mélange.

Généralement, le béton se compose de 3 à 4 parties de pierres réduites, s'il est besoin, à la grosseur maximum de $0^m,05$, à $0^m,06$, avec 2 parties de mortier, et cette opération amène une réduction de volume de 20 à 25 pour 100 par l'interposition du mortier entre les vides de la pierre.

Pour obtenir un béton bien plein, imperméable à l'eau, il faudrait évidemment y introduire un cube de mortier au moins égal à celui des vides; le moyen de connaître ce dernier consisterait à remplir de cailloux un vase de capacité connue, et à y verser ensuite de l'eau jusqu'à ce que le liquide affleurât les bords; le volume d'eau versé, pourvu que les pierres ne fussent pas susceptibles d'être intimement pénétrées par l'eau, donnerait précisément le cube cherché. Mais, lorsque le béton n'est pas destiné à résister à la pression de l'eau, quand il n'a pas besoin d'être rigoureusement imperméable et qu'il suffit qu'il soit incompressible, le volume du mortier peut quelquefois être inférieur à celui des vides de la pierre, et c'est par rapport à cette quantité relative de mortier qui entre dans le mélange, que les ouvriers ont adopté la distinction de *béton gras* et de *béton maigre*.

35. Le dépôt du béton sous l'eau s'opère, soit au moyen de trémies, soit avec des caisses de différentes formes qui s'ouvrent ou se renversent lorsqu'elles sont arrivées au fond; les trémies ne sont autre chose que de grandes auges qui de la surface vont joindre la partie inférieure de la fouille; elles paraissent d'un meilleur emploi que les caisses, quand le béton doit résister à la pression de sources de fond qui tendent à le soulever, parce qu'elles permettent de le verser en plus grandes quantités à la fois; mais elles ont le grave inconvénient de faire traverser au béton toute la hauteur d'eau et de le délaver, en séparant plus ou moins complétement le mortier des pierres; les caisses, au contraire, soit qu'elles soient complétement fermées avant l'immersion, soit qu'elles restent ouvertes à leur partie supérieure, transportent la masse tout d'une pièce jusqu'au fond, et laissent au mélange toutes ses qualités.

Digitized by Google

Quel que soit d'ailleurs le mode suivant lequel ait été versé le béton, il est bon de le régaler uniformément en le comprimant avec des rouleaux ; mais il faut bien se garder de le piloner ; cette manœuvre, en refoulant violemment l'eau dans l'intérieur, en chasserait le mortier et empêcherait la solidification du massif.

36. Pendant l'immersion du béton, il se forme toujours à sa surface une sorte de *laitance* qui n'est autre chose que de la chaux délavée ; cette matière n'est pas susceptible du même durcissement que le béton, et son interposition entre les couches successives déterminerait des solutions de continuité et favoriserait les tassements ; il importe donc de l'expulser, et les moyens d'arriver à ce but varient suivant les circonstances. Dans une eau tranquille, des balais peuvent atteindre ce but ; si l'on travaille dans une eau courante, la force du courant lui-même facilite beaucoup l'opération ; mais si le bétonnage est de faible épaisseur, on s'arrange pour en embrasser toute la hauteur dans chacun des versements, et l'on s'avance en chassant toujours devant soi la laitance.

37. La fabrication du béton comprend, comme pour le mortier, deux périodes distinctes : le *dosage* des matières et leur *mélange*. Le dosage se fait avec des brouettes de mesure connue ; celles qui sont destinées à l'approche des cailloux ont leur fond percé de trous ou formé de tringles en fer, afin de faciliter le passage de l'eau que l'on est obligé de jeter sur les pierres pour les nettoyer.

Quant au mélange, il s'opère, soit à bras sur une aire en bois, à l'aide de griffes en fer à trois dents recourbées et à long manche, soit au moyen de machines spéciales, lorsque l'on a de grandes quantités à fabriquer. Parmi ces machines, la plus simple et celle qui nous a paru propre à donner les meilleurs résultats, consiste en une longue boîte prismatique verticale, garnie intérieurement de cinq ou six plans inclinés alternativement d'avant en arrière et d'arrière en avant. Les pierres et le mortier versés par en haut tombent en serpentant sur ces plans, et sortent mélangés par la partie inférieure.

38. Quelquefois dans les grandes constructions, à défaut de pierres naturelles, ou pour obtenir des blocs de dimensions exceptionnelles que ne peuvent fournir les carrières voisines, on fabrique des pierres artificielles en béton. Dans les travaux à la mer, on a journellement besoin de masses destinées à former des enrochements, et qui doivent être suffisamment pesantes pour résister à l'agitation des plus fortes tempêtes ; c'est alors que l'on a tiré souvent un excellent parti des propriétés du béton ; dans l'établissement du môle du port d'Alger, M. l'Ingénieur Poirel a fabriqué et employé des blocs cubant jusqu'à 50 mètres.

Digitized by Google

VII. PLATRE.

39. Le *plâtre* n'est autre chose que la pierre connue sous le nom de *gypse*, ou sulfate de chaux hydraté, que l'on dépouille, par la calcination, de l'eau qu'il renferme. Une température de 100 degrés environ paraît suffisante pour produire cet effet, et l'opération de la cuisson doit être conduite de manière, d'une part à faire dégager toute l'eau contenue dans la pierre à plâtre, d'autre part à éviter de déterminer la fusion qui ne donnerait plus qu'une matière inerte.

Réduit en poudre après la calcination, le plâtre n'a besoin du mélange d'aucune matière autre que l'eau, dans la proportion d'un volume à peu près égal au sien, pour faire prise au bout de quelques instants et prendre la consistance d'un corps solide d'une dureté moyenne, parfaitement comparable à celle de la pierre tendre. Si l'on emploie une plus grande quantité d'eau, le plâtre prend moins promptement, ce qui est quelquefois un avantage sérieux pour sa mise en œuvre ; mais il n'acquiert pas une aussi grande dureté. Ces deux manières de gâcher le plâtre ont donné lieu aux dénominations usuelles de plâtre *gâché serré* et de plâtre *gâché clair*.

Le plâtre adhère fort bien aux pierres, aux briques et au fer, mais fort mal au bois. A l'inverse de ce qui a lieu pour le mortier, il perd de sa dureté en vieillissant ; il est soluble dans l'eau, et, par conséquent, d'un fort mauvais usage dans tous les lieux humides. Néanmoins, dans les localités où, comme à Paris et dans ses environs, le plâtre est abondant et de bonne qualité, on en fait une immense consommation dans la construction des maisons, même pour les enduits extérieurs ; mais il est surtout d'un usage précieux pour toutes les parties intérieures et recouvertes, telles que cloisons, planchers, plafonds, enduits, etc. Il est nécessaire toutefois de se rappeler que le plâtre augmente assez notablement de volume en durcissant, et d'avoir égard à cette circonstance dans la pratique. Cette propriété du plâtre peut paraître nuisible en général dans les constructions ; mais elle devient au contraire un grand avantage, quand on emploie cette matière à faire des scellements du fer dans la pierre, et principalement dans tous les travaux de moulage.

40. Le plâtre étant presque toujours employé en quantité assez restreinte dans les travaux des Ponts et Chaussées, et étant rarement fabriqué par les soins des agents de l'Administration, qui l'achètent tout prêt à être mis en œuvre, nous ne décrirons pas ici en détail les procédés de cuisson de la pierre à plâtre ; nous dirons seulement que cette calcination a lieu dans des fours dont la disposition varie suivant que l'on emploie pour combustible le bois ou la houille.

Le degré de meilleure cuisson du plâtre ne se manifeste d'ailleurs par aucun signe extérieur ; c'est l'habitude qui, seule, peut servir de guide.

Digitized by Google

et l'on répute généralement que l'on a obtenu ce résultat, quand le plâtre en poudre est doux et onctueux au toucher, et quand, gâché pour être employé, il forme des enduits d'un grain fin et agréable à l'œil.

41. Le plâtre demande pour sa conservation certaines précautions dont la principale consiste à le préserver de toute humidité et, en particulier, de celle de l'atmosphère. Lorsque cette matière a absorbé, par son contact avec l'air, toute l'eau qu'elle pouvait prendre, les ouvriers disent qu'elle est *éventée*, et, une fois dans cet état, le plâtre n'est plus bon à rien, à moins qu'on ne le remette au four ; mais, malgré cette nouvelle cuisson, il ne retrouve jamais toutes ses qualités primitives.

Un excellent moyen de conservation est mis en usage dans la plupart des chantiers où l'on emploie beaucoup de plâtre : on l'amoncelle en tas dont on arrose légèrement la surface ; la partie mouillée fait prise aussitôt et forme une croûte qui protége, pendant un temps considérable, l'intérieur de la masse.

Dans les pays où le plâtre est rare et où on le tire de loin, il faut autant que possible le faire venir en pierre, le faire cuire et le pulvériser sur les lieux, ou bien le renfermer dans des tonneaux bien clos, pour qu'il n'absorbe pas l'humidité de l'air pendant le trajet.

VIII. BITUMES ET MASTICS BITUMINEUX.

42. On désigne sous le nom général de *bitumes* des substances naturelles dont les éléments essentiels sont le carbone et l'hydrogène, qui sont, les unes solides, les autres liquides à la température ordinaire, et qui brûlent avec flamme, en répandant une fumée épaisse d'une odeur fétide et reconnaissable. Parmi ces substances, une seule est plus spécialement utilisée dans les constructions, à cause de ses qualités physiques, c'est l'*asphalte*, qui est solide à la température ordinaire ; sa cassure est conchoïde, d'un noir luisant, et sa densité varie de 1 à 1,6. En France, cette matière se présente rarement libre dans la nature ; elle imprègne ordinairement des roches poreuses calcaires, d'où on l'extrait par la chaleur. La partie volcanique de l'Auvergne la possède en grande abondance ; mais nos principaux gîtes de bitume, ceux du moins qui fournissent à l'industrie la plus grande partie de celui qu'elle emploie, sont situés au pied du versant oriental de la chaîne du Jura, au Val-Travers et à Pyremont, près Seyssel (Ain).

43. L'asphalte n'est guère susceptible d'être employé seul dans les constructions ; on en forme des *mastics* en mélangeant le bitume avec des débris de roches calcaires tendres. Le plus répandu jusqu'à présent se compose en combinant, à chaud, 7 parties d'asphalte avec 93 parties de roche asphaltique de Seyssel, roche qui n'est elle-même qu'un calcaire bitumineux. Ses applications tendent à se généraliser de plus en plus ;

Digitized by Google

mais on s'en sert surtout en grand pour le remplissage des aires, des cours, trottoirs et même de certains planchers, ainsi que pour la couverture des combles et des terrasses qu'il importe de rendre complétement imperméables.

Pour mettre le mastic asphaltique en œuvre, on le fait fondre en y ajoutant un ou deux centièmes de bitume ou de *brai*, matière provenant de la décomposition de la houille; versé dans cet état sur les surfaces qui doivent le recevoir, cet enduit conserve une tendance prononcée à se ramollir sous les rayons du soleil : on s'oppose à cette action en saupoudrant de sable la surface du mélange pendant qu'il est encore chaud. Quant aux trottoirs, qui demandent principalement de la dureté pour résister à l'usure, on fait plus : on mélange le mastic en fusion avec du sable quartzeux, dans la proportion de 25 de sable environ pour 75 de mastic, et l'on recouvre encore de sable la surface de l'enduit. Dans les aires ainsi formées, le mastic agit uniquement comme gangue pour réunir les grains siliceux qui résistent seuls, par leur dureté, à l'action destructive de la circulation.

44. Outre les mastics naturels, on compose aussi des mastics artificiels destinés aux mêmes usages, et parmi lesquels celui qui s'emploie le plus habituellement s'obtient en combinant, à chaud, 75 parties de craie avec 25 parties de brai. Le but à atteindre dans la composition de ces mastics, c'est toujours de donner au mélange un degré de ductilité tel que, sans se ramollir dans les grandes chaleurs, il ne devienne pas cassant pendant les gelées. Le mastic de Seyssel ne laisse rien à désirer sous ce rapport: il est plus *gras*, plus ferme et moins cassant que les mastics artificiels; mais ceux-ci auront toujours sur lui le grand avantage d'être moins dispendieux.

IX. BOIS DE CONSTRUCTION.

45. Abstraction faite de l'*écorce*, qui ne produirait d'autre effet dans les charpentes que d'en favoriser la pourriture, de la *moelle*, substance molle, sèche et sans ténacité, qui n'occupe, au centre des arbres propres à fournir des bois de construction, qu'un espace fort restreint, on remarque que le *corps ligneux* présente une suite de zones ou de couches concentriques. Les unes forment le *bois* proprement dit : ce sont les plus rapprochées du centre et les plus dures, et elles sont d'autant plus nombreuses que l'arbre est plus âgé; les autres constituent l'*aubier*, qui se reconnaît à sa couleur blanche, à sa texture spongieuse et à son manque de dureté: il importe également d'en purger toutes les pièces de charpente, non-seulement parce qu'il n'a pas de ténacité, mais surtout parce qu'il est facilement attaqué soit par l'humidité, soit par les insectes qui étendent ensuite leurs ravages jusque dans le bois lui-même.

Si l'on fend un tronc d'arbre dans une direction verticale, ou, pour

Digitized by Google

mieux dire, parallèlement à son axe de croissance, on remarque en outre que la séparation s'opère de manière à mettre en évidence dans le corps ligneux des fibres longitudinales qui courent sans interruption du bas en haut, et qui sont sensiblement parallèles entre elles; c'est dans la direction de ces fibres que les bois présentent la plus grande résistance.

46. Les arbres qui croissent le plus lentement sont, en général, ceux dont les couches sont le plus denses, le plus dures et le plus minces; parmi les bois de même espèce, les plus denses sont les plus forts, et, dans un même arbre, la densité du bois décroît, non-seulement du centre à la circonférence, mais encore de bas en haut; cependant, quelques espèces d'arbres, le sapin entre autres, font exception à cette dernière règle.

C'est ordinairement lorsque l'arbre est sur le point d'atteindre toute sa croissance que son bois présente le plus de densité et de force, et c'est ce moment qu'il faut choisir pour l'abattre; plus tard, lorsque le terme de la maturité est passé, lorsque l'arbre est sur le retour, le bois devient moins résistant, moins élastique : ses couches centrales ont éprouvé un commencement d'altération, et il est sujet à la pourriture.

La nature et l'exposition du sol, ainsi que le mode de culture, exercent une grande influence sur le développement des arbres et sur les qualités de leur bois. La plupart des arbres venus dans des terrains bas et humides donnent un bois moins dense, moins dur, moins tenace, à tissu plus lâche, plus *gras* que ceux de même espèce tirés de terrains secs et suffisamment aérés.

Quant à l'exposition, celle de l'ouest paraît être chez nous la moins favorable, à cause de la fréquence des vents qui fatiguent les jeunes arbres, les tordent et arrêtent leur développement. Enfin, on a observé que les arbres situés sur la lisière ou dans les clairières des forêts croissent plus rapidement et donnent des bois de meilleure qualité que ceux de l'intérieur des massifs.

L'époque de l'abattage des arbres paraît influer également sur quelques qualités, et notamment sur la durée ultérieure des bois de construction; il paraît surtout important, soit de faire écouler la séve en pratiquant une large entaille au pied de l'arbre, quelque temps avant de l'abattre, soit d'attendre le moment où la séve est naturellement épuisée, vers la fin de l'automne ou le commencement de l'hiver; la présence de ce liquide hâterait la décomposition des bois par sa fermentation, ou déterminerait dans les charpentes, par son évaporation, un travail destructeur qui ne tarderait pas à en amener la ruine.

47. Les principales qualités à rechercher dans les bois de construction sont d'être durs, tenaces, élastiques, sains, à fibres rectilignes et à structure aussi uniforme que possible. Les défauts qu'ils sont sujets à présenter et qui sont, en général, des motifs de rebut, sont les suivants :

Digitized by Google

1°. Les *nœuds vicieux*. Tous les nœuds sont, à proprement parler, des défauts, puisqu'ils altèrent la rectitude des fibres et rendent le bois difficile à travailler et impropre à la menuiserie, aussi bien qu'aux ouvrages de charpente un peu délicats; mais il ne faut comprendre sous la dénomination de *nœuds vicieux* et rejeter d'une manière absolue que ceux qui sont formés de bois mort : dans ce cas, ils sont exposés à une pourriture qui se propage ensuite rapidement dans le bois environnant.

2°. Le *rebours*. Le bois rebours ou tordu est un bois dans lequel les fibres sont tordues par l'action du vent et sont, par conséquent, tranchées plusieurs fois par les plans d'équarrissement; on comprend qu'il doit résulter de ce défaut une grande perte de force. Comme nous l'avons dit plus haut, les arbres exposés aux vents d'ouest en sont plus fréquemment atteints que ceux qui croissent dans une autre exposition.

3°. Le *double aubier*. On désigne ainsi une seconde couche d'aubier interposée entre les couches de bois parfait; c'est là un défaut très-grave, puisque cet aubier intérieur présente les mêmes inconvénients que l'autre: sa formation est attribuée à l'action des fortes gelées.

4°. Les *roulures*. Le bois roulé est celui dans lequel une ou plusieurs couches sont séparées par des fentes concentriques qui s'étendent quelquefois sur toute la circonférence, mais qui ne se manifestent le plus souvent que sur l'un des côtés. Ce défaut est extrêmement grave, non-seulement parce que les fibres, n'étant plus solidaires, se rompent plus facilement, mais encore parce que l'humidité ne tarde pas à envahir les intervalles des couches séparées, et devient une cause permanente et active de pourriture. L'action de vents violents ou de gelées très-intenses sur une couche nouvelle paraît donner naissance à ces solutions de continuité.

5°. Les *gélivures*. Lorsqu'un brusque dégel suit une forte gelée, la sève, en reprenant son volume primitif, détruit quelquefois l'adhérence des fibres entre elles et fait éclater le bois, en y déterminant des fentes qui vont du centre à la circonférence; les inconvénients des gélivures sont d'ailleurs les mêmes que ceux produits par les roulures.

Il ne faut pas toutefois confondre avec les gélivures des fentes qui présentent la même apparence, mais qui sont beaucoup moins dommageables, et qui sont simplement produites par une dessiccation trop prompte du bois après qu'il a été abattu.

6°. Les *gerçures* sont des fentes, ordinairement très-multipliées et peu profondes, qui se manifestent dans une direction perpendiculaire à celle des fibres du bois. Si ces fentes ne sont que superficielles et proviennent d'une dessiccation trop rapide, il suffit d'enlever la surface attaquée pour pouvoir employer la pièce en toute sécurité; mais si elles sont profondes, le défaut est capital; les fibres divisées ont perdu de leur dureté : c'est là l'indice certain d'un bois *sur le retour*.

Digitized by Google

7°. Le *retour*. Lorsqu'un arbre a dépassé le terme de sa maturité, c'est-à-dire, lorsqu'il a acquis tout le développement que la nature a assigné à son espèce, sa cime se couronne, son bois s'altère, et cette altération se poursuit même après sa mise en œuvre; l'arbre est alors sur le retour. Il est fort difficile de reconnaître ce défaut sur les bois abattus, lorsqu'il n'est pas très-prononcé; des fibres moins élastiques, moins dures, surtout au centre de la pièce, des gerçures très-multipliées et profondes, une apparence terne lorsqu'il est coupé, sont les seuls indices que l'on puisse consulter à ce sujet. Quoique le bois *mort sur pied* soit beaucoup plus défectueux encore que le bois sur le retour, il est peut-être moins redoutable, parce qu'il est impossible d'y être trompé; le bois mort perd presque toujours toute ténacité, même avant d'être abattu.

8°. L'*échauffement*. C'est un commencement de pourriture, facile à reconnaître quand il est parvenu à un certain terme. Cette maladie est d'autant plus grave qu'elle se propage rapidement, non-seulement dans toute l'étendue de la pièce attaquée, mais encore sur les pièces qui se trouvent en contact avec elle; on l'attribue à la fermentation de la séve, et elle attaque de préférence les bois enfermés ou encastrés dans les maçonneries, parce que l'humidité détermine le ramollissement et la décomposition de cette substance, quand les bois n'ont pas été complétement desséchés avant leur emploi.

9°. La *carie*. Cette altération, qui n'est autre chose qu'un échauffement très-prononcé, ou qui est quelquefois due à l'action d'un air chaud et non renouvelé, se manifeste habituellement à la surface des bois qui en sont atteints, par la végétation parasite de petits champignons, d'agarics et d'autres cryptogames qui se multiplient rapidement et conduisent à la pourriture générale. Quand cette sorte de gangrène n'a pas pour cause l'humidité, quand elle prend naissance dans un milieu chaud et non aéré, elle prend le nom de *carie sèche*. Dans quelques mines où les pièces du boisage se détruisaient en fort peu de temps, on a pris le parti de les arroser, et elles se sont bien conservées ensuite.

10°. La *vermoulure* est le résultat du travail de larves ou vers qui s'introduisent dans le bois et l'attaquent profondément, sans altérer autrement sa surface que par les petits trous nécessaires à leur entrée ou à leur sortie. C'est principalement dans les bois très-secs que se manifeste la vermoulure; mais elle est favorisée par tout ce qui peut diminuer la dureté de la surface et offrir aux insectes la facilité d'y loger leurs œufs.

48. Les défauts plus ou moins graves que nous venons d'énumérer ne sont pas toujours apparents, même après l'équarrissage des bois; les pièces en renferment souvent de très-nuisibles, qu'une simple inspection ne révélerait pas : il faut, pour les reconnaître, avoir recours à l'auscultation. Lorsqu'une pièce est saine, elle rend, sous le choc, un son clair et d'au-

Digitized by Google

tant plus net que le bois est plus homogène et plus dur; quand elle est altérée, au contraire, un son sourd, *étouffé*, indique à toute oreille tant soit peu exercée les roulures ou les nœuds pourris qu'elle contient dans son intérieur.

49. Quand les bois sont alternativement baignés par les eaux et exposés au contact de l'air, ou même quand ils sont simplement soumis à l'action des intempéries atmosphériques, leur conservation devient fort difficile et ne dépasse pas un petit nombre d'années, quelque soin que l'on apporte au renouvellement de la couche de peinture à l'huile ou de goudron dont on les recouvre. Ainsi, dans notre climat, on estime qu'il faut renouveler tous les trente ans environ l'intégralité des pièces qui composent la charpente extérieure d'un pont en bois.

Mais lorsque les bois restent constamment immergés, ils se conservent fort bien, principalement le bois de chêne, qui acquiert même sous l'eau plus de dureté qu'à l'air, et il est par conséquent inutile de leur appliquer aucun enduit. Cependant, il faut excepter de cette règle les bois plongés dans la mer, lesquels sont exposés à être attaqués par le ver marin, le *taret*, qu'on rencontre maintenant dans la plupart de nos ports et qui détruit en peu de temps les plus fortes pièces; le seul moyen trouvé jusqu'à ce jour pour les garantir de ses attaques, consiste à recouvrir toutes les parties mouillées et l'extérieur des vaisseaux de feuilles métalliques ou de clous à large tête.

Nous ne parlerons pas ici du procédé de conservation dont la découverte est due à M. le docteur Boucherie, et que l'expérience n'a pas encore suffisamment consacré; nous nous bornerons à dire que ce système consiste à introduire dans les canaux séveux du bois un liquide capable de convertir les parties solubles en substances insolubles, à l'abri de la fermentation et inattaquables par les insectes.

50. Les bois le plus habituellement employés dans nos constructions se divisent en bois *durs* et en bois *tendres :* à la première classe appartiennent le *chêne*, le *châtaignier* et l'*orme ;* les *sapins*, les *pins* et le *peuplier* font partie de la seconde. Nous allons successivement dire quelques mots de chacune de ces essences.

LE CHÊNE.

51. Le *chêne* possède à peu près toutes les qualités inhérentes à un excellent bois de construction : il est dur, résistant et s'obtient sous d'assez fortes dimensions. Exposé à l'air et dans des circonstances convenables, il se conserve pendant plusieurs siècles; sous l'eau, il acquiert une grande dureté au bout d'un certain temps et se conserve indéfiniment. Il est d'un jaune plus ou moins foncé, passant quelquefois au gris clair; ses fibres sont naturellement droites et serrées; la substance qui réunit ses couches

Digitized by Google

concentriques est elle-même assez résistante et remplie de petites cavités allongées dans le sens des fibres; son seul inconvénient est d'avoir un aubier fort épais, que sa couleur blanchâtre rend d'ailleurs facile à distinguer.

52. Les chênes employés par les constructeurs se partagent en deux catégories principales. L'une ne vient que dans les bons terrains, donne un bois élastique et résistant, lorsque le terrain est sec; *gras*, quand le sol est humide. Ce bois, facile à travailler, à fibres droites et de forme régulière, convient parfaitement aux ouvrages de charpente intérieure et de menuiserie; tels sont les arbres connus dans le commerce sous les noms de chêne de Hollande et de chêne des Vosges. L'autre, qui croît dans les terrains pierreux, fournit un bois plus dur, plus résistant, plus durable surtout; mais noueux, sujet à se gercer, difficile à travailler, et qui s'emploie de préférence en fondations ou pour l'établissement de constructions exposées aux intempéries de l'atmosphère.

LE CHATAIGNIER.

53. Le *châtaignier* s'emploie quelquefois à défaut du chêne, dans les localités où ce dernier bois n'est pas abondant; il en a du reste l'apparence et quelques qualités: ainsi, il est assez résistant, et il acquiert, comme le chêne, une grande dureté dans l'eau, où il se conserve indéfiniment; mais, exposé à l'air, il s'y altère, devient cassant, sujet à se fendre, et ne tarde pas à être envahi par les vers, qui le détruisent promptement.

L'ORME.

54. Dans les constructions qui ne réclament pas une longue durée, on substitue aussi quelquefois l'*orme* au chêne: ce bois est compacte et résistant, mais ses fibres sont rarement droites, et par conséquent il est difficile à travailler et disposé à se tourmenter; de plus, il est très-sujet à la vermoulure.

L'orme *tortillard* a une grande ténacité, et peut rendre des services pour les pièces de charpente qui doivent être percées d'un grand nombre de mortaises.

LE SAPIN.

55. Le *sapin* est un arbre résineux, dont les fibres sont droites et le tronc élevé: la partie interne de ses couches annuelles est très-molle, de couleur claire; l'autre est, au contraire, dure, serrée, de couleur jaune tirant quelquefois sur le rouge, et c'est elle qui renferme la résine. Son bois est tendre, facile à travailler, mais il ne se conserve pas très-bien; il est sujet à l'échauffement et à la vermoulure; aussi ne l'emploie-t-on guère que dans les localités qui le fournissent et par motif d'économie.

Toutefois, le sapin qu'on tire du nord de l'Europe où, par suite de la

Digitized by Google

différence de climat, il pousse plus lentement, est plus estimé que tous nos sapins indigènes; il est plus dur, plus résistant et plus durable.

Outre les sapins du Nord, les sapins rouges de Riga, qui nous viennent de la Prusse et de la Russie, sont aussi d'excellente qualité; leurs fibres fines et serrées, ainsi que leur belle couleur, les font rechercher surtout dans la menuiserie.

LE PIN.

56. On connaît un grand nombre d'espèces différentes de *pins*; nous nous bornerons à mentionner celles qui sont le plus fréquemment employées dans les constructions. Ce sont:

1°. Le *mélèze*, dont les fibres sont dures et serrées; c'est le plus beau et peut-être le meilleur de tous nos bois de construction. Plus grand, plus droit, moins dur que le chêne, il a plus de ténacité que lui, et il est plus facile à travailler. Nul bois ne résiste mieux aux intempéries de l'atmosphère et à la pourriture; placé sous l'eau, il acquiert une très-grande dureté et devient impérissable; enfin, il a encore la propriété remarquable de brûler très-difficilement.

2°. Le *pin de Corse*, qui a beaucoup de rapports avec le précédent; il fournit d'excellentes mâtures, et il convient parfaitement à la construction des charpentes et aux ouvrages de menuiserie.

3°. Le *pin sylvestre*, qui est fort commun dans quelques parties de la France, dans les Alpes, les Pyrénées, l'Auvergne, la Bourgogne et les Vosges; mis en œuvre peu de temps après son abattage et avant qu'il ait perdu sa séve résineuse, il durcit dans l'eau et sert principalement dans les travaux de tunage et de fondation. On l'emploie le plus souvent *en grume*, c'est-à-dire, non équarri.

4°. Le *pin maritime*, dont on fait grand usage sur tout le littoral de l'Océan, depuis Bayonne jusqu'aux côtes de Bretagne. Ce bois est de qualité inférieure; il ne s'emploie guère que dans les constructions les plus vulgaires.

LE PEUPLIER.

57. On compte plusieurs espèces de *peupliers*, mais aucune ne fournit de bois convenable pour la charpente. Ce bois, tendre, homogène, très-léger, facile à travailler, ne sert généralement que dans la menuiserie, où ses qualités le font presque toujours préférer au sapin. Il est peu résistant et peu durable.

Les deux espèces les plus communes sont le *peuplier d'Italie* et le *peuplier suisse*, qui sont assez recherchés pour les plantations des routes, parce que ces arbres croissent rapidement et que leur tige élancée apporte sur les chaussées un ombrage salutaire, sans y intercepter la circulation de l'air.

Digitized by Google

X. MÉTAUX.

58. Les métaux communément utilisés dans les travaux publics sont le *fer*, pur ou à l'état de *fonte*, le *cuivre*, le *zinc* et le *plomb*.

LE FER.

Le *fer* est le métal le plus tenace, le plus utile à l'art de bâtir et le plus fréquemment employé dans nos constructions.

Lorsqu'il est de bonne qualité, le fer a une texture grenue ; sa cassure fait voir un grain fin, serré, à pointes déliées, et il ne prend une texture nerveuse, aux fibres allongées et blanchâtres, que quand, après avoir été chauffé au rouge blanc, il est forgé en barres minces. Si la cassure présentait de gros grains ou des lamelles, on devrait en conclure que le fer est de mauvaise qualité.

C'est par la mise en fusion et la macération mécanique des minerais de fer ou des fontes que l'on obtient le fer du commerce; la nature du combustible employé pour cette fabrication, sur les détails de laquelle nous n'avons pas à entrer ici, exerce une grande influence sur les qualités du métal ; la houille ne donne pas, toutes choses égales d'ailleurs, d'aussi bons produits que le charbon de bois.

59. On distingue, dans l'industrie et dans les constructions, deux espèces principales de fers :

1°. Le *fer doux*. C'est le plus pur, le plus ductile et le plus malléable de tous les fers ; sa texture est grenue, et elle devient assez promptement fibreuse sous l'action du marteau ou du laminoir. Il plie facilement à froid et à chaud, et s'allonge avant de se rompre.

2°. Le *fer aigre*, dont la cassure est très-brillante ; il est plus blanc et plus dur que le précédent ; mais il se casse aisément à froid et à chaud, et son emploi, fort désavantageux sous tous les rapports, est proscrit par tous les constructeurs.

60. Le fer s'oxyde très-facilement à l'air humide, surtout à l'air humide et salin des bords de la mer, et plus promptement sur les parties limées que sur les autres. Dans les constructions, il se conserve fort bien tant qu'il est à l'abri de l'humidité, et principalement lorsqu'il est enveloppé de chaux; mais, mis en contact avec le plâtre, son oxydation est très-prompte, et sa détérioration est complète au bout de peu de temps. Il augmente de volume en s'oxydant, et fait quelquefois éclater les pierres dans lesquelles il a été scellé.

On le préserve de l'oxydation, soit en le couvrant d'une couche de peinture à l'huile et au minium ou de goudron minéral, soit en l'étamant à l'étain ou au zinc.

Digitized by Google

Ce dernier procédé, connu depuis quelques années sous le nom de *galvanisation du fer*, est fort efficace; mais il est plus dispendieux pour le premier établissement que la peinture à l'huile, et il a paru, en quelques circonstances, rendre le fer cassant.

La dilatation du fer est assez considérable pour devoir être fréquemment prise en considération dans l'application de ce métal aux constructions.

Le fer présente une faculté extrêmement remarquable et qui n'a été reconnue jusqu'à présent que dans un autre métal, le platine : il peut se souder à lui-même, quand on le porte à la chaleur blanche, température encore bien au-dessous de celle qui produirait sa fusion.

61. C'est à l'état de *fonte* grossière et encore impure que le fer s'écoule des hauts fourneaux dans lesquels on traite le minerai qui le renferme; il est alors associé à du carbone ou à d'autres substances. Une nouvelle préparation est nécessaire pour amener la fonte au degré de pureté que demande son emploi dans les arts, et c'est à cette circonstance qu'il faut rapporter la dénomination de *fonte de deuxième fusion*, attribuée aux bonnes fontes dans les devis.

Les propriétés qui distinguent le plus nettement la fonte du fer forgé sont d'être plus fusible, moins malléable, plus cassante, de ne pouvoir se forger ni à chaud ni à froid, et de ne se point souder. Elle est moins tenace, mais elle résiste mieux à l'écrasement; le prix de la fonte est d'ailleurs beaucoup moins élevé que celui du fer.

62. On distingue deux espèces principales de fonte : la *fonte grise* et la *fonte blanche*. Elles diffèrent, ordinairement, plutôt par l'état de combinaison de leurs éléments que par leur composition chimique; cependant, on a constaté que la fonte blanche conservait toujours une certaine quantité de soufre ou de phosphore.

La fonte grise est douce, grenue, et légèrement malléable; sa couleur, qui est d'un gris noirâtre quand ses grains sont très-prononcés, passe au gris clair à mesure qu'ils se resserrent davantage. Cette fonte est généralement d'autant plus dure et d'autant moins malléable qu'elle est moins colorée.

La fonte blanche est dure, non malléable et très-cassante; sa cassure est brillante, et, suivant les circonstances, rayonnante, esquilleuse ou compacte; sa couleur est d'un blanc d'argent qui passe quelquefois au gris clair.

Il est quelques fontes dont la cassure présente des taches grises sur un fond blanc; on leur a donné le nom de *fontes truitées*. Elles paraissent être un mélange des deux principales espèces de fonte, et elles se rapprochent beaucoup des fontes blanches par leurs propriétés.

Fondue au contact de l'air, la fonte grise finit par s'altérer et par se convertir, en grande partie, en fer; mais si, pendant cette opération, elle

Digitized by Google

est soigneusement mise à l'abri de toute communication avec l'atmosphère, elle ne s'altère pas, pourvu toutefois qu'elle soit refroidie lentement. Un refroidissement brusque la convertirait en fonte blanche, et la rendrait dure et cassante; il suffit, au reste, de recuire une fonte grise, devenue blanche de cette manière, pour lui rendre ses propriétés.

La plupart des fontes blanches se changent en fonte grise, quand elles ont été maintenues en fusion à l'abri du contact de l'air et à une haute température; avec le contact de l'air, elles s'épaississent très-promptement et se convertissent en acier.

La fonte grise reçoit l'empreinte du marteau et se laisse entamer assez facilement par la lime, le ciseau et le foret; la fonte blanche ne présente aucune de ces qualités. La première est plus tenace, la seconde résiste davantage à l'écrasement.

On voit que la fonte grise, étant moins sujette à s'altérer par la fusion, plus facile à mouler et à travailler, et, ce qui est fort important, moins cassante que la fonte blanche, doit lui être préférée dans la plupart des circonstances, et c'est en effet celle qui est le plus généralement employée dans les constructions; l'autre est presque exclusivement réservée pour la fabrication du fer par la décarbonisation.

LE CUIVRE.

63. Le *cuivre* est, après le fer, le métal le plus tenace de tous ceux qui sont appliqués à l'art des constructions; il est malléable à chaud et à froid, et jouit d'une assez grande ductilité.

Lorsque ce métal est pur et poli, il est rouge et brillant; exposé pendant un certain temps à l'air humide, il s'altère à la surface et se couvre d'une couche verte d'hydrate et de carbonate de cuivre.

Pur, il n'est guère utilisé dans nos constructions; c'est après avoir été converti en bronze ou en laiton, par son alliage avec l'étain ou le zinc, que le cuivre est le plus fréquemment employé, quoique cet emploi demeure néanmoins toujours assez restreint dans les travaux publics ordinaires.

64. L'emploi du *bronze* remonte à une haute antiquité, et de nombreuses analyses de bronzes antiques montrent des proportions très-variables. On admet également aujourd'hui plusieurs proportions de cuivre et d'étain, suivant l'usage auquel l'alliage est destiné; le *bronze des canons* comporte 11 parties d'étain pour 100 de cuivre. Cet alliage, d'un jaune rosé, est plus tenace, plus dur, plus fusible et moins oxydable que le cuivre; il est fort peu malléable quand il a été refroidi lentement; mais lorsqu'il est trempé, il le devient assez pour pouvoir être travaillé au marteau, et sa ténacité augmente en même temps.

65. Le *laiton*, ou cuivre jaune, est un alliage de cuivre et de zinc; il est

Digitized by Google

très-ductile et très-malléable, quand il ne renferme que ses principes essentiels. Tel est celui que l'on destine à être étiré ou à être travaillé au marteau; il est composé d'environ 700 parties de cuivre pour 30 de zinc. Le principal avantage qu'il présente sur le cuivre est d'être moins dispendieux. On donne le nom de *potin* à un laiton dur, aigre, cassant, dont la composition est très-variable, et qui provient habituellement de la refonte du vieux laiton.

Le laiton, lorsqu'il est refroidi brusquement, perd à la fois de sa ténacité, de sa dureté et de sa densité.

LE ZINC.

66. Le minerai qui fournit la presque totalité du *zinc* au commerce est le zinc carbonaté, connu dans les arts sous le nom de *calamine*. Ce métal, à l'état de pureté, est d'une texture lamelleuse; il est peu tenace, légèrement malléable à la température ordinaire, et très-malléable lorsqu'il a été chauffé à 100 degrés environ; à partir de ce point, cette propriété va en diminuant, et à 200 degrés il est devenu très-cassant; il entre en fusion à une température de 360 degrés, et en ébullition à la chaleur blanche. Exposé au contact de l'air, lorsqu'il est bouillant, ses vapeurs brûlent en produisant une flamme éclatante et des flocons blancs et légers, qui sont de l'oxyde de zinc.

Exposé à l'air sec, le zinc ne s'altère pas; à l'air humide, il se couvre d'une couche mince et très-compacte d'oxyde qui s'oppose à tout progrès ultérieur de l'oxydation.

Le zinc se lamine en feuilles minces, et c'est dans cet état qu'il est employé dans nos constructions pour former des couvertures et divers objets de ferblanterie, tels que chéneaux, tuyaux de descente, etc. Comme la plupart des métaux, il paraît acquérir, dans le laminage, une plus grande ténacité et une plus grande tendance à se dilater dans le sens où il a été étiré que dans toute autre direction; de là les irrégularités de dilatation qui font gauchir les feuilles exposées au soleil, et que les contractions ne corrigent pas.

67. L'oxyde de zinc, ou *blanc de zinc*, tend à se substituer, dans la peinture, au blanc de céruse, dont tout le monde connaît l'influence pernicieuse sur la santé des ouvriers chargés de le préparer ou de l'employer; les couleurs à base de zinc n'ont aucun des inconvénients de celles à base de plomb, et présentent même, sous quelques autres rapports, une certaine supériorité sur ces dernières; il est donc à désirer que leur usage se généralise.

LE PLOMB.

68. Le *plomb* est très-malléable, peu ductile et peu tenace. Il a de l'éclat quand il vient d'être coupé; mais il se ternit promptement à l'air, en

Digitized by Google

se couvrant d'une couche d'oxyde qui, comme pour le zinc, s'oppose aux progrès de l'oxydation, quoique avec moins d'efficacité. Il entre en fusion à 260 degrés centigrades.

Le plomb du commerce n'est jamais pur; il renferme presque toujours une petite quantité de cuivre, et quelquefois aussi d'autres substances. On distingue deux sortes de plomb : le *plomb mou* et le *plomb aigre;* ce dernier, recherché par les fabricants de plomb de chasse, est repoussé par les constructeurs. Le plomb coulé est généralement préféré au plomb laminé; il est plus malléable et plus homogène.

69. La *soudure* des plombiers est un alliage composé de 2 parties de plomb pour 1 partie environ d'étain. Si l'on augmente la proportion d'étain, la soudure est plus fusible et plus facile à employer ; si cette proportion diminue, la soudure est *maigre,* moins fusible, mais elle paraît être plus résistante.

Le carbonate de plomb, dont nous avons signalé plus haut l'inconvénient, est fort employé en peinture, sous les noms de blanc d'argent, blanc de plomb, *blanc de céruse.* La *litharge,* qui n'est autre chose qu'un des oxydes du plomb, sert aussi fréquemment comme siccatif.

Nous citerons encore comme d'un usage journalier dans la peinture, pour préserver principalement les fers de l'oxydation, le *minium,* qui est un autre oxyde de plomb d'une belle couleur rouge.

EMPLOI DES MATÉRIAUX DANS LES MAÇONNERIES ET CHARPENTES.

MAÇONNERIES.

70. On donne le nom de *maçonnerie* à un ouvrage quelconque, composé de pierres, naturelles ou artificielles, plus ou moins volumineuses, reliées ensemble par du mortier, ou simplement posées à sec, en liaison les unes avec les autres.

Sous le rapport de la nature des matériaux employés dans leur exécution, nous distinguerons seulement et nous examinerons avec quelques détails les maçonneries de *moellons,* de *pierres de taille,* de *briques* et de *béton.*

MAÇONNERIE DE MOELLONS.

71. Parmi les pierres qui sortent d'une carrière, les unes sont, en général, de dimensions suffisamment grandes pour pouvoir être mises, par la taille, sous les diverses formes appropriées à toutes les exigences des constructions; d'autres, provenant soit des déchets fournis par le travail des premières, soit de roches naturellement irrégulières, sont de dimensions moindres, et ne peuvent servir qu'à la formation des massifs intérieurs, ou secondairement au revêtement de parements moins importants;

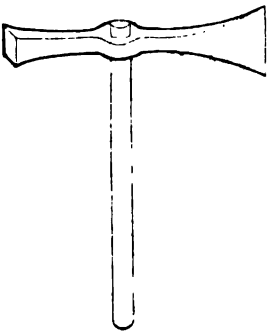
Digitized by Google

de là la distinction des blocs en *pierres de taille* et *moellons*. Ces derniers se divisent eux-mêmes, sous le rapport de leur emploi, en quatre classes bien tranchées : les *moellons bruts*, les *moellons smillés*, les *moellons piqués* et les *moellons d'appareil*.

72. *Moellons bruts*. — A leur sortie de la carrière, les moellons de toute nature conservent presque toujours, sur quelques-unes de leurs faces, une matière terreuse, tendre, adhérente, qu'on désigne sous le nom de *bousin*, et qu'il importe de faire disparaître avant l'introduction dans la maçonnerie; cet ébousinage doit se faire à vif, avant l'approche des matériaux du lieu de leur emploi. On ne saurait apporter trop de soin à assurer la bonne exécution de ce travail préparatoire; il importe également de n'admettre que des pierres dures, homogènes, bien gisantes, sans fils, et surtout inattaquables par la gelée. Les moellons de grès lisse ne sauraient adhérer au mortier, et doivent être en général rejetés; enfin, ceux qui sont arrondis, qu'on désigne sous le nom de *tête-de-chat*, veulent être de même mis de côté, quand on peut toutefois les remplacer avantageusement.

Dans les maçonneries, les moellons se posent à bain de mortier et en liaison entre eux ou avec les pierres qui les encadrent; on les place à la main et on les serre par glissement les uns contre les autres, de manière que le mortier reflue à la surface par tous les joints; ils sont ensuite frappés et tassés avec la tête ou le manche de la *hachette*. On nomme ainsi un marteau à tête carrée d'un côté et à tranchant de l'autre. La tête sert, entre autres usages, à frapper sur les moellons pour les diriger et les fixer sur le lit de mortier, et le tranchant s'emploie pour les fendre et les équarrir, lorsqu'ils n'ont pas des dimensions et des formes convenables pour remplir l'espace qu'ils doivent occuper dans la maçonnerie; le tranchant sert aussi à ébousiner les moellons avant leur mise en place, et à hacher et démolir les vieux plâtres et mortiers.

Fig. 1.



Ceux des moellons qui se cassent sous les coups de la hachette sont repris, nettoyés de détritus et employés avec de nouveau mortier; les joints et intervalles, bien remplis, sont garnis d'éclats de pierres enfoncés et serrés, mais de manière que chaque moellon ou éclat soit toujours complétement enveloppé de mortier.

Il est de règle de placer d'abord les moellons de parement et de faire ensuite le remplissage intérieur; les moellons les plus gros et les plus ré-

Digitized by Google

guliers, ceux qui peuvent pénétrer dans la maçonnerie par une plus grande longueur de *queue*, selon le terme usité, sont employés sur les faces du massif, soit du côté des terres, soit même à découvert, et ces parements sont alors ou complétement enduits de mortier fortement appliqué avec la truelle, au fur et à mesure de leur élévation, ou simplement rejointoyés de manière à laisser apparentes les faces des moellons.

On exige quelquefois que les maçonneries de remplissage soient successivement arasées dans le plan de chacune des assises de pierre de taille; cette condition, qui n'offre aucun avantage sérieux, nuirait même à la solidité, si l'on ne prenait, le cas échéant, le soin de relier, de distance en distance, deux massifs consécutifs par de fortes pierres placées debout, de manière à pénétrer à la fois deux ou plusieurs assises.

73. *Moellons smillés.* — Le *smillage* des moellons consiste à dégrossir les moellons bruts et à régulariser leurs formes, en les taillant de manière que leurs joints soient plus ou moins pleins, et leurs lits à peu près parallèles entre eux et d'équerre avec le parement, lequel est aussi proprement taillé. Ce travail s'exécute au moyen de la hachette que nous venons de décrire, et dont, pour cet usage, on raccourcit parfois le tranchant, en l'élargissant jusqu'à 10 ou 12 centimètres.

Les moellons smillés sont généralement employés au parement des maçonneries de remplissage, quand ceux-ci doivent rester apparents, dans les voûtes, etc. La manière de construire reste d'ailleurs identiquement la même que pour les moellons bruts; on conçoit seulement que le dressement des parements et leur rejointoiement doivent être faits avec d'autant plus de soin que l'on emploie des matériaux mieux préparés, et que l'on s'occupe de constructions d'un ordre plus élevé.

74. *Moellons piqués.* — Quand les surfaces vues des moellons sont dégrossies d'abord, puis parfaitement taillées, de manière qu'il n'y reste aucune flache, aucune aspérité, quand les lits et les joints sont rigoureusement d'équerre entre eux et avec le parement, quand les arêtes sont vives et bien nettement tranchées, les pierres prennent le nom de *moellons piqués*, et la surface générale de la maçonnerie prend toute la régularité de la pierre de taille, dont elle ne diffère que par les moindres dimensions des blocs et la moindre profondeur des lits et des joints dressés.

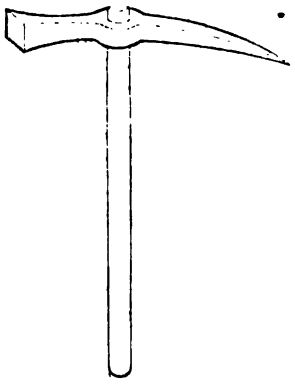
La manière d'exécuter une maçonnerie revêtue de moellons piqués ne diffère pas de la méthode employée pour les moellons smillés. On commence par établir dans la hauteur exactement correspondante à une assise de pierre de taille, les assises de moellons dont les dimensions verticales ont été calculées dans ce but, en tenant compte de l'épaisseur des lits de mortier; puis, on opère le remplissage avec du moellon brut, comme il a été dit plus haut, en prenant toutes les précautions nécessaires pour ne laisser aucun vide entre le remplissage et le revêtement.

Digitized by Google

75. Pour assurer la complète liaison des moellons de parement avec le corps de la maçonnerie, on a le soin de placer, dans une même assise, un moellon court de queue à côté d'un long; il est aussi de rigueur de ne jamais faire correspondre les joints de deux assises en contact, afin d'éviter toute rupture dans la maçonnerie ou au moins dans le revêtement. Les moellons qui présentent leur plus grande longueur en parement sont désignés sous le nom de *carreaux*, et ceux qui pénètrent, au contraire, dans le massif par leur plus petite face, se nomment *boutisses*; enfin, si une pierre était telle qu'elle fît parement par ses deux extrémités dans les deux faces opposées d'un mur, elle prendrait le nom de *parpaing*.

76. *Moellons d'appareil.* — Lorsque des moellons choisis doivent être employés, non plus au simple remplissage des parements, mais dans des parties de la maçonnerie où ils réclament des formes variées et appropriées aux exigences de la construction, comme pour des têtes de murs, des voussoirs, sommiers, etc., leur préparation exige des panneaux spéciaux pour chacun d'eux, et on les appelle alors *moellons d'appareil*. Quant à leur pose, elle demande naturellement un soin particulier, mais elle ne diffère en rien d'essentiel de celle des autres sortes de moellons; c'est toujours sur des lits et joints préalablement garnis de mortier que l'on place la pierre d'appareil, et c'est en frappant avec la tête ou le manche de la hachette ou du *marteau de maçon* qu'on l'amène et la fixe à la position qu'elle doit occuper.

Fig. 2.



Disons en passant que le marteau de maçon ne diffère de la hachette qu'en ce que le tranchant est remplacé par un pic très-allongé. Ces instruments sont d'un usage continuel entre les mains du maçon, qui s'en sert à chaque instant pour frapper ou soulever les pierres et moellons dans les diverses phases de leur pose, et pour toutes les démolitions qui se présentent à l'origine ou pendant la marche des travaux.

MAÇONNERIE DE PIERRE DE TAILLE.

77. On désigne sous le nom de *pierre de taille* tout bloc de pierre, *taillé* sous différentes formes ou destiné à l'être, et dont le poids est ordinairement trop considérable pour qu'il soit possible à un seul homme de le porter. L'exécution de la maçonnerie de pierre de taille comprend plusieurs opérations distinctes : le *choix des pierres*, l'*appareil*, la *taille*, le

Digitized by Google

bardage, le *montage*, la *pose* et le *rejointoiement*. Nous dirons quelques mots de chacune d'elles.

78. Le *choix des pierres* est le point capital, la condition essentielle d'une bonne maçonnerie; les pierres de taille doivent être choisies dans les bancs les plus homogènes des meilleures carrières, parfaitement pleines, dégagées de tout bousin, d'un grain égal, et offrant toutes les qualités requises pour donner, après la taille, un parement régulier; sous le choc du marteau, elles doivent rendre un son plein et clair, et il faut rejeter avec soin toutes celles qui présenteraient à leur surface, soit des traces de ces solutions de continuité plus ou moins profondes, que l'on appelle *fils*, soit des trous ou *moyes* remplis de matières terreuses, et pénétrant trop avant dans l'intérieur pour pouvoir disparaître par la taille.

79. Enfin, on ne saurait apporter trop d'attention à n'admettre que des blocs susceptibles de résister indéfiniment à l'action des gelées. Les pierres *gélives* ou *gélisses* sont ordinairement moins denses que les autres de la même espèce; elles absorbent l'eau avec facilité dans les petites cavités dont leur masse est criblée, et cette eau, venant à prendre plus de volume par la congélation, les fait tomber en écailles très-minces, puis en poussière.

Il arrive quelquefois que des pierres de très-bonne qualité se fendent et éclatent par un très-grand froid; cela tient uniquement à ce que ces pierres, d'une nature assez poreuse, comme presque tous les calcaires, ont été extraites aux approches de l'hiver ou pendant cette saison, et qu'elles ont été employées avant d'avoir pu perdre, par évaporation, l'eau qu'entretenait en elles l'humidité de la carrière.

De là la condition expresse, et dont il ne faut jamais se départir, de faire extraire les pierres destinées aux maçonneries, en temps convenable pour qu'elles puissent perdre toute leur eau de carrière pendant les chaleurs de l'été, avant d'être mises en œuvre; sinon, elles doivent traverser l'hiver sur le chantier, pour y être éprouvées par les gelées.

Il existe un moyen expéditif de reconnaître, d'une manière à peu de chose près certaine, si une pierre donnée est gélive ou non, c'est-à-dire si, une fois débarrassée de son eau de carrière, elle sera encore attaquable par la gelée; ce moyen consiste à imbiber un morceau de la pierre douteuse d'une dissolution de sulfate de soude, et à l'exposer ensuite à l'air; la cristallisation de ce sel produit un effet analogue à celui de la congélation de l'eau, et cette expérience, répétée à plusieurs reprises, donne une indication que l'on peut regarder comme suffisamment précise pour servir de base à l'adoption ou au rejet de la pierre, à moins que l'on

Digitized by Google

ne soit en mesure de l'éprouver directement par son exposition à des gelées intenses.

80. Quelques pierres gélives, qui se comporteraient fort mal à l'air libre, sont cependant susceptibles d'être employées très-utilement dans les fondations des ouvrages, à une certaine profondeur sous l'eau ou dans la terre; on les pose alors sans être taillées et avec la seule ébauche de la carrière. Les blocs de pierre de taille ainsi mis en œuvre, qu'ils soient ou ne soient pas gélifs, s'appellent des *libages*, et ce genre de maçonnerie est aussi solide qu'il est relativement peu dispendieux.

81. L'*appareil* d'une maçonnerie en pierre de taille est la disposition et le tracé méthodique des pierres qui composent les diverses parties d'une construction, et le but à atteindre, dans une pareille opération, consiste à réunir la beauté, la solidité réelle et apparente, et l'économie.

Un bon *appareilleur* doit donc connaître et posséder les principaux éléments de géométrie pratique et descriptive, pour pouvoir tracer en grand les épures de ses blocs, suivant les dessins qui lui sont remis; il doit savoir distinguer la nature et la propriété des matériaux; il doit encore connaître à fond les divers procédés de la taille des pierres, soit pour exécuter en petit des modèles des parties les plus difficiles à appareiller, soit pour tailler lui-même sur le chantier et diriger les ouvriers.

82. L'énorme diversité des constructions s'oppose nécessairement à ce que nous en passions en revue toutes les parties pour indiquer les détails de leur appareil. En terminant nos développements sur les maçonneries, nous donnerons plus loin les principales règles qui président à l'appareil et à la construction des voûtes le plus fréquemment employées dans les travaux publics; nous devons nous borner à exposer ici quelques règles générales dont plusieurs ont, du reste, été déjà indiquées lorsque nous avons parlé des maçonneries de moellons.

1°. Dans tout appareil, une pierre quelconque doit toujours avoir deux faces normales aux directions des efforts auxquels elle a à résister, et que, réciproquement, elle est destinée à transmettre; ainsi, dans une voûte, les joints des voussoirs sont tous perpendiculaires à la courbe intérieure; dans un mur vertical, les faces inférieure et supérieure de chaque pierre d'appareil doivent être horizontales. Ces faces, qui prennent le nom de *lits*, doivent être les mêmes que celles qui forment les lits à la carrière, quand les pierres proviennent de roches stratifiées. Sans cette précaution, les influences atmosphériques n'agissant plus sur elles de la même manière et dans les mêmes conditions, les blocs délités perdraient la plupart du temps toute cohésion, et compromettraient gravement l'existence des

Digitized by Google

maçonneries. C'est souvent à cette seule cause qu'a été due la destruction de pierres parfaitement *pleines* et homogènes, qui ne présentaient ni fils ni moyes, et qui étaient regardées, avec raison, comme entièrement inattaquables par les gélées.

2°. Dans une construction, on donne le nom d'*assise* à chaque rangée horizontale de pierres, et la *hauteur d'assise* d'une pierre est la distance de ses lits. Cette hauteur doit toujours être égale pour les pierres d'une même assise, si l'on veut éviter, outre un effet très-désagréable à l'œil, une inégalité de tassement qui préjudicierait notablement à la solidité.

3°. Il y a généralement avantage, sous le rapport de la solidité, à employer des pierres de très-forte dimension; mais on est limité à cet égard, d'abord par les difficultés de transport et de mise en place, puis parce que les hauteurs des pierres sont souvent assez bornées, et qu'il convient d'observer un certain rapport entre les dimensions verticale et horizontale d'une pierre, afin qu'elle ne soit point exposée à se rompre par suite des inégalités de compression qu'il est prudent de prévoir. Habituellement, les longueurs ne dépassent pas trois fois la hauteur pour des pierres de force moyenne; quatre fois pour les pierres très-résistantes, comme les granits.

4°. Les joints verticaux ne doivent pas se correspondre dans deux assises consécutives; leur distance doit être de $0^m,16$ à $0^m,20$ au moins; quand les joints se *découpent* ainsi, il ne peut y avoir aucun mouvement sans que les pierres se brisent ou glissent avec effort les unes sur les autres.

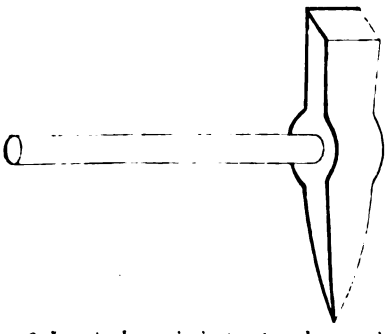
5°. La face opposée d'un parement, la face de queue d'une pierre de taille se laisse entièrement brute quand cette pierre ne doit pas faire parpaing; de cette manière, l'adhérence au blocage intérieur est plus facile et plus assurée.

6°. Il faut éviter aussi de placer des joints, soit verticaux, soit horizontaux, dans les angles rentrants et saillants que peut former le parement d'une maçonnerie de pierre de taille. Ainsi, une pierre unique, formant l'angle de deux murs, les relie avantageusement; mais si une retraite horizontale correspondait à un lit, l'humidité, la végétation et les autres causes de destruction s'y développeraient plus facilement.

83. La *taille* des pierres est l'opération qui a pour objet de donner aux blocs extraits de la carrière les formes variées que demande l'appareil des constructions; ce travail, exécuté par des ouvriers spéciaux, intéresse plutôt le Conducteur des Ponts et Chaussées par ses résultats que par ses procédés. Nous nous bornerons donc à mentionner ici les principaux outils qui sont employés par le tailleur de pierre, et avec l'usage desquels il est bon d'être au moins théoriquement familiarisé; ce sont :

Digitized by Google

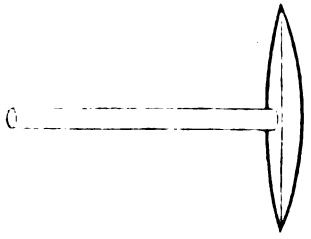
Fig. 3.



1°. Le *têtu*, lourd marteau en fer aciéré, qui porte d'un côté une tête carrée, et une pointe de l'autre. Il sert à dégrossir les pierres, quand elles sont très-irrégulières; dans ce travail, l'ouvrier doit apporter une grande attention pour bien diriger ses coups et ne pas abattre plus de pierre qu'il ne faut.

2°. La *pioche*, qui n'est autre chose qu'un marteau en fer, terminé par des pointes aciérées à quatre pans. Pour les pierres dures, ces pointes ne doivent pas être trop fines, car elles se briseraient trop facilement; pour les pierres tendres, l'une des pointes est remplacée par un tranchant de 3 ou 4 centimètres de largeur, et l'autre par une *herminette* de même largeur, à tranchant recourbé et perpendiculaire au manche.

Fig. 4.



3°. Le *marteau bretté* ou *laye*, dont les extrémités, aplaties parallèlement au manche, forment des tranchants découpés en dents; cette disposition facilite beaucoup le dressage des parements. Pour les pierres tendres, le marteau n'est ordinairement bretté que d'un côté, l'autre tranchant restant uni; il faut une certaine habitude pour manier convenablement cet instrument, qui sert à finir le dressage des surfaces vues des pierres; celles-ci sont dites alors *layées*.

Fig. 5.

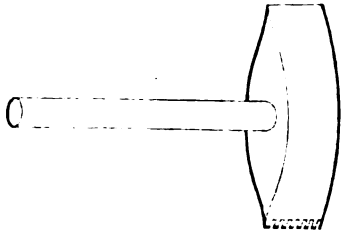
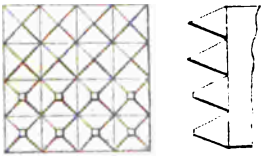


Fig. 6.



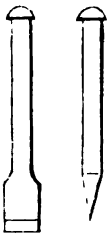
4°. La *boucharde*, autre marteau à têtes carrées et taillées en pointes de diamant, comme l'indique la figure ci-contre, qui représente, dans sa moitié inférieure, des pointes déjà usées. Pour se servir de cet outil, l'ouvrier frappe

Digitized by Google

du plat de ses têtes les parements dégrossis à la pioche, de manière à en détacher les aspérités.

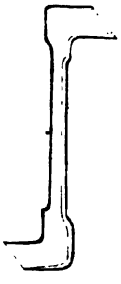
5°. Les *ciseaux* et les *poinçons* sont des morceaux d'acier ou de fer aciéré à leur extrémité, dont la longueur varie de $0^m,15$ à $0^m,20$, et de 1 à 2 centimètres de diamètre; l'une de leurs extrémités s'aplatit en un tranchant ou s'aiguise en pointe; les premiers servent à la taille des pierres, et principalement à la confection des *ciselures* au pourtour des parements; les seconds sont ordinairement employés pour les refouillements et les percements de trous. Pour les pierres très-dures, le tranchant des ciseaux est dentelé, et l'outil prend alors le nom particulier de *gradine*.

Fig. 7.



Pour se servir des ciseaux, gradines et poinçons, on les serre avec la main gauche, en appliquant leur tranchant ou leur pointe sur la pierre, et de la main droite on frappe sur leur tête avec un maillet en bois de charme ou de buis, ou avec une massette parallélépipédique percée d'un trou qui reçoit un manche.

Fig. 8.

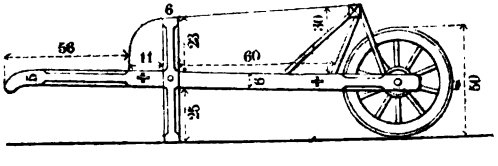


6°. La *ripe*, enfin, est une tige en fer dont les extrémités, épanouies en tranchants aciérés, sont recourbées en sens opposés; l'un des tranchants est uni, l'autre dentelé. L'ouvrier, prenant cet outil à la main, passe d'abord le côté dentelé sur le parement des pierres, pour en effacer les inégalités laissées par le marteau bretté; puis, il termine la taille avec le tranchant uni. Une surface est ordinairement achevée quand elle a été passée à la ripe.

84. Le *bardage* des pierres de taille, et plus généralement des matériaux de construction de toute nature, n'est autre chose que le transport de ces matériaux du lieu où ils ont été travaillés ou emmagasinés au lieu où ils doivent être employés; il s'opère au moyen de divers outils que nous allons énumérer, avec quelques détails explicatifs pour chacun d'eux.

La *brouette ordinaire, à coffre*, est employée de préférence pour transporter les terres, les sables, le mortier, et en général toutes les matières agglomérées; elle contient ordinairement un vingt-cinquième de mètre cube sur les chantiers de maçonnerie; le chargement y est souvent main-

Fig. 9.



Digitized by Google

tenu par une petite planche placée sur le devant. Une brouette vide pese environ 23 ou 24 kilogrammes, et avec cet instrument un homme transporte moyennement une charge de 90 ou 100 kilogrammes.

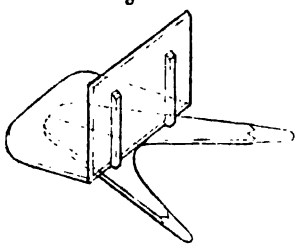
La *brouette à barres* s'emploie particulièrement au transport des moellons et autres objets d'un volume déjà assez considérable, mais pouvant cependant être chargés et transportés par un seul homme; le brancard est le même que pour la brouette à coffre, mais il n'y a pas de caisse: un fond et un dossier en barres à claire-voie soutiennent la charge, qui peut facilement se renverser, si rien ne s'oppose d'ailleurs à ce mode expéditif de déchargement.

La *cuvière* ou *bard* est un système composé de deux petits brancards réunis en leur milieu par des planchettes non jointives sur lesquelles on place les matériaux; deux hommes le portent facilement avec ou sans bricole croisée sur les épaules; selon la charge, quatre autres peuvent être distribués autour des premiers en dehors du bard. On emploie avec avantage ce mode de transport sur les ateliers, pour les moellons piqués ou les pierres de taille d'un poids peu considérable, principalement lorsque l'on doit gravir des rampes qui ne permettent pas l'usage de la brouette.

Le *diable* ou *binard* est une voiture très-basse, à deux roues, que l'on emploie sur les chantiers pour transporter les pierres de taille; elle se compose d'une grande pièce de bois formant flèche ou timon et à laquelle deux autres pièces parallèles sont reliées, d'un plancher en madriers qui reposent sur les trois pièces ci-dessus, et d'un essieu garni de ses roues. La manœuvre du binard réclame beaucoup de soin, pour ne pas écorner les pierres taillées; c'est surtout pendant le chargement et le déchargement que les arêtes courent le danger d'être endommagées. Quant au transport en lui-même, il se fait par des hommes agissant au moyen de bricoles, et en nombre proportionné au poids à traîner; quelquefois un cheval est même attelé en avant des ouvriers, dont quelques-uns poussent encore à l'arrière.

Pour les petites distances, on se contente de faire avancer les pierres sur des *rouleaux* en bois que l'on fait courir sur des madriers ou sur des planches, pour se rendre indépendant des inégalités ou de la mollesse du sol; on ménage encore les arêtes des pierres tendres taillées, en plaçant ces pierres elles-mêmes sur un madrier qui avance avec elles.

Fig. 10.



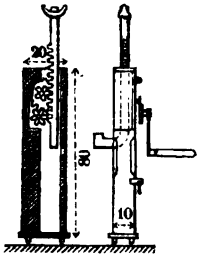
Enfin, le transport du mortier, surtout quand on doit le monter à l'aide d'échelles, se fait soit dans une auge évasée, soit avec un assemblage en bois, nommé *oiseau* ou *volée*, formé de deux planches disposées à angle droit et maintenues par quatre barres. Deux de ces barres font saillie de

Digitized by Google

$0^m,40$ à $0^m,50$, et enveloppent le cou de l'ouvrier, qui les porte à califourchon sur ses épaules en tenant leurs extrémités dans ses mains.

85. La manœuvre des pierres de taille sur les chantiers, tant pour les mettre dans des positions propres à faciliter leur travail que pour le bardage, exige l'emploi très-fréquent du *cric*, instrument d'une grande puissance et d'une utilité journalière. Il y a plusieurs espèces de crics; nous ne distinguerons que le *cric simple* et le *cric composé*, qui sont d'ailleurs les seuls communément employés.

Fig. 11.



Tous deux sont formés d'un fort madrier en bois dur, tout bardé de fer, que l'on nomme la *chape* du cric, et d'une crémaillère en fer placée dans l'intérieur de la chape; cette crémaillère en est chassée longitudinalement par le mouvement d'un engrenage et d'une manivelle.

Pour soulever un fardeau avec le cric, on en pose le pied ou *sabot* sur le sol ou sur un autre point d'appui résistant; on place la tête de la crémaillère formée par un croissant en fer, ou son extrémité inférieure convenablement recourbée à angle droit, sous l'objet à mouvoir, et l'on imprime un mouvement à la manivelle. On a toujours, en outre, le soin de garnir l'arbre de cette dernière, au contact de la face extérieure de la chape, d'un rochet dans les dents duquel entre l'extrémité d'un cliquet poussé par un ressort; cette disposition permet de lâcher la manivelle quand on veut se reposer ou vérifier l'état de la pièce soulevée, de même qu'elle donne le moyen de modérer ou graduer la descente du fardeau, s'il devient nécessaire de l'abaisser d'une certaine quantité.

Lorsque le pignon qui commande la crémaillère est monté directement sur l'arbre de la manivelle, le cric est dit *simple*; il est *composé* quand le mouvement ne se transmet à la crémaillère que par l'intermédiaire de deux ou plusieurs pignons, et d'une, deux ou plusieurs roues d'engrenage, le tout enfermé dans le corps de la chape; cette dernière disposition permet de soulever des charges beaucoup plus grandes qu'avec le cric simple.

C'est en général le cric simple ou composé qui sert sur les chantiers pour faire faire à une pierre parallélépipédique un quart de révolution; cette manœuvre, qui la fait porter d'une face sur la face adjacente, s'appelle faire *faire quartier* à la pierre.

86. Le *montage* des pierres de taille, et en général de tous les fardeaux considérables, s'opère au moyen de *poulies*, de *mouffles*, de *treuils* ou *cabestans*, ou de *chèvres*. Les trois premières de ces machines ont été l'objet d'un examen spécial dans la Statique, tant en ce qui concerne

Digitized by Google

leur construction que leur mode d'emploi; nous n'aurons donc à nous occuper ici que de la chèvre, qui n'est d'ailleurs qu'un système composé des premiers.

La *chèvre* consiste ordinairement, comme l'indique la figure ci-contre, en deux pièces de bois appelées *bras*, assemblées à angle aigu au moyen de plusieurs entretoises. A $1^{m},60$ environ du pied de la chèvre, se trouve l'axe d'un treuil dont l'arbre est percé de deux trous rectangulaires destinés à recevoir les bouts des leviers servant à la manœuvre. A la partie supérieure de la chèvre est une poulie qui se meut sur un boulon traversant les bras; la partie déroulée de la corde du treuil vient passer sur la poulie, et à son extrémité s'attache le fardeau qu'il s'agit de monter ou de descendre.

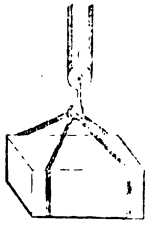
Fig. 12.

Pour se servir de la chèvre, on la place dans une position inclinée, afin que les fardeaux ne touchent pas au treuil ou aux entretoises, et on l'y maintient à l'aide de trois cordages qui partent de son sommet et vont s'amarrer à des points fixes environnants. Les deux cordages disposés pour empêcher la chèvre de tomber en avant portent le nom de *haubans;* le troisième, que l'on place en sens contraire des deux premiers, pour prévenir le renversement de la chèvre, s'appelle *contre-hauban.*

Le treuil des chèvres est quelquefois commandé par des engrenages que l'on fait mouvoir à l'aide de manivelles; cette disposition facilite beaucoup la manœuvre, et donne une grande puissance; on adapte d'ailleurs à toutes les chèvres, comme dans le cric, un rochet qui empêche les fardeaux de descendre subitement, et au moyen duquel on évite de graves accidents.

87. Le plus habituellement, pour monter une pierre, on l'enveloppe d'une corde sans fin, appelée *élingue* ou *braye*, dont on écarte les brins pour que la pierre ne puisse ni glisser ni tourner; les deux anneaux de l'élingue s'accrochent à une esse fixée, soit à la chape d'une poulie mobile, soit à l'extrémité du câble de la chèvre.

Fig. 13.

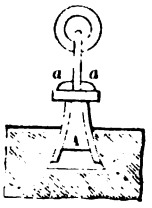


Lorsque les pierres à monter sont destinées à des ouvrages délicats, on renonce à l'emploi de l'élingue qui détériore presque toujours les arêtes.

Digitized by Google

quelques précautions que l'on prenne pour éviter cet inconvénient; on fait alors usage d'un petit instrument en fer appelé *louve*, qui se compose d'une partie centrale A taillée en queue d'aronde à sa partie inférieure, et dont la tête porte un anneau qui s'accroche à l'esse du câble de la chèvre, et de deux parties latérales a, a, recourbées d'équerre par le haut, et retenues contre la pièce A par un autre anneau horizontal qui leur permet tout mouvement longitudinal quand la louve n'est pas chargée.

Fig. 14.

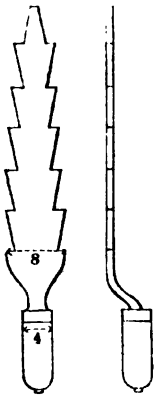


Pour se servir de cet instrument, on fait dans le lit supérieur de la pierre un trou que l'on creuse en queue d'aronde, de même inclinaison que la louve; on introduit dans ce trou le bas de la pièce A, en tenant les parties a, a soulevées de toute la longueur de la queue; on fait alors descendre ces parties dans le trou, et la louve ainsi emprisonnée permet de soulever la pierre qui doit d'ailleurs être dure, pour que ce moyen d'élévation ne la fasse pas éclater.

Enfin, on remplace quelquefois la louve par un simple piton à vis triangulaire, que l'on introduit dans un trou creusé au milieu du lit de la pierre. On donne à ce trou le diamètre de l'âme de la vis, et les filets de celle-ci se noient complétement dans la masse qui peut ainsi s'enlever sans difficulté.

88. La *pose* des pierres de taille est peut-être la partie la plus délicate de ce genre de construction. Parmi les procédés divers employés pour ce travail, le meilleur est sans contredit le suivant : après qu'une assise a été posée, on vérifie et l'on dresse exactement de niveau son lit supérieur; la pierre à poser est ensuite essayée en la mettant en place, à sec, sur de petites règles en bois de même épaisseur que celle qui a été assignée aux lits (de $0^m,005$ à $0^m,01$); puis on l'enlève; on lui fait, s'il en est besoin, les ragréments reconnus nécessaires, et on la replace en substituant aux règles de bois un lit de mortier d'une épaisseur à peu près double, épaisseur que l'on réduit ensuite à la mesure voulue, en comprimant fortement la pierre à coups de maillet ou de demoiselle de paveur. Le mortier en excès reflue au dehors; quant aux joints verticaux, on les emplit en même mortier qu'on y *fiche* au moyen d'un *sabre*, instrument en forme de scie, et dont les dents pressent le mortier et le font pénétrer dans le joint.

Fig. 15.



Cette méthode est moins expéditive que la suivante, qui est encore trop fréquemment employée, et qui est on ne peut

Digitized by Google

plus vicieuse ; elle consiste à poser les pierres à sec sur des cales en bois, puis à remplir les lits et les joints en y coulant du mortier liquide, ou en l'y introduisant avec le sabre, comme il a été dit plus haut. Par ce procédé, que l'on ne saurait proscrire avec trop de rigueur, les pierres n'adhèrent point les unes aux autres ; elles ne portent que sur leurs cales, et la pression, au lieu d'être répartie sur toute la surface des lits, est concentrée sur quelques points seulement, ce qui ne manque presque jamais d'amener de l'instabilité, des tassements inégaux, et quelquefois la rupture de la maçonnerie.

Le complément indispensable de la pose des pierres de taille est le *ragrément* du parement général, opération qui consiste à réparer par la boucharde ou le marteau les irrégularités, saillies, bavures, etc., qui résultent à un degré plus ou moins prononcé, soit de défauts dans la taille des blocs isolés, soit des imperfections de leur pose elle-même. Cette main-d'œuvre offre en outre l'avantage de rendre aux maçonneries l'aspect de propreté qu'elles ont nécessairement perdu pendant leur construction.

89. Enfin, les maçonneries de pierres de taille, comme celles de moellons à assises régulières, et comme celles de briques que nous examinerons bientôt, doivent être *rejointoyées*.

Le rejointoiement s'opère en creusant fortement les joints verticaux et horizontaux avec un crochet en fer, et jusqu'à une profondeur de 2 à 3 centimètres, en les nettoyant soigneusement avec une brosse dure ou un balai, les arrosant au besoin, et les remplissant de mortier que l'on presse avec la truelle, pour le faire adhérer complétement aux matériaux.

Dans cette opération, on peut donner aux surfaces vues des joints l'une des trois formes indiquées ci-contre ; la première *a* représente un joint plat, qui affleure le nu du parement ; elle est usitée toutes les fois qu'il s'agit de maçonnerie de pierres tendres, dont les arêtes sont susceptibles de *s'épaufrer* facilement. C'est aussi cette forme qui est adoptée pour la maçonnerie de briques ; il importe seulement de ne pas couvrir de mortier les faces apparentes de ces dernières.

Fig. 16.

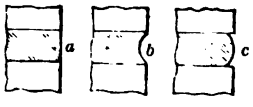


Fig. 17.

Dans le cas de joints plats, on les trace souvent sur le mortier lissé, en se guidant avec une règle, au moyen d'un outil appelé *tire-joints* ; c'est une tige recourbée en fer, de 5 à 6 millimètres de largeur et de $0^{m},25$ de longueur, garnie d'un manche en bois. On presse la partie arrondie de cette tige sur le mortier, jusqu'à ce que le joint soit noirci dans toute la largeur de l'outil ; mais ce travail doit être fait avec une minutieuse régularité pour contribuer au bon effet des maçonneries.

Digitized by Google

Les joints des parements des maçonneries de moellons bruts ou smillés se font quelquefois plats ou quelquefois creux, selon la forme *b* de la *fig.* 16; mais le plus souvent on les fait en boudin, comme l'indique la forme *c*; ces derniers joints, qui conviennent aussi surtout aux pierres de taille dures, résistent mieux aux actions de la pluie et de la gelée, et le dégagement des arêtes donne de plus aux parements un aspect de solidité et de beauté parfaitement en harmonie avec ce genre de construction.

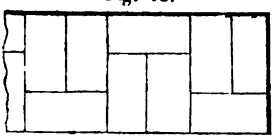
MAÇONNERIE DE BRIQUES.

90. Les règles pour la confection des maçonneries de briques ne diffèrent pas de celles qui concernent la maçonnerie de moellons; il importe toujours d'éviter avec soin les continuations de joints, surtout en ce qui concerne les joints verticaux, condition à laquelle, du reste, la forme régulière des briques permet de satisfaire facilement.

A l'exception des parapets des ponts et de quelques voûtes, les briques sont exclusivement employées, dans les travaux publics ordinaires, comme revêtement de parements; il est de toute nécessité, dans de telles circonstances, de faire en sorte que ce revêtement ait tous ses éléments parfaitement liaisonnés entre eux, et se relie aussi intimement que possible avec la maçonnerie de moellons bruts. Pour obtenir ce résultat, il faut croiser, d'une part, tous les joints verticaux, d'autre part alterner convenablement les briques en carreaux et en boutisses.

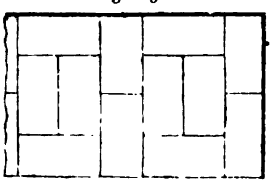
La bonne exécution de la maçonnerie de briques exige que ces matériaux soient trempés dans l'eau avant l'emploi, pour éviter l'absorption immédiate de l'eau du mortier et favoriser l'adhérence. Cela fait, l'ouvrier étend la couche sur laquelle il doit poser les briques, en ayant soin qu'elle s'arrête à 2 ou 3 centimètres de la face du parement, afin que, par la pression de la pose, le mortier ne s'échappe pas; une maçonnerie de briques bien faite ne doit pas avoir de joints dépassant $0^{m},005$ d'épaisseur, et les joints verticaux doivent tous, autant que cela se peut, se correspondre de deux en deux assises.

Fig. 18.



Dans les parapets, si l'épaisseur doit être égale à trois largeurs de brique, on dispose chaque assise comme il est représenté dans la figure ci-contre, en faisant correspondre deux boutisses à un carreau, alternativement sur chacune des deux faces.

Fig. 19.



Si l'épaisseur devait être égale à deux fois la longueur d'une brique, on pourrait adopter la disposition ci-contre qui fait alterner des systèmes composés, les uns de deux boutisses, les autres de deux carreaux en parement séparés par deux boutisses intérieures adjacentes.

Digitized by Google

Dans l'un ou l'autre de ces systèmes, on parvient toujours à liaisonner complétement le massif d'une manière satisfaisante par le croisement des joints des assises superposées.

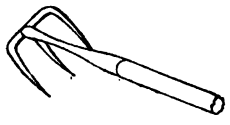
Il est bien entendu, d'ailleurs, que la hauteur des assises de pierre de taille doit être calculée de manière que chaque assise corresponde à un nombre exact de briques, en tenant compte de la somme des épaisseurs nécessaires pour les joints de ces dernières.

MAÇONNERIE DE BÉTON.

91. La maçonnerie de béton est composée, comme cela a déjà été dit (33), de menues pierrailles mélangées avec du mortier hydraulique, et est surtout employée dans la fondation des ouvrages pour l'établissement desquels il est impossible d'abaisser le niveau de l'eau jusqu'à la profondeur nécessaire pour travailler à sec, ou au moins à la main. La maçonnerie de béton n'est donc autre chose que de la maçonnerie de blocage ou de moellon brut dont les blocs principaux ont été réduits à une grosseur assez faible pour rendre indifférentes leurs positions relatives, sans nuire à la condition indispensable d'avoir une couche de mortier interposée entre deux pierres adjacentes quelconques.

92. Nous avons examiné les proportions ordinaires du mélange, proportions variables, depuis le béton *maigre* jusqu'au béton *gras*, en raison du degré de résistance de la masse à former et de la rapidité de sa prise; nous avons également parlé de l'incorporation de la pierre avec le mortier, sur des aires en planches et au moyen de griffes en fer à trois dents; nous n'avons plus à nous occuper que de l'opération de l'immersion du béton, opération très-délicate, de laquelle dépend souvent tout le succès de l'entreprise, et qui mérite quelques développements :

Fig. 20.



1°. Quand la hauteur d'eau n'égale pas 1 mètre, l'immersion du béton se fait à talus coulants. On décharge sur le bord un massif de béton que l'on presse à la dame, de manière à le faire glisser doucement sous l'eau; on charge successivement le bord du massif ainsi obtenu, et en dressant le bourrelet on fait insensiblement avancer le talus et la masse jusqu'au parfait remplissage de la fouille, en même temps que l'on tasse la maçonnerie à la dame plate, à mesure de l'avancement du travail.

2°. Quand la hauteur d'eau excède 1 mètre, plusieurs procédés, différents seulement par leurs détails, peuvent être employés; le plus usité, et celui qui paraît donner les meilleurs résultats, consiste à opérer l'immersion du béton au moyen de caisses prismatiques à fond mobile, contenant chacune environ un sixième de mètre cube, descendues au moyen

Digitized by Google

d'un treuil jusque sur le fond des fouilles, puis remontées seulement de la quantité nécessaire pour en permettre la vidange.

Les caisses, portées chacune sur un chariot léger, sont manœuvrées par mouvements réguliers et parallèles, soit au moyen de radeaux, soit avec des échafaudages à coulisses préparés à cet effet. Celles qui se videraient par mouvement de bascule doivent être formellement interdites, comme nuisant à la qualité du béton en le délayant dans l'eau. Les caisses à bétonner sont disposées par lignes. La première immerge la couche de fond sur environ 1 mètre de hauteur; la seconde ligne, placée à $1^{m},50$ en arrière, verse la seconde couche, ayant la même hauteur de 1 mètre, et ainsi de suite jusqu'à la hauteur fixée, de manière à faire avancer le massif régulièrement, comme d'une seule pièce, en présentant un talus sur lequel les vases glissent jusqu'au fond de la fouille entraînées par le batillage.

Au fur et à mesure de son immersion, on presse soigneusement à la dame plate, et sans secousses, le béton de chaque couche; on le tasse ainsi, et les vases dégorgent par le talus.

En avant de l'atelier d'immersion, des ouvriers armés de raclettes en tôle et de larges balais en bouleau nettoient, par des mouvements doux, le sol des fondations au pied du béton, et entraînent les vases vers des trous ou parties du sol approfondies d'environ $0^{m},30$ au-dessous du plan de fondation; des dragueurs choisis extraient ensuite avec précaution de ces trous les vases qui s'y trouvent accumulées. De plus, à chaque reprise du travail, des hommes munis de larges balais en paille nettoient, sans agiter l'eau, la surface du béton précédemment coulé, et mettent cette surface à nu, en chassant toutes les vases qui s'y seraient déposées. Enfin, chaque fois que le béton doit rester exposé sans revêtement à l'action des eaux, on a soin de dresser, comprimer et lisser, au moyen d'un rouleau en fonte ou en pierre, la couche supérieure du massif.

3°. Le béton posé à sec, quand on juge à propos d'employer ce genre de maçonnerie à l'air libre, ou quand il est possible de mettre économiquement à nu le fond de la fouille en épuisant l'eau qui s'y trouve, s'approche simplement à la brouette et se verse avec précaution, en procédant toujours par un massif présentant des talus à redans, et non par couches générales; les talus, et surtout les redans, sont successivement tassés et fortement pilonnés à la dame plate, de manière à former une seule masse bien serrée et bien compacte. Les parties qui seraient desséchées sont soigneusement recoupées et ravivées avant la pose du nouveau béton; enfin, les surfaces visibles, et particulièrement les talus, doivent être abritées contre l'action du soleil, de la pluie et du vent, par une toile humide, des planches ou des nattes.

Digitized by Google

FONDATIONS.

93. Les fondations sont, dans toute construction, la partie qu'il est toujours le plus important et parfois le plus difficile d'établir avec toutes les garanties désirables de solidité; on comprend néanmoins que la plus légère faute commise dans l'assiette de l'édifice sur le sol peut amener des conséquences funestes, et quelquefois irréparables, pour sa solidité et son existence. On voit donc qu'il y a nécessité d'apporter dans le choix de tel ou tel système de fondation une minutieuse attention, et d'étudier avec soin les deux éléments principaux qui peuvent déterminer l'adoption d'un mode à l'exclusion des autres, savoir : d'une part, la nature, l'intensité et la direction des actions que la construction doit exercer sur le terrain; d'autre part, la nature propre de ce terrain, au point de vue de la résistance qu'il est susceptible d'opposer à ces actions.

Outre la pression verticale résultant du poids de la masse à édifier et des surcharges accidentelles qu'elle est destinée ou exposée à recevoir, un massif de fondation peut encore être sollicité au glissement horizontal, soit par la pression des terres ou des eaux ambiantes, soit par la poussée des voûtes qui s'appuient sur lui, soit enfin par toute autre cause.

Le plus souvent, cette tendance au glissement est suffisamment détruite par l'adhérence et par le frottement des maçonneries, ou par la résistance latérale qu'exerce le terrain opposé à la pression. Dans les cas exceptionnels où ce résultat ne peut être atteint ainsi d'une manière complétement rassurante, on s'oppose à tout mouvement horizontal au moyen de tirants en fer ou d'arcs-boutants en maçonnerie rattachés à des points invariables; on rend les terres voisines plus résistantes en les pilonnant fortement et en les renforçant de blocs de pierre plus ou moins volumineux ; ou bien enfin on asseoit les fondations sur un plan non plus horizontal, mais dressé normalement à la direction moyenne de la résultante de toutes les forces, tant permanentes qu'accidentelles, qui agissent sur elles. Les cas où l'application de ces procédés est indispensable sont d'ailleurs, comme nous l'avons dit, tout à fait exceptionnels, et il est presque toujours suffisant de prendre en considération la pression verticale.

Ceci bien expliqué, il ne nous reste plus qu'à étudier les moyens à mettre en usage et les dispositions à adopter pour résister à tout abaissement de la construction, que nous supposerons, comme il est habituel de le faire, assise sur un plan parfaitement dressé de niveau. A ce point de vue, l'incompressibilité indéfinie du sol qui supporte la fondation est ce que l'on doit chercher par-dessus tout, et procurer artificiellement, s'il y a lieu. Toutefois, quand il s'agit de constructions exposées à l'action des eaux courantes, il importe encore que les fondations reposent sur un terrain non-seulement incompressible, mais encore non susceptible d'être corrodé par les eaux et de se dérober ainsi graduellement ou d'une ma-

Digitized by Google

nière subite. Un terrain donné est donc d'autant plus favorable à l'établissement d'un ouvrage d'art, qu'il possède à un plus haut degré la propriété d'être à la fois incompressible et inaffouillable; mais, comme il est toujours facile de se mettre à l'abri des affouillements par des moyens qui seront indiqués dans ce qui va suivre, nous allons nous borner à exposer succinctement les méthodes à employer pour fonder, d'abord sur des terrains incompressibles, puis sur des terrains compressibles jusqu'à une profondeur qu'il est impossible de songer à atteindre pour y établir directement les fondations.

94. *Fondations sur terrains incompressibles.* — Le rocher est, sans contredit, l'assiette la plus solide et la plus certaine que l'on puisse désirer pour une fondation quelconque; qu'il soit ou non sous l'eau, on l'arase de niveau ou par gradins horizontaux, et l'on élève sans danger la construction jusqu'à telle hauteur qu'on le veut. Il convient seulement, dans le cas des gradins, de comprimer fortement, à mesure qu'elle s'élève, la maçonnerie qui doit racheter leur différence de hauteur; il est même toujours plus sûr de l'exécuter entièrement en pierres de taille ou en forts libages, si elle doit supporter de lourdes charges. On doit en outre augmenter notablement, quoique dans de justes limites, la largeur de l'empatement des maçonneries dans les fondations, de manière à répartir la pression sur une plus grande surface, quand la construction à élever est d'un poids considérable, et si surtout le rocher présente lui-même une résistance à l'écrasement moindre que celle des matériaux employés.

Le système de fondation directe peut encore s'appliquer à des terrains pierreux, graveleux ou sablonneux; cependant, comme ces terrains, bien qu'ils soient réellement incompressibles, sont toujours plus ou moins mobiles, il est généralement prudent de pénétrer à une plus grande profondeur et d'y répartir aussi uniformément que possible la pression au moyen de libages et d'une épaisse couche de béton.

95. Mais il arrive bien souvent que le sol incompressible est situé soit sous l'eau, soit sous des couches compressibles, à des profondeurs qui ne permettent pas de le mettre à découvert sans avoir recours à des déblais ou à des épuisements trop dispendieux; on évite cet inconvénient en procédant par l'un des moyens que nous allons successivement et brièvement indiquer.

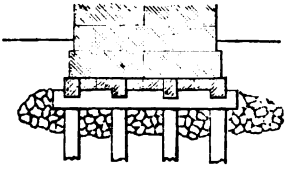
1°. On enfonce, dans toute l'étendue des fondations, des pieux espacés de $0^m,80$ à $1^m,20$ d'axe en axe, suivant la pression totale qu'ils auront à supporter, et suivant leur diamètre, qui doit être en général le vingt-quatrième de leur longueur sans toutefois descendre au-dessous de $0^m,18$. Nous verrons bientôt quelques indications sur les règles et les procédés du battage de ces pieux auxquels, dans les conditions ci-dessus, on peut

Digitized by Google

sans danger imposer une charge de 50 kilogrammes par centimètre carré de leur section horizontale.

Les pieux étant disposés en quinconce et enfoncés jusqu'à ce que l'on n'ait plus à craindre aucun affaissement sous le poids de la construction, on les coupe tous de niveau et à une hauteur convenable et préalablement fixée; on enlève entre ces pieux toutes les terres que le battage a rendues mobiles, et on y introduit soit un blocage en pierres sèches, soit du béton ou de la maçonnerie à mortier hydraulique, selon que l'on opère à sec ou sous l'eau. Ces matériaux doivent être fortement comprimés à mesure qu'on les pose, et ils ont pour objet de maintenir les têtes des pieux, d'augmenter les frottements latéraux qui s'opposent à l'enfoncement, et d'ajouter ainsi beaucoup à la rigidité du système.

Fig. 21.



On applique ensuite sur le tout une sorte de grillage en charpente, formé de *longrines* reliant les files longitudinales de pieux, et de *traversines* assemblées à mi-bois sur les premières; la maçonnerie inférieure monte jusque dans les cases de ce grillage, que l'on couronne d'une plate-forme en madriers, et c'est sur cette base que l'on élève l'édifice.

Toutefois, la plate-forme unie nous paraît avoir l'inconvénient d'adhérer mal à la maçonnerie et de favoriser un glissement qui pourrait devenir funeste; nous regardons comme bien préférable de remplacer le platelage en bois par une épaisse couche de béton qui enveloppe les têtes des pieux et les maintient solidement, et de placer, s'il y a lieu, sur ce massif un ou deux rangs de forts libages qui répartissent la pression de la manière la plus avantageuse.

Ce mode de fondation *sur pilotis* peut s'employer indifféremment et sauf quelques légères modifications de détail, soit que l'on ait à établir une construction sur un terrain sec qui ne devient incompressible qu'à une certaine profondeur, soit qu'il s'agisse de fonder dans l'eau; les procédés suivants sont spéciaux à ce dernier cas.

2°. Au moyen de batardeaux, on circonscrit l'emplacement des fondations; on *épuise* les eaux contenues dans cette enceinte avec des machines dont nous donnerons plus loin une description succincte, et on s'y établit ensuite, comme il a été expliqué plus haut, sur le sol mis à sec. Mais on comprend que ce moyen doit cesser d'être avantageux quand l'eau atteint une profondeur considérable, à cause de la difficulté et de la dépense des épuisements; les batardeaux d'ailleurs résisteraient mal à une pression latérale exercée par une hauteur d'eau supérieure à 2 mètres et plus.

C'est ici le lieu de dire que la composition et les dimensions de ces batardeaux varient avec la hauteur des eaux qu'ils ont à soutenir, avec la

Digitized by Google

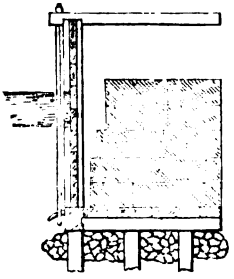
force du courant et avec les ressources locales dont on dispose. Quelquefois ce sont de simples digues en terre; tantôt ces digues s'appuient contre une enceinte de pieux dont les intervalles sont remplis soit par des *fascines*, soit par des madriers jointifs de 8 à 10 centimètres d'épaisseur, terminés en pointe à leur extrémité inférieure pour pénétrer plus facilement dans le sol, et appelés *palplanches;* tantôt enfin les terres sont contenues entre deux enceintes parallèles, et cette disposition permet de réduire notablement l'épaisseur du batardeau que, à défaut de terre de qualité convenable, on remplit alors souvent en béton hydraulique.

On emploie quelquefois aussi, mais seulement pour les faibles hauteurs d'eau, de simples panneaux en charpente diversement combinés et dont les vides sont remplis par des platelages légers contre lesquels viennent s'appuyer les terres, ou plus simplement encore par des toiles goudronnées.

3°. Quand il s'agit d'établir les fondations d'un ouvrage sur le fond d'un lit situé à une grande profondeur sous l'eau, on peut employer et l'on emploie encore quelquefois une sorte de bateau à fond plat et à bords verticaux, dans lequel on édifie les maçonneries comme sur la terre ferme. Les faces latérales de ce *caisson* sont préparées de manière à se démonter et à s'enlever à volonté; on l'amène en place, puis on le fait échouer, soit par le poids des maçonneries, soit en le chargeant de matériaux que l'on enlève ensuite; quand ce système se trouve arrivé à une certaine distance du fond, on y laisse entrer l'eau, afin d'avoir plus de facilité pour terminer l'échouage convenablement.

Si le terrain qui forme le lit du fleuve est incompressible, on se borne à le niveler, et l'on y fait reposer immédiatement le caisson; mais le plus habituellement on enfonce au préalable des pieux que l'on coupe, que l'on *recèpe* de niveau, à la profondeur voulue, et dont on garnit les intervalles avec des enrochements ou du béton; on fait ensuite échouer le caisson sur les têtes de ces pieux. La figure ci-contre présente la demi-coupe transversale d'une fondation de cette espèce; le fond du caisson est composé de fortes pièces équarries et jointives, qui s'assemblent à rainure dans les deux pièces de rive; les côtés sont composés de poteaux contre lesquels s'appuient, aussi à rainure, des châssis en madriers, et qui sont reliés à leur partie supérieure par des traverses horizontales. Ces traverses, qui maintiennent tout le système, sont elles-mêmes fixées au fond par des tirants en fer qui sont attachés à un crochet par le bas et serrés en haut par un écrou. On voit que, par cette disposition, il suffit d'en-

Fig. 22.

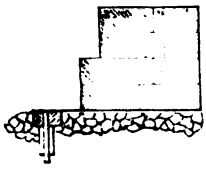


Digitized by Google

lever les écrous pour rendre indépendantes et détacher les parois latérales du caisson.

4°. Un autre moyen, plus fréquemment employé maintenant à cause de sa simplicité et de l'économie qu'il procure, consiste à former autour de l'emplacement des fondations une enceinte de pieux et de palplanches, à draguer dans cette enceinte jusqu'à ce que l'on atteigne un sol suffisamment incompressible, et à la remplir de béton, pour établir sur ce massif artificiel la première assise des maçonneries. Les belles découvertes de M. l'inspecteur général Vicat sur les propriétés des chaux et mortiers hydrauliques ont rendu fort simple et d'une exécution sûre et facile ce mode de fondation sous l'eau.

Fig. 23.



5°. Enfin, si le fond du lit était un roc nu et résistant, qui ne permît pas d'enfoncer des pieux, on pourrait former l'enceinte au moyen d'un coffre sans fond, construit à sec sur le chantier, et composé de poteaux montants et de fortes palplanches que maintiennent deux ou plusieurs cours d'entretoises horizontales. La hauteur de chacune des pièces verticales du coffre est calculée en raison de la profondeur exacte du rocher, au point sur lequel elle doit s'appliquer, profondeur que l'on relève au moyen de sondages exécutés avec soin. On peut d'ailleurs laisser aux palplanches la faculté de glisser entre les entretoises, et on les frappe à coup de masse jusqu'à ce qu'elles touchent le fond. En tous cas, on échoue le caisson sans fond, comme il a été dit pour le caisson ordinaire, en le chargeant de matériaux pesants; on le maintient en place, et l'on procède à l'immersion du massif de béton.

Au moyen des indications qui précèdent, on peut à peu près être certain de n'éprouver aucune difficulté insurmontable dans l'établissement d'un ouvrage quelconque sur un terrain incompressible que l'on puisse atteindre directement ou par des pilotis; on comprend néanmoins qu'il soit impossible de prescrire d'une manière absolue le système qui doit s'appliquer à chaque cas particulier; il faut toujours, pour fixer son choix, prendre en considération la composition du sol accusée par des sondages minutieux, la hauteur et le régime des eaux, la nature et le poids de la construction, la qualité et le prix des matériaux.

96. Quel que soit celui des systèmes ci-dessus exposés que l'on ait employé pour établir une fondation sous l'eau, il importe toujours de se mettre en garde contre l'action corrosive des courants qui, bien qu'à des degrés différents, affouillent à la longue la plupart des terrains, et qui causeraient la ruine complète des ouvrages, s'ils n'étaient l'objet de précautions spéciales.

Digitized by Google

Le moyen le plus simple, le plus économique, et qui suffit dans la plupart des cas, consiste à verser au pourtour de la fondation des *enrochements* composés de blocs assez pesants pour ne pas être entraînés ou déplacés par la force du courant.

Si la profondeur d'eau est considérable, et que l'on puisse faire pénétrer des pieux au delà de la limite des affouillements, on forme, au moyen de pieux et de palplanches jointives, une enceinte ou *crèche* basse qui entoure et protége le pied de la fondation principale, et que l'on remplit de béton ou d'enrochements.

Enfin, dans les rivières torrentielles, à fond de gravier mobile, on ne peut guère se mettre à l'abri des corrosions qu'en établissant, dans toute la largeur du lit, une couche épaisse de maçonnerie, un *radier général*, défendu en amont et en aval par un mur de garde ou *parafouille*, et sur lequel on élève les supports, quels qu'ils soient, de la construction.

97. *Fondations sur terrains compressibles.* — Quand le terrain solide se trouve à une trop grande profondeur pour que les pieux puissent l'atteindre, il faut se résoudre à fonder sur le sol compressible, et nous allons essayer de montrer quels sont les procédés qui peuvent être employés dans ces circonstances.

Si le terrain est homogène de sa nature, et qu'il ne soit d'ailleurs que peu compressible, on asseoit les fondations sur une plate-forme horizontale composée de fortes pièces de charpente, jointives ou du moins très-rapprochées les unes des autres; on donne à cette plate-forme des empatements que l'on détermine en raison de la compressibilité du sol et de la charge qu'il aura à supporter en chaque point, de manière que la pression par unité de superficie ne dépasse pas une certaine limite, et soit à peu près constante dans toute l'étendue de la construction. On prend en outre le soin d'élever les maçonneries aussi uniformément que possible, pour prévenir toute inégalité de tassement. Quelquefois aussi l'on substitue à la plate-forme en charpente un massif de béton auquel on donne une épaisseur suffisante pour n'avoir pas à redouter sa rupture.

Il est en général avantageux, quand on n'a pas lieu de craindre les corrosions, de placer au-dessous de la plate-forme ou du massif de béton une forte couche de sable convenablement comprimée; cette couche, à cause de la mobilité des grains qui la composent, a pour objet de répartir la pression non-seulement sur le fond, mais même sur les parois verticales de la fouille; elle permet, par suite, de réduire notablement l'étendue des empatements de la maçonnerie.

Les fondations sur pilotis réussissent fort bien sur ces terrains, quand ils ne sont pas détrempés par les eaux. Elles sont, il est vrai, presque toujours plus dispendieuses que celles qui viennent d'être indiquées; mais elles offrent en revanche plus de sécurité et permettent d'évaluer avec

Digitized by Google

plus de certitude la résistance dont elles sont susceptibles ; aussi convient-il d'y avoir recours quand il s'agit de constructions qui sont de nature à exercer des pressions considérables. Dans ces circonstances, on a quelquefois creusé, au moyen d'un pieu battu dans le sol, puis retiré, de nombreux trous que l'on remplissait de sable fortement comprimé ; on obtenait ainsi des pieux artificiels, et l'on bâtissait sur ce pilotis qui, toutes les fois que l'on n'a pas eu à craindre que les suintements d'eau vinssent laver et enlever peu à peu le sable, a fourni d'excellents résultats.

98. Lorsque le terrain est très-compressible, les dispositions qui précèdent ne sont pas toujours praticables, à cause de la grande étendue qu'elles conduisent à donner aux fondations ; elles entraîneraient d'ailleurs à de grandes dépenses. On s'attache alors et l'on parvient à diminuer au préalable la compressibilité du sol, soit en le chargeant de pierres qui s'y enfoncent, soit en faisant entrer des pieux par le gros bout, afin qu'ils ne puissent être soulevés par la réaction élastique du terrain, soit enfin par la combinaison des deux moyens indiqués, en enfonçant des pierres entre les pieux après le recépage de ces derniers. On s'établit ensuite sur le terrain ainsi solidifié comme sur un sol peu compressible.

Quel que soit celui de ces trois systèmes que l'on adopte, il faut toujours l'appliquer sur une surface beaucoup plus grande que celle qui est occupée par la construction, et l'étendre surtout du côté où la translation horizontale paraît être le plus à redouter.

99. Il est cependant des terrains qui échappent à toutes les prescriptions que nous venons d'énumérer ; ce sont les sols argileux détrempés par les eaux. Visqueux, élastiques, ils agissent, pour ainsi dire, à la manière des fluides ; ils cèdent facilement à la pression qui leur est imposée et la transmettent dans tous les sens ; ils s'affaissent inégalement pour peu qu'ils ne soient pas comprimés avec la même intensité dans toute l'étendue de la construction, et se relèvent souvent, soit au dehors, soit au dedans, sous les parties les moins pesantes ; les pilotis n'y adhèrent point et tendent, au contraire, à être incessamment soulevés pendant le battage, en raison de la réaction qu'exerce le terrain que l'on comprime sur les pieux déjà mis en place. Il faut, pour s'établir avec quelque sécurité sur un terrain de cette nature, avoir recours à des plates-formes étendues, à de larges empatements, répartir les pressions avec une grande uniformité, même pendant l'exécution du travail, et souvent charger par des remblais provisoires les abords de la construction. Il est d'ailleurs prudent, avant d'élever les parties supérieures de l'édifice, de charger les massifs inférieurs, pendant plusieurs mois, d'un poids au moins égal à celui qu'ils auront à supporter plus tard.

Les difficultés augmentent encore lorsque l'emplacement des fondations est envahi par les eaux ; on ne réussit alors qu'en combinant judicieuse-

Digitized by Google

ment les procédés qui viennent d'être décrits avec ceux que nous avons indiqués plus haut pour les fondations sous l'eau et sur terrains incompressibles.

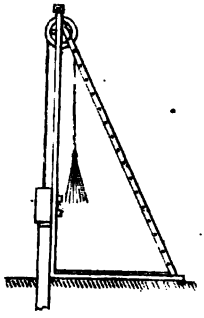
100. *Machines à battre les pieux.* — Nous avons déjà dit que les pieux de fondation devaient généralement avoir pour diamètre le vingt-quatrième de leur longueur; que ce diamètre ne descendait jamais sensiblement au-dessous de $0^m,18$, et que ces pieux, une fois enfoncés jusqu'à ce qu'ils *refusent* d'entrer davantage, pouvaient supporter sans danger une charge de 50 kilogrammes par centimètre carré de section. Ajoutons, pour compléter ce que nous avons à dire sur ce sujet, que les pieux de fondation sont presque toujours des troncs de chêne ou de sapin terminés en pointe à leur extrémité inférieure, laquelle est durcie au feu ou armée d'un sabot de fer ou de fonte, quand la nature du sol qu'ils ont à traverser fait craindre qu'ils s'émoussent et se brisent dans le trajet.

En cet état, les pieux sont *fichés*, mis *en fiche* dans la place qu'ils doivent occuper, et battus à coups de *mouton;* on appelle ainsi une masse pesante, généralement formée d'un noyau en bois bardé de fer, que l'on élève au moyen d'un appareil nommé *sonnette*, pour la laisser retomber de tout son poids sur la tête du pieu préalablement garnie d'une *frette* en fer.

101. Les sonnettes sont de deux sortes, les sonnettes *à tiraudes* et les sonnettes *à déclic*.

Les premières se composent essentiellement de deux poteaux montants, portant à leur partie supérieure et en saillie sur leur face extérieure une poulie au moyen de laquelle des hommes tirent en cadence et laissent retomber le mouton sur la tête du pieu. A l'extrémité libre de la corde sont attachés d'autres cordons plus minces, en nombre égal à celui des ouvriers. Ce sont ces derniers cordons qui sont désignés sous le nom de *tiraudes*, et par l'intermédiaire desquels les hommes placés sur la plateforme inférieure agissent sur la machine.

Fig. 21.



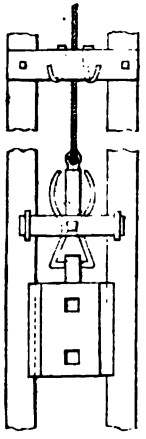
On emploie ordinairement quinze hommes pour manœuvrer une sonnette à tiraudes dont le mouton pèse 300 kilogrammes, soit 20 kilogrammes à soulever par homme. Un seizième, nommé *arrimeur*, conduit l'opération du battage, surveille et dirige la descente verticale du pieu, règle le nombre des coups de chaque *volée*, et mesure la quantité dont une marque faite à l'avance s'est enfoncée par rapport à un repère fixe.

La sonnette à déclic diffère de la première en ce que : 1° le mouton est généralement d'un poids plus considérable; il varie de 500 à 800 kilo-

Digitized by Google

grammes, suivant le besoin; 2° le mouton est élevé, non plus directement à bras d'hommes, mais au moyen d'une manivelle et d'un système d'engrenages; 3° un mécanisme particulier, appelé *déclic*, laisse retomber le mouton dès qu'il est parvenu au point culminant de sa course, et permet de le ressaisir rapidement au bas pour l'élever de nouveau.

Fig. 25.



Cette machine, on le comprend, offre des avantages importants sur la première, principalement en ce que, à raison de sa plus grande puissance, elle permet d'enfoncer encore de quantités notables des pieux qui opposaient à la sonnette à tiraudes un refus absolu de descendre davantage.

Il existe plusieurs systèmes de déclic employés dans les sonnettes; celui que nous donnons dans la figure ci-dessus est un des plus simples : il est trop facile à comprendre pour que nous nous arrêtions à en expliquer le mouvement.

102. Si le terrain incompressible auquel les pieux doivent transmettre le poids de la construction projetée est assez résistant pour qu'ils n'y puissent pénétrer, si c'est du rocher, par exemple, on arrête le battage dès qu'on y est parvenu. Lorsque ce terrain est graveleux ou sablonneux, les pieux s'y enfoncent, mais avec une difficulté toujours croissante, et l'on suspend l'opération quand on juge que leur résistance à l'enfoncement est telle qu'elle ne puisse être vaincue par la pression qu'ils sont destinés à supporter.

Dans une opération de ce genre, on regarde un pieu comme susceptible de resister à une charge permanente de 25,000 kilogrammes, lorsqu'il ne s'enfonce plus que de $0^m,01$ environ par volée de dix coups d'un mouton du poids de 600 kilogrammes élevé à $3^m,60$ de hauteur, ou par volée de trente coups d'un mouton du même poids tombant de $1^m,20$. Cette règle est le résultat d'une longue expérience; elle suffit dans la pratique ordinaire. Si d'ailleurs on n'avait pas besoin d'une résistance indéfinie, on pourrait arrêter le battage plus tôt, en admettant que les pénétrations sont proportionnelles aux pressions que le terrain peut supporter.

103. *Machines à épuiser.* — Les épuisements, dans les enceintes de fondation, s'exécutent à l'aide de machines de plusieurs sortes, dont le choix se détermine en raison de la quantité d'eau à enlever, de la hauteur à laquelle cette eau doit monter, de l'espace et du nombre d'hommes dont on peut disposer, et des autres circonstances locales. Les machines les plus simples sont les *seaux*, les *écopes* et les *pelles hollandaises*, qui se mettent en œuvre à la main; viennent ensuite la *vis d'Archimède*, la

Digitized by Google

noria, le *chapelet* et les *pompes* de divers systèmes. Nous dirons seulement quelques mots de la pelle hollandaise, de la vis d'Archimède, de la noria et du chapelet, qui sont les moins connues de ces machines.

104. La pelle hollandaise n'est autre chose qu'une espèce de cuiller en bois, emmanchée et suspendue par une lanière. On balance cet instrument en effleurant les couches supérieures de la nappe d'eau; par ce mouvement, la pelle se remplit et jette le liquide à une certaine distance par-dessus les bords de la fouille ou de l'enceinte.

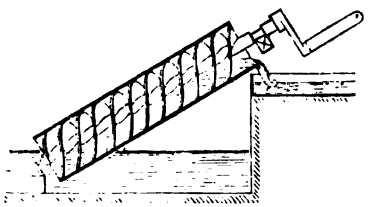
D'après les résultats d'épuisement faits avec soin de cette manière, il paraît établi qu'un homme peut élever 120 mètres cubes d'eau, par journée de huit heures, à 1 mètre de hauteur. On comprend néanmoins que cette machine, comme les seaux et les écopes ordinaires, ne peut s'employer avantageusement que pour les épuisements de peu d'importance, et quand il s'agit d'élever l'eau à une très-petite hauteur.

105. La vis d'Archimède se compose d'un noyau cylindrique et d'une enveloppe concentrique à ce noyau; entre ces deux pièces se trouvent plusieurs cloisons que l'on peut concevoir comme engendrées par une droite qui se mouvrait sur autant d'hélices, en passant constamment par l'axe de la vis et demeurant perpendiculaire à cet axe. Les cloisons hélicoïdales sont communément au nombre de trois.

On donne ordinairement au diamètre de l'enveloppe d'une vis d'Archimède à peu près le douzième de la longueur de la vis, et le diamètre du noyau est le tiers de celui de l'enveloppe, lequel varie lui-même entre $0^m,33$ et $0^m,65$.

Si l'on établit un pareil système sur une masse d'eau, en lui donnant une inclinaison moindre que celle de l'hélice sur son axe et qui est ordinairement comprise entre 30 et 45 degrés, si on lui imprime un mouvement de rotation dans un sens contraire à celui de l'hélice, l'orifice inférieur de chaque canal, en passant dans l'eau, en puisera une certaine quantité qui s'élèvera de spire en spire et viendra sortir par l'orifice supérieur.

Fig. 26.



La simplicité de cette machine, le peu d'espace qu'elle occupe, la facilité avec laquelle on la transporte d'un lieu dans un autre, celle avec laquelle on peut en établir plusieurs sur un même point, font qu'elle est généralement employée dans les grands épuisements, même de préférence à d'autres systèmes qui, sous différents rapports, pourraient avoir quelques avantages sur elle.

Digitized by Google

Notons encore que la vis fonctionne le plus avantageusement quand, dans les limites d'inclinaison ci-dessus citées, le niveau de l'eau s'élève un peu au-dessus du centre de la base du noyau sans immerger complétement cette base.

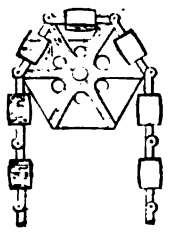
On peut admettre qu'un ouvrier, manœuvrant une vis d'Archimède bien disposée, peut produire par heure un effet utile équivalent à 15 mètres cubes d'eau élevés à 1 mètre de hauteur. Un homme de force ordinaire travaille de la sorte huit heures sur vingt-quatre, quand l'épuisement est continu et lorsque les relais sont bien coordonnés.

En Hollande, on remplace souvent l'enveloppe extérieure des hélices par un coursier demi-circulaire fixe. Cette disposition présente cet avantage, que les pivots ne supportent plus le poids de l'enveloppe et de l'eau qui se trouve dans la vis; mais ces vis hollandaises veulent être mues avec une grande vitesse, pour que la perte de l'eau entre les hélices et le coursier ne soit pas trop considérable; elles sont d'ailleurs presque toujours mises en mouvement par des moulins à vent.

106. Lorsque l'on n'a que de petites quantités d'eau qu'il s'agit d'élever à une grande hauteur, la vis d'Archimède cesse de pouvoir être employée avantageusement, parce que, dans de pareils cas, il faudrait en étager plusieurs les unes au-dessus des autres, et qu'alors, le poids des machines à manœuvrer étant beaucoup plus grand que celui de l'eau qu'elles élèvent, il se ferait une énorme dépense de force en pure perte. Dans ces circonstances, on a recours soit à la noria, soit au chapelet vertical, soit au chapelet incliné.

La noria consiste en une série de godets fixés le long d'une chaîne sans fin et passant sur un tambour garni de dents qui, s'engageant dans les mailles de la chaîne, déterminent, sous l'action d'une manivelle ou d'un manége, l'ascension des godets. Ceux-ci, dont l'ouverture est nécessairement tournée vers le bas sur la branche descendante, se remplissent en passant dans le puisard, et portent cette eau avec eux le long de la branche qui monte; arrivés au haut, ils s'inclinent, en suivant la convexité supérieure du tambour, et versent leur eau dans un chéneau en bois destiné à la conduire hors du chantier.

Fig. 27.



Malgré quelques défauts inhérents à sa constitution, la noria est une bonne machine. Ces défauts sont d'ailleurs les suivants : 1° les godets, en montant, laissent retomber une partie de l'eau qu'ils avaient d'abord puisée; quoique cette partie du liquide n'arrive pas jusqu'au chéneau de déversement, elle n'en a pas moins pesé pendant quelque temps et résisté à l'action du moteur; 2° la machine élève toujours les

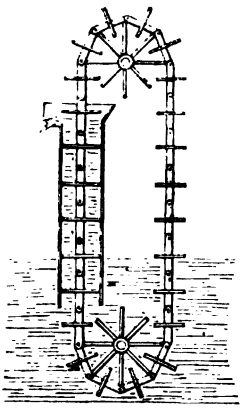
Digitized by Google

godets plus haut que le fond du chéneau, qui se trouve nécessairement un peu au-dessous de l'axe de rotation ; 3° les godets, étant très-légers, se déforment et se déchirent aisément dans les chocs fréquents qu'ils reçoivent pendant le mouvement oscillatoire que prend la chaîne, lorsqu'on monte l'eau à une hauteur un peu grande.

Ce dernier inconvénient a été notablement diminué, dans plusieurs norias, au moyen d'une roue d'écartement que l'on a placée sur la partie basse de la chaîne, et à laquelle on a donné soit un poids suffisant pour assurer la stabilité du système, soit un axe de rotation fixe à l'extrémité de deux *élindes* que l'on monte ou descend à volonté, suivant la hauteur à laquelle la machine doit fonctionner. Cependant, il faut dire que l'avantage que l'on retire de la fixité de la chaîne à sa partie inférieure est au moins contre-balancé par l'augmentation de frottement qui en résulte.

107. Les chapelets se composent d'un certain nombre de palettes réunies par des chaînons formant une chaîne sans fin que l'on fait mouvoir au moyen de deux lanternes, dans une espèce de *buse* dont l'une des extrémités est plongée dans l'eau, tandis que l'autre verse cette eau dans le chéneau qui la conduit au dehors. Ces machines sont ordinairement mises en mouvement par des hommes ou des animaux.

Fig. 28.

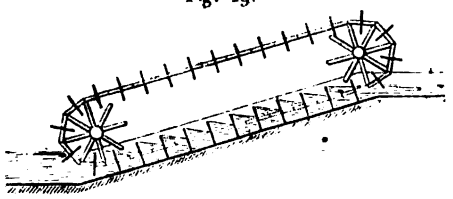


Il y a des chapelets verticaux et des chapelets inclinés.

Le *chapelet vertical* convient particulièrement aux épuisements où l'on a à verser l'eau à plus de 4 mètres de hauteur ; son attirail est moins compliqué et moins pesant que celui de la noria, et il offre moins de résistance ; il laisse retomber, à la vérité, une assez notable quantité d'eau qui passe entre les palettes et les parois de la buse, surtout lorsque la vitesse d'ascension est petite ; mais cette machine n'en rend pas moins de très-bons services.

Dans le *chapelet incliné,* la buse n'est plus qu'une auge rectangulaire : la branche descendante de la chaîne repose ou sur le dessus de l'auge, si elle est couverte, ou sur un plancher établi au-dessus d'elle, si elle ne l'est pas. Cette disposition exige une plus grande

Fig. 29.



Digitized by Google

force motrice que la précédente proportionnellement à l'effet produit, à cause du frottement des palettes contre la buse et de la plus grande perte d'eau qui a lieu par les intervalles; aussi n'est-elle plus guère en usage.

VOUTES.

108. Les *voûtes* sont des constructions en maçonnerie au moyen desquelles on franchit l'intervalle compris entre deux ou plusieurs points d'appui résistants, ou qui permettent de reporter sur ces points le poids d'une construction supérieure. Dans une suite de voûtes, les points d'appui des extrémités s'appellent des *culées;* les supports intermédiaires se nomment *piles.*

Considéré dans les ponts, l'ensemble d'une voûte et de ses supports prend le nom d'*arche;* dans un pont à plusieurs arches, il y a toujours deux culées; mais il y a nécessairement autant de piles que l'on compte d'arches moins une. Quant à ces dernières, leur nombre ne saurait se fixer, dans chaque cas, que d'après des considérations tirées de l'examen attentif des circonstances locales; il faut principalement faire entrer en ligne de compte le débouché total à donner aux eaux, la hauteur dont on dispose entre le niveau de la rivière et le dessus du pont, la nature et le prix des matériaux dont on peut se procurer l'emploi. Toutefois, des raisons de bon goût, d'accord avec la convenance de ne pas placer un obstacle permanent au point où le cours des eaux a généralement le plus de rapidité, commandent de donner autant que possible la préférence à un nombre impair d'arches; ce n'est que quand celles-ci doivent être très-nombreuses que ces deux motifs perdent simultanément beaucoup de leur valeur, et que le mauvais effet des arches en nombre pair disparaît.

Sous le rapport de leur mode de construction, les seules voûtes dont nous ayons à nous occuper ici sont des portions de surfaces cylindriques dont la courbe directrice, considérée dans le plan des *têtes,* est le plus souvent formée d'une ou de plusieurs portions d'arcs circulaires. Ces surfaces ont leurs *naissances* sur les piles ou les culées, dont les parties comprises entre lesdites naissances et les massifs de fondation sont appelées les *pieds-droits* de la voûte.

On dit qu'une voûte est en *plein cintre,* quand la hauteur comprise entre les naissances et le *sommet* est égale à la moitié de sa largeur; elle est dite *surhaussée* ou *surbaissée,* selon que cette hauteur est supérieure ou inférieure à la demi-largeur.

La courbe directrice exclusivement admise pour les voûtes en plein cintre est la demi-circonférence. Pour les voûtes surhaussées, qui ne sont presque jamais employées dans les travaux publics, du moins dans les constructions de ponts, on peut adopter une demi-*ellipse* prise sur son

Digitized by Google

petit axe, ou l'*ogive* (*); les voûtes surbaissées ont pour directrice soit un arc de cercle unique coupant obliquement la verticale menée par chacune des naissances, soit une demi-ellipse prise sur son grand axe, soit enfin une *anse de panier*, courbe de forme ovale, résultant de la réunion d'un nombre impair d'arcs de cercle, tangents entre eux, et dont les extrêmes touchent également les verticales des naissances, celui du milieu étant symétriquement placé sur la verticale du sommet de la voûte.

Le plein cintre est, de toutes les courbes employées dans la construction des voûtes, celle qui unit à la plus grande solidité la plus grande facilité d'exécution; aussi est-elle préférée toutes les fois que cela peut se faire sans trop élever le pont et sans rendre ses abords difficiles; cette courbe a cependant le désagrément de rétrécir rapidement le débouché des eaux au-dessus des naissances, et d'être peu favorable à l'écoulement, toutes les fois que l'on est obligé de placer ces dernières notablement au-dessous du niveau des eaux.

Ce dernier inconvénient est complétement évité par l'emploi de l'arc de cercle unique, dont on place les naissances au-dessus ou au niveau des hautes eaux. Ce système a généralement plus d'élégance et de hardiesse que tous les autres; mais il comporte des poussées horizontales considérables, qui tendent énergiquement à disjoindre les éléments de la voûte et à renverser les supports; par ce motif, il réclame l'emploi de matériaux plus résistants, plus volumineux et, par conséquent, plus chers.

Avec la demi-ellipse surbaissée ou avec l'anse de panier on a, pour la même hauteur, plus de débouché qu'avec le plein-cintre, et l'on a surtout des poussées beaucoup moins fortes qu'avec l'arc de cercle unique; ce système est donc susceptible d'être adopté dans un grand nombre de cas, et l'anse de panier est elle-même généralement préférée à l'ellipse, dont la courbure varie d'un point à l'autre et exige un panneau spécial pour chacun des blocs ou *voussoirs* qui composent la voûte.

Nous allons donner quelques détails succincts sur les procédés de description de la voûte en arc de cercle et de l'anse de panier.

(*) L'*ellipse* est une courbe de forme symétriquement ovale, dont tous les points sont à des distances complémentaires de deux points intérieurs appelés *foyers*. Cette somme constante de distances est égale à la longueur du *grand axe* qui coïncide en direction avec la ligne des foyers; le *petit axe* passe au milieu du grand axe et lui est perpendiculaire.

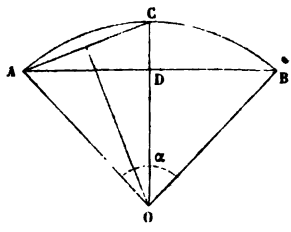
En fixant aux deux foyers les extrémités d'un fil inextensible de longueur égale au grand axe, et en appliquant contre ce fil un style que l'on fait glisser de manière que les deux branches du cordon soient constamment tendues, on décrit l'ellipse.

L'*ogive* se compose de deux arcs de cercle qui se coupent au sommet de la voûte, et dont les centres sont placés sur la ligne des naissances.

Digitized by Google

109. *Tracé de la directrice d'une voûte en arc de cercle.* — Les données fondamentales d'une pareille question sont la *corde* AB et la *flèche* ou montée CD; par suite, il suffit d'appliquer la construction élémentaire qui sert à faire passer un cercle par les trois points A, B, C, et l'on obtient le centre O de la courbe.

Fig. 30.



Si l'on tient à déterminer la valeur numérique du rayon R, on remarquera que la ligne AC ou $\sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2}$ est moyenne proportionnelle entre le diamètre 2R et la flèche CD; nous avons donc

$$2R \times CD = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,$$

ou

$$R = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2}{2CD},$$

ou encore, en désignant la flèche par f et la demi-ouverture par c,

$$R = \frac{c^2 + f^2}{2f}.$$

Le rapport $\frac{f}{2c}$ de la flèche à l'ouverture est ce que l'on appelle le *surbaissement* de la voûte, qui est dite surbaissée au tiers, au quart, au dixième, etc., selon que ce rapport a pour valeur l'une des fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, etc.

Ce surbaissement peut s'apprécier encore au moyen de l'amplitude de l'angle au centre correspondant 2α, ces deux quantités étant liées entre elles par une relation fort simple.

Le triangle AOD fournit, en effet,

$$\sin\alpha = \frac{c}{R} = \frac{2cf}{c^2 + f^2},$$

ou, en divisant les deux termes de la fraction par $4c^2$,

$$\sin\alpha = \frac{\frac{f}{2c}}{\left(\frac{f}{2c}\right)^2 + \frac{1}{4}}.$$

L'arc ACB lui-même, que l'on peut désigner par $2a$, a d'ailleurs pour ex-

Digitized by Google

pression de sa longueur développée

$$2a = 2\pi R \times \frac{2\alpha}{360} = \pi R \times \frac{\alpha}{90}.$$

Enfin, on a souvent besoin, dans le métré des maçonnneries des ponts, de connaître la surface S du segment circulaire ACB.

Or, nous avons

$$ACD = AOC - AOD = \frac{aR}{2} - \frac{c(R-f)}{2} = \frac{(a-c)R + cf}{2},$$

c'est-à-dire

$$ACB \quad ou \quad S = (a-c)R + cf.$$

Si, par exemple, nous avions $c = 10^m$ et $f = 4^m$, les relations qui précèdent fourniraient, tous calculs faits,

$$R = 14^m,50, \quad \frac{f}{2c} = \frac{1}{5},$$

$$\sin\alpha = 0.68965 = \sin 43^\circ 36',$$

$$2a = 22^m,05 \quad et \quad S = 54^{m\,car},935.$$

On a construit des Tables qui donnent, pour chaque valeur du surbaissement $\frac{f}{2c}$, le coefficient par lequel il faut multiplier l'ouverture $2c$ pour avoir la longueur de l'arc développé $2a$.

La limite supérieure du surbaissement est 0,1 pour les voûtes en arc de cercle; au-dessus de ce chiffre, les voûtes ne sauraient être construites dans des conditions de stabilité rassurantes qu'au moyen de dépenses hors de proportion avec l'avantage illusoire qui pourrait résulter de l'adoption de ce système; cette limite correspond d'ailleurs à $\alpha = 22^\circ 37'$.

Dans le cas particulier où l'on aurait $\frac{f}{2c} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,134$, les formules donneraient

$$R = 2c, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ, \quad 2a = \frac{2\pi}{3}c = 2,0944\,c,$$

et

$$S = \left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right)c^2 = 0,3624\,c^2.$$

110. *Tracé de la directrice d'une voûte en anse de panier.* — Le but géométrique qu'on se propose, quand on veut faire une voûte en anse de panier, est d'avoir une courbe continue, sans jarrets et agréable à l'œil; on doit donc s'appliquer à éviter que les arcs de cercle employés présentent des changements trop brusques de courbure et, sous ce rapport, il y a évidem-

Digitized by Google

ment avantage à multiplier autant que possible ces arcs. Mais, si l'on ne bornait le nombre des centres, on tomberait bientôt dans l'inconvénient que nous avons signalé pour la voûte elliptique, l'appareil devenant d'autant plus difficile que la courbure varie plus souvent; il faut donc, dans chaque cas, combiner ces deux exigences contraires et faire son choix suivant les circonstances.

Quel que soit d'ailleurs le nombre d'arcs ou de centres que l'on ait adopté, il reste toujours une grande indétermination sur la valeur des rayons et sur la position géométrique de ces centres; on en profite pour établir des conditions propres à rendre les courbes plus gracieuses. On peut s'imposer, par exemple, d'avoir des rayons croissant d'arc en arc suivant une progression par différence ou par quotient, ou d'avoir des arcs égaux en longueur pour que l'œil ne se repose pas plus longtemps sur l'un que sur l'autre, ou encore d'avoir des arcs correspondant à des angles au centre égaux, tout en faisant néanmoins attention à ne pas donner à l'arc du sommet un rayon trop grand et un aplatissement dangereux. En général, ce rayon supérieur ne doit guère dépasser une fois et demie l'ouverture de l'arche.

Quant au nombre des centres qu'il y a lieu d'adopter dans chaque cas, eu égard aux considérations qui précèdent et à la grandeur de l'ouverture, il paraît pouvoir être généralement fixé d'après le tableau suivant, sauf les circonstances particulières et exceptionnelles qui motiveraient suffisamment une dérogation :

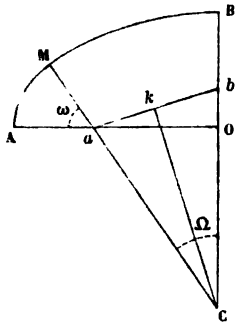
OUVERTURE.	NOMBRE DE CENTRES pour un surbaissement de		OBSERVATIONS.
	$\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{4}$.	
De 1m à 10m..	3	5	Le surbaissement des arches en anse de panier est rarement supérieur à $\frac{1}{4}$. Au delà de ce terme, on a recours à l'arc de cercle unique.
De 10m à 40m..	5	7	
De 40m à 50m..	7	9	

Nous allons maintenant donner des méthodes pour tracer les anses de panier à trois et cinq centres, qui suffisent pour les besoins ordinaires de la pratique.

111. *Anse de panier à trois centres.* — On porte, à partir des points A et B, sur AO et BO, les longueurs égales A*a*, B*b*; on tire *ab* sur le milieu *k* duquel on élève la perpendiculaire *k*C, et les points *a* et C sont les

Digitized by Google

Fig. 31.



centres cherchés; le troisième est nécessairement placé symétriquement avec a par rapport à l'axe BC, et peut d'ailleurs aussi s'obtenir par une construction identique.

On voit que, par ce moyen, on peut tracer une infinité de courbes passant en A et en B, puisque les quantités égales Aa, Bb peuvent être quelconques, pourvu qu'elles n'atteignent pas la longueur de la montée BO.

En désignant toujours AO par c, BO par f, et en appelant r et R les deux rayons Aa et MC, on trouve dans le triangle aOC,

$$\overline{aC}^2 = \overline{aO}^2 + \overline{CO}^2,$$

ou

$$(A) \qquad (R - r)^2 = (c - r)^2 + (R - f)^2.$$

C'est là l'équation de condition qui lie mutuellement les données c, f, et les inconnues R, r du problème; il suffit donc de se donner la valeur de l'un des deux rayons pour que cette relation fournisse immédiatement celle de l'autre, et il en serait de même encore si, au lieu de la valeur de l'une de ces quantités, on avait une tout autre relation entre elles.

Pour avoir les valeurs des deux angles au centre nécessaires au calcul du développement de chaque arc et de l'aire des secteurs, il convient de remarquer que ces angles sont ceux du triangle rectangle OCa, dans lequel on a

$$\sin\Omega = \frac{aO}{aC} = \frac{c - r}{R - r}, \quad \sin\Omega = \frac{OC}{aC} = \frac{R - f}{R - r}.$$

112. Supposons, pour donner des exemples, que l'on veuille avoir des arcs faisant le même angle au centre de leurs circonférences respectives; il faudra égaler les valeurs de $\sin\Omega$ et $\sin\omega$, et l'on aura la nouvelle relation

$$c - r = R - f,$$

ou

$$R + r = c + f,$$

laquelle établit déjà que, dans ce système particulier, la somme des rayons est égale à celle des deux données c et f.

Rapprochée de l'équation de condition (A), celle-ci donne

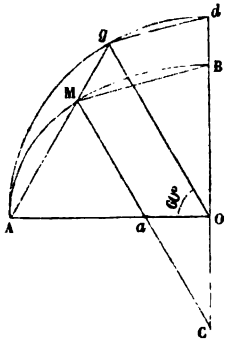
$$R = c + \frac{c - f}{\sqrt{2}}, \quad r = f - \frac{c - f}{\sqrt{2}},$$

Digitized by Google

et les deux angles Ω et ω, qui sont toujours complémentaires, sont ici tous deux égaux à 45 degrés.

113. On pourrait encore désirer que les trois arcs de la voûte fussent tous trois égaux entre eux et à 60 degrés; il faudrait alors écrire que $\omega = 60^\circ$, et $\Omega = 30^\circ$, ce qui conduirait aux deux équations

Fig. 32.



$$\sin 30^\circ = \frac{c-r}{R-r}, \quad \sin 60^\circ = \frac{R-f}{R-r}.$$

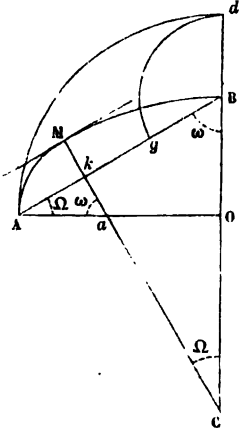
Il serait facile d'en tirer les valeurs de R et r; mais on peut s'en dispenser en employant la construction suivante :

Après avoir marqué sur le quadrant Ad un point g situé à 60 degrés du point A, et tiré les lignes Ag, Og et gd, on mène BM parallèle à gd, et le point M est le point de raccordement des deux arcs; pour avoir leurs centres, on trace MC parallèle à Og, et les centres cherchés sont les points a et C.

114. Enfin, examinons encore le cas où l'on voudrait que les deux angles au centre Ω et ω fussent respectivement égaux à ceux du triangle rectangle AOB, dont les deux côtés de l'angle droit sont c et f, et l'hypoténuse $\sqrt{c^2+f^2}$.

La solution consisterait à poser

Fig. 33.



$$\sin \Omega = \sin BAO, \quad \sin \omega = \sin ABO,$$

ou

$$\frac{c-r}{R-r} = \frac{f}{\sqrt{c^2+f^2}}, \quad \frac{R-f}{R-r} = \frac{c}{\sqrt{c^2+f^2}},$$

et à résoudre ces deux équations qui donnent, tout calcul fait,

$$R = \frac{\sqrt{c^2+f^2}}{f} \times \frac{\sqrt{c^2+f^2}+c-f}{2},$$

$$r = \frac{\sqrt{c^2+f^2}}{c} \times \frac{\sqrt{c^2+f^2}-(c-f)}{2}.$$

Le construction qui résulte de ces valeurs est extrêmement simple. On remarque, en effet, que si l'on retranche de AB la longueur Bg égale à AO — OB ou $c-f$, la droite Ag sera précisé-

Digitized by Google

ment égale à $\sqrt{c^2+f^2}-(c-f)$. En élevant, au milieu k de Ag, la perpendiculaire kC, les points a et C qu'elle détermine sur AO et OB sont les centres cherchés; car les triangles Aak et AOB sont semblables, et donnent

$$\text{A}a : \text{AB} :: \text{A}k : \text{AO},$$

ou

$$r : \sqrt{c^2+f^2} :: \frac{\sqrt{c^2+f^2}-(c-f)}{2} : c.$$

Il est également facile de constater que Bk est égal à la moitié de $\sqrt{c^2+f^2}+c-f$, et d'obtenir la valeur de BC par la comparaison des triangles semblables BCk et AOB; cette valeur n'est autre chose que celle que nous avons établie plus haut pour R.

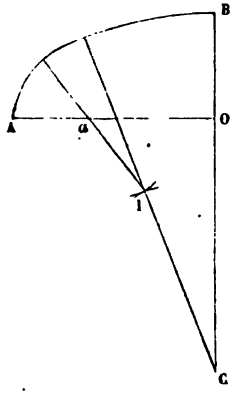
Remarque. — Dans ce dernier cas particulier, la tangente commune au point de raccordement M est perpendiculaire à la ligne des centres aC; elle est donc parallèle à la corde AB.

Un autre caractère distingue aussi cette solution de l'anse de panier à trois centres; elle correspond au minimum du rapport $\frac{R}{r}$ des deux rayons, de même que la première, celle des angles au centre égaux à 45 degrés, correspond au minimum de la différence $R-r$ des mêmes quantités. On mettrait cette double vérité en évidence par une analyse peu compliquée qui sort néanmoins des termes de notre programme.

115. *Anse de panier à cinq centres.* — On prend arbitrairement les valeurs des deux rayons r et R des arcs des naissances et du sommet, et l'on détermine géométriquement ou par le calcul une moyenne proportionnelle $\sqrt{Rr}$ entre ces deux valeurs; c'est le troisième rayon R'.

Alors, du point a comme centre, avec un rayon égal à $R'-r$, on décrit un arc de cercle; du point C, avec le rayon $R-R'$, on en trace un autre qui coupe le premier en I; c'est le troisième centre cherché.

Fig. 34.



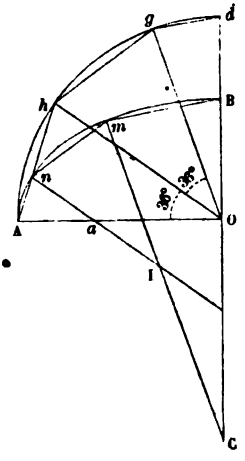
On serait averti de l'inadmissibilité des deux valeurs choisies arbitrairement pour les rayons r et R, si les deux arcs de cercle, qui par leur intersection doivent déterminer le centre I, ne pouvaient se rencontrer.

Enfin, si la courbe obtenue par le procédé qui vient d'être indiqué ne paraissait pas suffisamment gracieuse, il serait facile de la corriger, en modifiant légèrement les valeurs des deux rayons extrêmes, et par suite aussi celle du rayon intermédiaire.

Digitized by Google

116. On peut encore marquer sur le quadrant A*d* les points *g* et *h* limitant, à partir de A, des arcs égaux à $\frac{2}{5}$ et $\frac{4}{5}$ de 90 degrés, et l'on tire les cordes A*h*, *hg*, *gd*, ainsi que les rayons *h*O, *g*O; on prend le premier rayon A*a* ou *r* arbitrairement; par le point *a* on trace *na* I parallèle à *h*O; par le point *n* on tire *nm* parallèle à *hg*; par le point B, B*m* parallèle à *dg*; enfin, par le point *m*, *m*I parallèle à *g*O. Les points *n* et *m* sont les points de raccordement des arcs dont les centres sont respectivement placés en *a*, en I et en C.

Fig. 35.



Par cette construction, qui est susceptible d'être généralisée et étendue à un nombre impair quelconque de centres, on voit que les rayons font entre eux, dans le cas de cinq centres, des angles égaux aux deux cinquièmes d'un quadrant ou à 36 degrés.

Le calcul des rayons et de leurs rapports ne présenterait d'ailleurs aucune difficulté, après les indications précédemment données pour le cas de trois centres; mais nous ne nous étendrions pas davantage sur ce sujet sans sortir des limites qui nous sont naturellement posées.

117. *Appareil spécial des voûtes.* — Le corps d'une voûte, quelle que soit la nature de la courbe qu'elle affecte, est toujours composé de blocs distincts qui se soutiennent mutuellement et qui portent le nom de *voussoirs;* le dessous de la voûte, la surface vue de cette construction s'appelle l'*intrados* ou la *douelle;* le dessus, au contraire, généralement recouvert d'une *chape* en mortier, en béton ou en bitume, se désigne sous le nom d'*extrados*.

Dans chaque voussoir, la face de douelle devant être exposée aux regards demande, comme tous les parements vus, à être taillée avec soin; mais les joints par lesquels les voussoirs s'appliquent les uns contre les autres exigent surtout la plus grande précision dans leur exécution. Il importe, en effet, que les faces adjacentes se touchent par le plus grand nombre possible de leurs points, pour que la pression se transmette uniformément sur toute leur étendue; pour arriver plus facilement et plus sûrement à ce résultat, on dresse tous les joints suivant des surfaces planes. Cette règle ne souffre d'exception, dans les voûtes en berceau, que pour l'appareil des voûtes biaises, c'est-à-dire de celles dont l'axe est oblique sur les plans des têtes; mais cette circonstance, bien qu'elle se présente encore assez fréquemment dans la pratique, demanderait des

Digitized by Google

développements hors de proportion avec notre plan, et nous admettons ici qu'il ne s'agit que des voûtes cylindriques droites.

Une des principales conditions à remplir dans le tracé des voussoirs, c'est que les plans de joints soient partout normaux à la surface de la douelle; on évite ainsi de donner lieu, sans motif, à un angle aigu qui serait plus ou moins exposé à se rompre sous la pression; ces plans passent donc par une génératrice du cylindre et par une droite normale, dans le plan des têtes, à la courbe elle-même. On comprend dès lors pourquoi nous avons dit (108) que l'on devrait autant que possible exclure des voûtes les directrices autres que celles qui sont demi-circulaires ou composées d'un ou plusieurs arcs de cercle; la facilité de mener les normales à cette courbe la recommanderait suffisamment, si l'on ne trouvait encore dans son emploi l'avantage de ne pas avoir à former pour l'exécution un panneau spécial pour le tracé et la coupe de chaque voussoir. Pour le même motif que pour les joints parallèles à l'axe de la voûte, c'est-à-dire pour éviter des pressions sur des angles aigus, on partage les cours longitudinaux de voussoirs par des plans parallèles aux têtes, en ayant soin d'alterner ces nouveaux joints, de manière que chacun d'eux corresponde à peu près au milieu du voussoir qui le touche à droite et à gauche dans les cours voisins.

La facilité de la construction d'une voûte exige que les voussoirs soient toujours en nombre impair, disposés symétriquement de chaque côté de celui qui, placé le dernier et au sommet de la voûte, la ferme, et auquel par cette raison on donne le nom caractéristique de *clef*.

Les voûtes se construisent rarement tout entières en pierres de taille; les têtes seules comportent le plus souvent cette espèce coûteuse de matériaux, et le corps de l'ouvrage s'exécute en moellons de moindre dimension. Ces derniers s'établissent d'ailleurs suivant les règles mêmes que nous avons posées ci-dessus; seulement, dans ce cas, à une même pierre des têtes correspondent deux ou plusieurs cours de voussoirs en moellon. Enfin, quelques voûtes s'exécutent à joints irréguliers avec des moellons placés dans leur plus grande longueur normalement à l'intrados; d'autres ont même été faites en béton, et ont parfaitement résisté aux actions qu'elles devaient supporter.

Quoi qu'il en soit de la nature des matériaux employés, l'extrados des voûtes se dresse soit suivant une portion de cylindre, soit suivant des plans inclinés; le point important est surtout de disposer les surfaces de manière à conserver à la voûte, en chacun de ses points, une épaisseur qui va généralement en croissant depuis la clef jusqu'aux *reins;* c'est ainsi que l'on désigne les portions comprises à peu près à égale distance entre le sommet et les naissances. Il convient en effet de réduire, autant que le permettent les conditions de stabilité, le poids des masses supérieures, pour ne pas imposer aux parties inférieures des pressions capables de les écraser, ou des poussées susceptibles de les renverser.

Digitized by Google

118. *Cintres.* — Le système de charpente qui sert de moule à une voûte, et sur lequel elle s'édifie, porte le nom de *cintre;* il se compose essentiellement de *fermes* parallèles, plus ou moins espacées, et dont les pièces de douelle, désignées sous le nom de *vaux*, reçoivent des cours de madriers plats appelés *couchis.*

Ces fermes sont d'ailleurs dites *fixes* ou *retroussées*, selon qu'elles ont ou qu'elles n'ont pas sur le sol d'autres points d'appui que ceux qui correspondent à l'aplomb des naissances. Elles doivent, de plus, être disposées de manière à permettre l'abaissement progressif et simultané de toutes les parties du cintre après la fermeture de la voûte; c'est le plus souvent avec des *coins* superposés que s'opère ce *décintrement*, les autres méthodes récemment mises en avant n'ayant pas encore reçu de l'expérience une sanction suffisante pour les faire préférer d'une manière absolue à la première.

119. *Épaisseur des voûtes à la clef.* — Pour calculer l'épaisseur ε qu'il convient de donner aux voûtes à leur partie supérieure, Perronet a posé la formule empirique suivante :

$$\varepsilon = 0{,}0694\,c + 0{,}325,$$

dans laquelle c exprime encore la moitié de la corde ou de l'ouverture de la voûte.

Établie par son auteur pour toutes les voûtes, et indépendamment de leur surbaissement, cette formule paraît, en effet, pouvoir être appliquée sans danger toutes les fois que l'on dispose de matériaux moyennement résistants. Cependant, il est prudent de se conformer à l'usage généralement admis, et de donner à c, dans les voûtes surbaissées, la valeur propre au rayon du cercle d'intrados qui passe par le sommet.

D'un autre côté, la même formule donne des épaisseurs sensiblement trop fortes, dès que le rayon atteint et dépasse 15 mètres; ce qu'il y a de mieux à faire dans ces circonstances, c'est de comparer le résultat fourni par la formule avec les épaisseurs des voutes existantes, et de se fixer par analogie. C'est ainsi que les belles voûtes en arc de cercle du pont d'Iéna, à Paris, lesquelles ont 28 mètres d'ouverture pour $3^m,30$ de flèche, et par conséquent $31^m,35$ de rayon et 53 degrés d'amplitude, ont $1^m,44$ d'épaisseur à la clef, tandis que la formule de Perronet conduirait à leur donner une épaisseur de $2^m,50$.

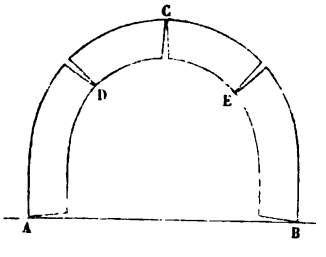
Gauthey, dans son *Traité de la construction des ponts*, établit une autre règle qu'il a déduite d'une longue expérience. Il donne à la clef $0^m,33$ d'épaisseur pour les voûtes de $0^m,50$ à 2 mètres d'ouverture; de 2 à 16 mètres, il ajoute à cette épaisseur le quarante-huitième de l'ouverture; enfin, de 16 à 32 mètres, il adopte purement et simplement le vingt-quatrième de l'ouverture. A ce compte, les voûtes du pont d'Iéna sont encore trop épaisses, puisqu'elles ne devraient avoir que $\frac{28}{24}$ ou $1^m,17$.

Digitized by Google

120. *Épaisseur des pieds-droits ou culées.* — Les culées d'un pont sont destinées à supporter le poids de la moitié de la voûte adjacente avec les charges accidentelles qui peuvent y être passagèrement ajoutées, et à résister, en outre, à la réaction horizontale résultant de la combinaison des efforts que les voussoirs se transmettent depuis le sommet jusqu'aux naissances, ou mieux, à la *poussée* qu'exercent l'une contre l'autre les deux moitiés de la voûte qui tomberaient si elles étaient isolées. Toutefois, l'épaisseur qui assure la résistance à l'écrasement étant de beaucoup inférieure à celle qui est nécessaire pour que la culée résiste à la poussée, c'est seulement en vue de cette dernière action qu'il convient de déterminer l'épaisseur.

Pour se rendre compte de la nature et de l'intensité de la poussée d'une voûte, il faut remarquer que, quand elle va se rompre, elle se divise généralement en quatre fragments ; elle se brise en s'ouvrant intérieurement à la clef, et extérieurement vers le milieu des reins ; le poids des deux fragments supérieurs agit sur les arêtes D, E, pour renverser les pieds-droits autour des arêtes extérieures A, B. C'est cette action, augmentée de celle qui provient des charges fixes ou mobiles imposées à la voûte, qui s'appelle la poussée, et à laquelle il faut s'opposer en donnant aux pieds-droits une masse suffisante pour assurer la stabilité de l'équilibre des diverses parties.

Fig. 36.



Ainsi posée, la question se réduit à analyser chacune des forces qui tendent à renverser les pieds-droits, ainsi que celles qui s'opposent à cette action, et à établir par le calcul la condition d'équilibre entre toutes ces forces. Cette recherche nous entraînerait hors de nos limites, et ses résultats s'écartent d'ailleurs beaucoup de ce que l'expérience directe a consacré, à cause de l'impossibilité d'introduire dans les formules tous les éléments de la question, tels que la résistance des matériaux qui entrent dans la construction de la voûte, l'adhérence plus ou moins énergique des mortiers, l'importance des charges accidentelles, etc.

Nous nous bornerons à extraire des *Tables à l'usage des Ingénieurs* publiées par d'Aubuisson deux tableaux qui donnent, pour des voûtes en plein cintre et des voûtes en anse de panier surbaissées au tiers, l'épaisseur à la clef et celle des pieds-droits, l'ouverture $2c$ de l'arche variant de 1 à 50 mètres, et la hauteur des pieds-droits de 1 à 8 mètres. Ces tableaux supposent en outre que les reins des voûtes sont remplis jusqu'au niveau de l'extrados de la clef, et que le tout supporte en outre un pavage ou un empierrement de $0^m,40$ d'épaisseur.

Digitized by Google

1°. *Voûtes en plein cintre.*

DIAMÈTRE de la voûte.	ÉPAISSEUR à la clef.	ÉPAISSEUR DES CULÉES, la hauteur des pieds-droits étant						
		0m	1m	2m	3m	4m	6m	8m
m	m	m	m	m	m	m	m	m
1	0,36	0,40	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
2	0,40	0,45	0,70	0,80	0,85	0,95	1,00	1,10
3	0,43	0,50	0,80	0,95	1,05	1,15	1,25	1,35
4	0,46	0,60	0,90	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
5	0,50	0,65	1,00	1,20	1,30	1,45	1,55	1,70
6	0,53	0,75	1,10	1,30	1,45	1,60	1,75	1,90
7	0,56	0,85	1,20	1,40	1,60	1,75	1 90	2,10
8	0,60	0,95	1,30	1,50	1,70	1,85	2,10	2,25
9	0,63	1,05	1,40	1,60	1,85	2,00	2,25	2,40
10	0,67	1,20	1,50	1,75	2,00	2,15	2,40	2,60
12	0,74	1,40	1,75	2,00	2,20	2,40	2,65	2,90
15	0,84	1,75	2,10	2,30	2,60	2,80	3,15	3,40
20	1,04	2,30	2,65	2,80	3,10	3,35	3,65	4,00
30	1,35	3,25	3,55	3,80	4,10	4,40	4,80	5,20
40	1,69	4,20	4,50	4,80	5,10	5,40	5,80	6,20
50	2,06	5,15	5,40	5,80	6,10	6,40	6,80	7,20

2°. *Voûtes en anse de panier, surbaissées au tiers.*

OUVERTURE de la voûte.	ÉPAISSEUR à la clef.	ÉPAISSEUR DES CULÉES, la hauteur des pieds-droits étant						
		1m	2m	3m	4m	5m	6m	8m
m	m	m	m	me	m	m	m	m
1	0,38	0,65	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
2	0,43	0,90	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,35
3	0,50	1,10	1,35	1,45	1,50	1,60	1,65	1,70
4	0,56	1,35	1,65	1,80	1,90	1,95	2,00	2,10
5	0,61	1,55	1,85	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40
6	0,66	1,65	1,95	2,15	2,30	2,45	2,55	2,70
7	0,70	1,75	2,05	2,35	2,50	2,65	2,75	3,00
8	0,74	1,85	2,25	2,50	2,70	2,85	3,00	3,30
9	0,79	1,95	2,40	2,70	2,90	3,13	3,25	3,50
10	0,84	2,10	2,50	2,80	3,05	3,20	3,40	3,70
12	0,95	2,30	2,80	3,15	3,40	3,65	3,80	4,00
15	1,10	2,60	3,15	3,50	3,90	4,10	4,30	4,60
20	1,35	3,20	3,80	4,20	4,50	4,80	5,00	5,30
30	1,85	4,40	5,00	5,40	5,70	6,10	6,40	6,70
40	2,35	5,50	6,20	6,60	6,90	7,50	7,80	8,10
50	2,85	6,70	7,40	7,80	8,20	8,80	9,20	9,60

Digitized by Google

121. Comme les culées, les piles ont à supporter la charge résultant du poids fixe ou accidentel des arches; mais, à cause de l'opposition des deux poussées des voûtes voisines, elles n'ont à résister qu'à la différence de ces deux actions, si l'une d'elles est normalement plus forte que l'autre, ou si l'une des arches porte momentanément seule la charge passagère. Cependant, si lors de l'exécution d'un pont composé d'un plus ou moins grand nombre d'arches, on ne s'astreint pas à élever toutes les voûtes de front, de manière à les livrer toutes en même temps à leurs actions mutuelles, les piles devront successivement faire pendant quelque temps l'office de culées, et leur épaisseur devra être celle que fournissent pour ces dernières les Tables ci-dessus; il en serait de même encore dans le cas où, l'une des arches d'un pont venant à se rompre, la ruine de l'ouvrage entier serait inévitable, si l'on n'avait, au lieu de *piles-culées*, que des supports calculés pour résister seulement à l'écrasement.

Toutefois, dans la pratique, l'économie et le besoin de ne pas trop réduire le débouché libre des ponts, portent à prendre ce dernier parti; on s'astreint alors à élever simultanément toutes les arches, ou au moins à ne livrer une arche à elle-même qu'autant que la suivante repose encore sur ses étais de construction, et n'est par conséquent pas exposée à manquer; il est bien entendu que l'on écarte en outre l'hypothèse d'une chute accidentelle. Les épaisseurs fournies par les Tables, en ce qui concerne les piles, sont alors des limites au-dessous desquelles on peut notablement descendre, en se guidant, d'une part, sur la comparaison des voûtes existantes, et en ayant égard, d'autre part, à la nature du terrain d'établissement, dont la résistance doit influer sur le plus ou moins de probabilité d'un affouillement et de la ruine d'une ou de plusieurs arches.

Le minimum d'épaisseur des piles simples est, en général, le double de l'épaisseur à la clef, lorsque l'on emploie des matériaux de très-bonne qualité; dans la pratique, on augmente cette dimension d'un tiers ou d'un quart de sa propre valeur.

CHARPENTES.

122. Les limites naturelles et l'objet tout spécial de cet ouvrage nous imposent l'obligation de borner ce que nous avons à dire ici sur les charpentes au seul exposé des divers modes d'assembler les pièces de bois entre elles, pour en obtenir toute la résistance dont sont susceptibles de pareils systèmes. Ces assemblages sont extrêmement variés; nous ne mentionnerons que les plus simples qui sont également les plus usités.

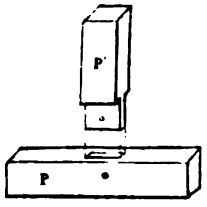
1°. *Assemblage à tenon et à mortaise.* — Le *tenon* est une saillie ménagée, à l'extrémité d'une pièce de bois, dans une partie de son épaisseur; il est reçu dans une cavité de même forme, appelée *mortaise* et pratiquée dans la pièce avec laquelle la première doit s'assembler. Cet assemblage se modifie d'ailleurs suivant les positions relatives des pièces

Digitized by Google

qu'il s'agit de relier, et suivant la direction des pressions auxquelles il doit être soumis.

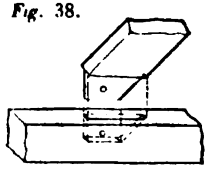
Le plus simple est celui des deux pièces de bois P, P' se rencontrant a angle droit, et dont la dernière est comprimée dans le sens de sa longueur. Le tenon a toute la largeur de la pièce P', et son épaisseur est déterminée par cette condition qu'il présente la même résistance à la rupture que chacune des joues de la mortaise; de sorte que, quand les deux pièces à assembler ont même épaisseur, on prend le tiers de cette épaisseur pour le tenon.

Fig. 37.



Il est essentiel que la mortaise soit exactement de même largeur que le tenon, pour que l'assemblage présente une rigidité convenable; on lui donne d'ailleurs un peu plus de profondeur que n'en exigerait la longueur de la saillie qu'elle doit recevoir, afin que cette dernière ne soit pas exposée à l'écrasement. La longueur d'un tenon est environ le double de son épaisseur. L'assemblage est maintenu par une cheville en bois qui traverse de part en part le tenon et les joues de la mortaise.

Fig. 38.



Lorsque les deux pièces se rencontrent obliquement, on abat l'angle aigu du tenon, pour éviter les difficultés que présenteraient le refouillement de la mortaise et la pose de la charpente; on a alors ce qu'on appelle *tenon en about*. De plus, pour que le tenon n'ait pas seul à supporter la pression qui tend à faire glisser les pièces l'une sur l'autre, on complète l'assemblage par un *embrèvement*, c'est-à-dire que les faces de la pièce mortaisée sont entaillées ainsi qu'on le voit sur la *fig.* 39. Cette entaille n'aurait lieu que sur l'épaisseur de la pièce qui porte le tenon, si celle-ci était moins épaisse que l'autre; il y aurait alors *encastrement*, comme l'indique la *fig.* 40 ci-contre. Enfin, si l'angle formé par les deux pièces était très-aigu, il serait convenable de multiplier les entailles de l'embrèvement, afin d'offrir un obstacle plus efficace au glissement. Dans ces diverses dispositions, on place toujours, pour assurer la stabilité de l'assemblage, une cheville qui traverse de part en part le tenon et les deux joues de la mortaise.

Fig. 39.

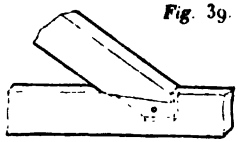


Fig. 40.

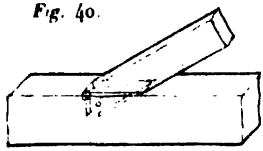
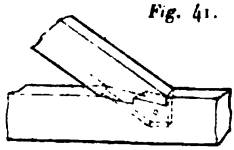


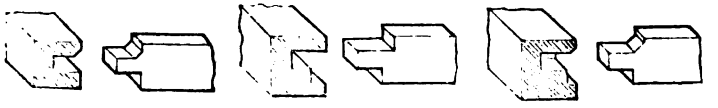
Fig. 41.



Digitized by Google

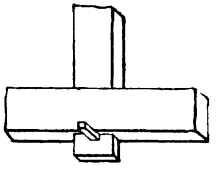
Lorsque des pièces, comme celles qui composent un plancher, sont chargées de poids qui tendent à faire rompre le tenon sur son épaisseur, on renforce ledit tenon, soit en dessus, soit en dessous, quand la pièce dans laquelle on assemble a plus de hauteur que la pièce assemblée ; soit encore, en combinant ces deux systèmes, à la fois en dessus et en dessous. Ces trois dispositions sont représentées respectivement par les *fig.* 42, 43, 44.

Fig. 42. *Fig.* 43. *Fig.* 44.



Enfin, quand la pièce assemblée est sollicitée par une traction longitudinale qui aurait pour effet de faire sortir le tenon de la mortaise, on peut substituer au tenon ordinaire un *tenon passant*, qui traverse de part en part la pièce mortaisée et qui est retenu par une forte clef placée au-dessous de cette dernière. Cet assemblage a été fréquemment employé dans les anciennes charpentes pour relier l'entrait d'une ferme à son poinçon ; mais actuellement on lui substitue presque toujours l'assemblage ordinaire à tenon et à mortaise, que l'on consolide par un étrier en fer.

Fig. 45.



2°. *Assemblage à queue d'aronde.* — Cet assemblage s'emploie concurremment avec le précédent, quand la pièce assemblée doit résister à un effort de traction. Il s'exécute de deux manières différentes : soit *à mi-bois*, comme on le voit ci-contre, la pièce tirée portant sur la moitié de son épaisseur une sorte de tenon évasé vers l'extrémité, lequel pénètre dans une entaille de même forme et de même profondeur pratiquée dans la pièce qui reçoit l'assemblage, soit *avec clef*.

Fig. 46.

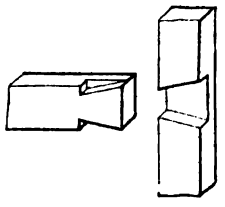
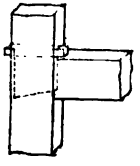


Fig. 47.



Dans ce dernier cas, la queue d'aronde n'est plus sur l'une des faces de la pièce ; elle forme tenon, et l'entaille creusée d'un côté de la mortaise pour recevoir la clef permet l'introduction de la pièce assemblée. On voit que, dans ce second mode, le tenon n'est plus évasé en queue d'aronde que sur l'une des faces de la pièce, et qu'il conserve sur l'autre la disposition du tenon ordinaire.

3°. *Assemblage d'angle.* — Les modes d'assemblage de deux pièces par leurs extrémités et sous un angle droit se réduisent à trois, qui sont res-

Digitized by Google

pectivement représentés par les trois figures ci-dessous. La première

Fig. 48.

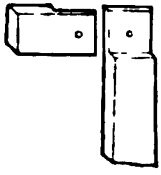


Fig. 49.

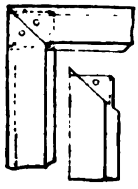
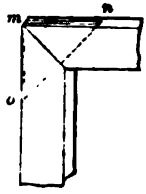


Fig. 50.

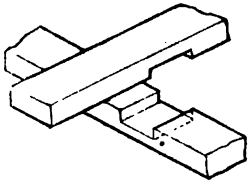


reproduit l'assemblage *à entaille à mi-bois*, la seconde l'assemblage *à entailles et onglets*, et la troisième l'assemblage *à onglet à plat-joint avec clef*. Les deux premiers systèmes s'expliquent suffisamment par la vue des *fig.* 48 et 49; dans le troisième, les deux pièces sont coupées d'onglet dans toute leur hauteur, s'appuient l'une contre l'autre, et l'assemblage est complété par une clef *mno* qui traverse chacune d'elles.

Ces deux dernières dispositions sont seules usitées, lorsque les bois doivent rester apparents; toutes trois ne se modifient d'ailleurs que dans les détails des coupes, quand les deux pièces doivent conserver une inclinaison supérieure ou inférieure à 90 degrés.

4°. *Assemblages de pièces qui se croisent.* — Ces assemblages se font tous en entaillant chacune des deux pièces, parallèlement à la direction de l'autre, d'une quantité quelconque, mais qui ne doit jamais dépasser la moitié de l'épaisseur; ce dernier cas correspond à l'assemblage *à mi-bois*. Mais, lorsque l'on craint que les pièces ne soient trop affaiblies, on les place en saillie l'une sur l'autre du tiers de leur épaisseur environ; de là l'assemblage *à tiers-bois*. Ces assemblages doivent toujours être consolidés par un boulon.

Fig. 51.



5°. *Assemblages bout à bout* ou *entures*. — Quand les pièces à réunir ne sont pas destinées à être tirées dans le sens de leur longueur, on se contente de les assembler *à entures à mi-bois avec abouts carrés* (*fig.* 52), ou *avec abouts en coupe* (*fig.* 53). On consolide ensuite ces assemblages, soit par un simple boulon, soit par des plates-bandes en fer reliées par des boulons.

Fig. 52.

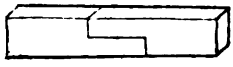
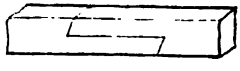
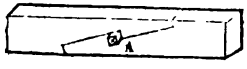


Fig. 53.



Mais si les pièces à réunir sont soumises à un effort de traction longitudinale, l'assemblage le plus efficace est le *trait de Jupiter avec clef*.

Fig. 54.

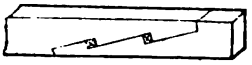


La clef A serre l'assemblage et s'oppose à la séparation; les coupes inclinées des

Digitized by Google

extrémités empêchent que les deux pièces ne se disjoignent verticalement. Il convient souvent de maintenir, en outre, cet assemblage au moyen de brides à écrous ou de plates-bandes en fer.

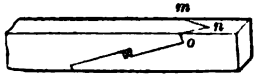
Fig. 55.



Quand l'effort de traction est considérable, ou lorsque les pièces sont de fort équarrissage, on multiplie les entailles et les clefs, afin de répartir les pressions sur une plus grande surface.

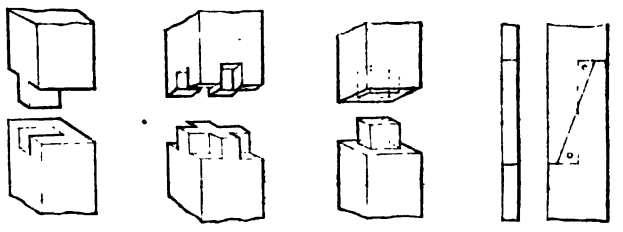
Enfin, s'il était à craindre que les pièces se séparassent par suite de pressions perpendiculaires à leur longueur, on y obvierait, soit au moyen de tenons, soit en traçant les joints suivant des lignes brisées *mno*. On dirigerait alors la clef parallèlement à ces forces; ainsi, elle se poserait verticalement, si la pièce était horizontale et chargée de poids. Il est facile en effet de concevoir qu'un trait de Jupiter doit présenter plus de résistance dans le sens de la clef que dans l'autre direction où les pièces ne sont retenues que par les coupes des abouts; toutefois, il n'en est pas de même lorsque l'assemblage est maintenu par des boulons; il y a avantage alors à placer le trait de Jupiter sur l'autre face.

Fig. 56.



Les assemblages le plus fréquemment employés pour enter deux pièces verticales sont dessinés dans les quatre figures ci-après, lesquelles représentent respectivement :

Fig. 57. *Fig.* 58. *Fig.* 59. *Fig.* 60.



L'*enture à tenaille* ou *à fausse tenaille*; elle s'emploie quand on prévoit que, lors du *levage* de la charpente, on sera obligé de faire entrer la pièce supérieure par le côté;

L'*enture à tenons et tenailles en croix*; celle-ci présente plus de solidité que la première; mais elle exige que la pièce supérieure puisse être soulevée de toute la saillie du tenon, pour être mise en place;

L'*enture à tenon* ou *à faux tenon carré*; un tenon carré est ménagé sur la face inférieure de la pièce supérieure, ou sur la face supérieure de la pièce inférieure; ou bien encore un faux tenon, de même forme, est introduit dans des mortaises pratiquées sur l'une et l'autre pièce;

Digitized by Google

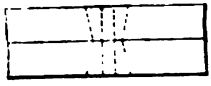
L'enture en fausse coupe avec tenons réservés, laquelle s'emploie plus spécialement pour les pièces de bois méplates.

6°. *Assemblages longitudinaux.* — Lorsque deux pieces de bois sont appliquées l'une contre l'autre dans le sens de leur longueur, et doivent être solidaires, on les réunit de diverses manieres, dont voici les principales :

Rainures et languettes ou *fausses languettes*. Une rainure est pratiquée sur l'une des faces; une languette ou tenon continu est ménagée sur l'autre et pénètre dans la rainure. Le plus souvent, afin d'éviter la perte de bois qui résulterait de la saillie de la languette, on pratique des rainures sur les deux faces, et on les remplit par une languette rapportée ou *fausse languette*. Les *fig.* 61 et 62 reproduisent en coupe chacune de ces deux dispositions.

Fig. 61. *Fig.* 62.

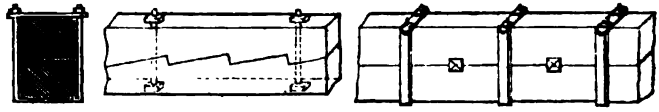
Fig. 63.



Avec queues d'aronde et clefs. On place, de distance en distance, des doubles queues d'aronde qui sont reçues dans des mortaises, traversent les deux pièces et sont serrées au moyen d'une clef.

Enfin, *avec brides ou boulons serrant les pièces, à plats joints, à entailles* ou *à clefs*. Ces trois dispositions sont représentées ci-dessous ; la dernière est celle qui offre le plus de solidité ; dans de tels systèmes, les entailles et les clefs ont pour objet de s'opposer au glissement des deux pièces l'une sur l'autre.

Fig. 64. *Fig.* 65. *Fig.* 66.



TRACÉ DES ROUTES.

123. Nous n'entendons pas entrer dans les considérations politiques ou commerciales qui portent le Gouvernement ou l'Administration supérieure à décréter l'étude ou la création de telle ou telle route, et à fixer les points principaux de son parcours ; nous supposerons simplement que, deux de ces derniers points obligés étant donnés, il s'agisse de les relier entre eux par une route, et de trouver le tracé le meilleur sous le rapport de l'économie dans les dépenses d'établissement et d'entretien, de la commodité et de la sécurité des voyageurs, et de la moindre somme des frais de transport qu'y nécessitera la circulation des personnes et des choses.

On commencera par reconnaître, sur une carte topographique aussi

Digitized by Google

exacte que possible, les deux points extrêmes et leur relation de position avec les points intermédiaires ou voisins ; on explorera le terrain par un temps clair, pour y rechercher et compléter les indications fournies par la carte, et l'on découvrira de nouveaux points de sujétion, secondaires par rapport aux premiers, soit au point de vue technique, soit même au point de vue commercial ; ce seront ou des ponts existants et sur lesquels l'économie locale commande de se diriger, ou des passages de rivière où la construction du pont présenterait de notables facilités, ou des inflexions qui permettent de franchir un col à une moindre hauteur, ou des centres de population qu'il serait facile et avantageux de desservir, et qui, vu leur importance relativement moindre, n'avaient pu trouver place dans la première nomenclature. Un examen attentif et raisonné conduira donc généralement à partager les premières divisions du parcours en un certain nombre de tronçons compris entre deux points de sujétion assez peu distants pour que l'étude du meilleur tracé propre à les relier l'un avec l'autre soit devenue facile.

Il est impossible de donner une règle générale et absolue pour obtenir sûrement le meilleur tracé entre deux points ; la disposition plus ou moins favorable du sol, le plus ou moins de sagacité et d'habitude de l'opérateur, conduiront plus ou moins près du but : toutefois, nous regardons comme un bon moyen d'éviter beaucoup de tâtonnements et toute erreur grossière, de tracer d'abord, sur un plan exact des lieux comprenant les deux points obligés consécutifs, une ligne droite joignant ces points ; cette ligne sera la trace d'un plan vertical dans lequel on devrait placer la route projetée, 1° s'il était possible de créer dans ce plan, soit une pente uniforme, soit une succession de paliers horizontaux ou de pentes ne dépassant pas l'inclinaison limite préalablement posée, et réalisable sans travaux trop dispendieux ; 2° si ce plan ne rencontrait pas des obstacles matériels qui, comme des marécages, des fondrières, des montagnes, des propriétés bâties, ne pourraient être franchis sans des frais exceptionnellement considérables ; 3° si, par des déviations soit à droite, soit à gauche du plan, il n'était pas possible d'obtenir soit un adoucissement des pentes, soit un raccourcissement du parcours, soit une diminution dans la dépense, soit même tous ces avantages réunis.

En effet, lorsqu'on se représente un instant la configuration générale de la surface terrestre, sa division en vallées de différents ordres séparées par des aspérités plus ou moins prononcées, on comprend que c'est seulement dans des cas tout à fait rares qu'une route peut être avantageusement et pratiquement tracée dans un plan unique entre deux points de sujétion même assez rapprochés. Il faut presque toujours se résoudre à faire quelque peu dévier la direction du tracé, afin de tourner les protubérances les plus saillantes, et ces déviations n'augmentent d'ailleurs pas sensiblement la longueur du parcours total, tant que les

Digitized by Google

angles formés par les alignements successifs diffèrent peu de deux angles droits.

En traçant sur le terrain, d'après ces premières indications et au moyen de celles qu'a fournies l'examen des lieux, des lignes magistrales droites (*Lever des Plans*, 64, 65 et 66) dans les directions que semble devoir affecter la route, lesdites lignes devant servir de base aux opérations ultérieures, on n'aura plus qu'à effectuer un nivellement en long et en travers (*Nivellement*, 32 et 33) sur ces directions, en ayant soin d'étendre suffisamment ces profils transversaux à droite et à gauche, pour qu'il soit toujours facile de déplacer sur le papier l'axe définitif, tant pour le tracé des courbes de raccordement, que d'après les exigences du règlement des pentes et rampes qui se fait ensuite dans le cabinet.

Nous avons indiqué (*Lever des Plans*, 67 et suivants) les diverses méthodes employées pour la description des courbes qui servent à raccorder entre eux les alignements d'un projet de route; il nous reste à dire maintenant que ces raccordements sont d'autant plus favorables à la circulation qu'ils ont une courbure moins prononcée, c'est-à-dire, s'ils sont circulaires, qu'ils ont un rayon plus grand; c'est à ce point de vue surtout que, dans cette opération, il faut se placer lorsque, toutes choses égales d'ailleurs, on a à se fixer sur le choix des éléments de ces portions du parcours.

124. Quant au règlement des pentes et rampes, nous avons dit (*Cubature*, 1) que l'axe du tracé projeté se dessinait en rouge sur les profils en long et en travers; il faut, dans la détermination de ces inclinaisons, avoir sans cesse devant les yeux et se proposer comme but à atteindre la plus grande facilité du roulage unie à la moindre dépense de construction. On comprend dès lors que la solution de cette question est nécessairement complexe, puisque, s'il importe d'obtenir des inclinaisons aussi faibles que possible, il n'est pas moins intéressant, au point de vue du roulage et de l'économie des frais d'exécution, de ne pas allonger outre mesure le parcours, ou de ne pas réaliser des déclivités très-adoucies au prix de mouvements de terres ou d'ouvrages d'art trop considérables.

En plaine, le tracé d'une route ne présente aucune difficulté; s'il s'écarte quelquefois de la ligne droite, les motifs de cette déviation sont généralement puisés dans des considérations étrangères à l'art de l'Ingénieur, et qui sont plus particulièrement du domaine de l'Administration proprement dite. Mais il n'en est pas ainsi lorsqu'il s'agit de tracer une route en pays de montagnes. Là, si d'un côté la direction en ligne droite semble réduire autant que possible le développement de la route, d'un autre côté, elle donne lieu à des pentes rapides qui, outre la difficulté de leur maintien en bon état, par suite des dégradations auxquelles elles sont plus exposées de la part des eaux, ont le grave inconvénient de faire exercer aux chevaux un fort tirage dans les montées, une grande résis-

Digitized by Google

tance dans les descentes, et de diminuer ainsi considérablement la quantité d'action utile que ces animaux peuvent fournir.

On est donc généralement conduit, dans les pays très-accidentés, à s'éloigner beaucoup de la ligne droite et à augmenter le développement de la route pour diminuer la raideur des pentes; toutefois, comme nous venons de le dire, il est un terme, dans chaque cas particulier, à cet allongement du parcours, et la recherche de cette limite dépend de données nombreuses dont l'exposition ne saurait trouver place ici. Les lois du mouvement de traction sont en effet encore loin d'être bien connues dans leurs minutieux détails; M. l'inspecteur général Favier, qui a écrit le dernier et avec le plus d'autorité sur cette matière délicate, a établi des formules desquelles il a déduit des Tables qui fournissent jusqu'à présent le seul moyen propre à mettre en parallèle avec quelque certitude plusieurs tracés reconnus admissibles entre deux points donnés. Nous allons résumer aussi succinctement que possible la mise en œuvre de ce précieux instrument de comparaison.

125. D'un point de départ déterminé à un point d'arrivée aussi donné, nous supposons deux ou plusieurs tracés qui se recommandent, à des points de vue divers, par des avantages plus ou moins considérables; le meilleur assurément est celui qui, eu égard à l'intérêt du capital de construction, à la dépense de l'entretien normal, et à celle des frais de transport des marchandises, conduit à la moindre somme de dépenses annuelles. Les deux premiers éléments sont fournis respectivement par la rédaction de chaque projet et par des documents statistiques relatifs tant à la circulation qu'à la somme affectée par année à l'entretien de l'unité de longueur de route; c'est pour l'évaluation des frais de transport que les Tables de M. Favier sont particulièrement utiles et trouvent leur application.

Et d'abord, remarquons que les moteurs exercent, soit en montant, soit en descendant, des efforts de traction qui diffèrent de ceux qu'ils exerceraient, toutes choses égales d'ailleurs, sur une pente horizontale, et qui diffèrent entre eux suivant le taux de la déclivité parcourue. On comprend donc que les frais de traction doivent aussi différer d'une pente à une autre; mais on voit également que, à chaque inclinaison particulière franchie sur une distance donnée, correspond toujours et nécessairement une longueur horizontale qui serait parcourue avec la même somme d'efforts, c'est-à-dire avec la même dépense, en un mot, une *longueur horizontale équivalente* à la longueur inclinée. Cela posé, rien ne serait plus facile que d'établir la comparaison des tracés proposés, si l'on connaissait la série des coefficients par lesquels on doit multiplier une longueur inclinée à un taux donné, pour la convertir en longueur horizontale équivalente, ou, ce qui revient au même, la série des nombres par lesquels il faudrait multiplier le développement réel correspondant à 1 mètre de hauteur fran-

Digitized by Google

chie suivant une inclinaison donnée, pour avoir la longueur horizontale équivalente à ce développement. Ce mode est en effet plus commode que le premier, par la raison que les hauteurs à franchir sont directement fournies par les cotes du profil longitudinal.

C'est précisément à cet usage que sont spécialement appliquées les Tables de M. Favier. Il faut bien toutefois avouer que ces Tables sont tirées de formules qui ne reposent ni sur des déductions mathématiques embrassant complétement les circonstances si diverses du mouvement de traction, ni sur un nombre suffisant de faits expérimentaux bien constatés; mais, quand on veut se borner à la comparaison des tracés entre eux, il est impossible de ne pas admettre que les indications fournies par les calculs précédents soient propres à conduire à la vérité relative que l'on cherche, et l'Administration supérieure ne manque pas d'exiger que ses Ingénieurs soumettent à cette épreuve les diverses directions qu'ils proposent à son choix, quand ils veulent modifier en tout ou en partie le tracé d'une route. Ceci ne veut pas dire qu'elle regarde ses décisions comme dictées sans appel par les résultats que fournit l'application des Tables. On comprend en effet qu'il ne suffit pas, pour qu'un tracé mérite la préférence sur tous ceux qui sont en présence avec lui, que la somme des dépenses annuelles y soit moindre que sur tout autre; il faut encore que cette réduction de dépenses ne soit pas achetée par l'abandon immédiat d'un capital trop élevé, eu égard à l'état présent de la fortune publique; des considérations économiques complétement étrangères à notre sujet viendront donc quelquefois faire pencher la balance du côté où les déductions purement techniques ne sembleraient pas l'appeler.

126. Nous avons donné (*Nivellement*, 57) le moyen de faire servir le niveau de pente à la détermination sur le terrain d'une ligne se développant suivant une inclinaison déterminée; ce problème trouve son application immédiate dans le tracé des routes en pays de montagnes. On a besoin à chaque instant de franchir un faîte élevé, ou de descendre sur le versant d'une vallée; il faut alors, par des tâtonnements que l'habitude des opérations abrége bientôt, essayer d'appliquer sur le terrain des tracés présentant une déclivité qui ne dépasse pas la limite assignée, et l'emploi du niveau de pente permet seul d'arriver rapidement à un résultat satisfaisant sous ce rapport.

Il existe peu de règles spéciales pour le tracé des routes dans les contrées accidentées; partout il faut étudier son terrain préalablement à toute fixation de tracé, et y chercher avec soin la meilleure direction à suivre. On doit surtout s'attacher à poursuivre la découverte de celle qui présente la moindre hauteur ou la moindre somme de hauteurs à franchir; car, si l'on faisait monter les chargements sans nécessité pour les faire redescendre ensuite, on perdrait évidemment une quantité d'action repré-

Digitized by Google

sentée par le produit du poids transporté et de la hauteur de laquelle ce poids a été inutilement élevé. Pour obtenir cette somme minimum des hauteurs à monter et à descendre, on cherche les points les plus bas des faîtes que doit couper la route, et l'on s'attache à suivre autant que possible les lignes de faîte ou les vallées, en évitant de couper les affluents ou les ravins qui pénètrent dans les coteaux.

Cependant les affluents qui coupent une colline, et que l'on évite avec soin tant que l'on doit suivre le faîte principal, deviennent souvent fort précieux lorsqu'il s'agit de descendre dans une vallée ou d'en sortir; ils donnent le moyen d'arriver au fond ou au sommet, sans que l'on soit obligé de développer une ligne à pente douce sur le flanc du coteau principal; mais il faut se garder de s'engager sans précaution dans l'un quelconque de ces vallons secondaires, dont la pente est souvent, surtout dans la partie supérieure, plus forte que la déclivité limite; il faut donc étudier *à priori* ces affluents et faire entrer comme élément du choix à faire la nécessité de descendre, dans des conditions analogues, de l'autre côté du faîte. A cette occasion, nous ne saurions trop recommander d'étudier sur le terrain le tracé de la route dans ses deux sens; car il arrive fréquemment, en pays de montagnes, que le relief du sol se présente d'une tout autre façon, selon le sens suivant lequel on l'étudie, et que la seconde étude fait apercevoir des fautes qui avaient d'abord échappé.

Enfin, quand on est le maître de choisir à volonté l'un des deux versants d'une vallée pour établir une route, il n'est jamais indifférent de prendre l'un ou l'autre. Dans les parties septentrionales de la France, il convient généralement de préférer l'exposition du sud ou de l'est, parce que les chaussées au nord sont plus exposées aux gelées, et celles à l'ouest aux vents humides de l'Océan; dans le Midi, où l'on redoute au contraire l'extrême sécheresse, il y a souvent lieu d'éviter l'exposition sud. Il faut d'ailleurs avoir aussi égard à la nature des déblais et des remblais; ainsi, les routes ouvertes à flanc de coteau, dans des terrains schisteux, devront être autant que possible tournées au nord, les schistes se décomposant rapidement sous l'influence combinée de l'humidité atmosphérique et de l'action du soleil.

CONSTRUCTION DES ROUTES.

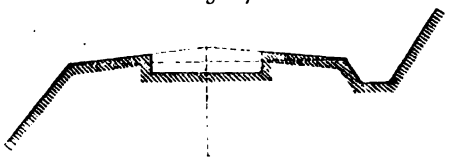
127. La construction d'une route comprend deux opérations distinctes: l'exécution des terrassements qui composent l'assiette, soit en déblai, soit en remblai, de la voie, et la confection de la chaussée empierrée ou pavée.

Nous avons donné, dans le corps de cet ouvrage, les indications nécessaires à l'exécution du mouvement des terres, et nous n'avons pas à y revenir en ce moment. Nous avons dit que cette opération devait être

Digitized by Google

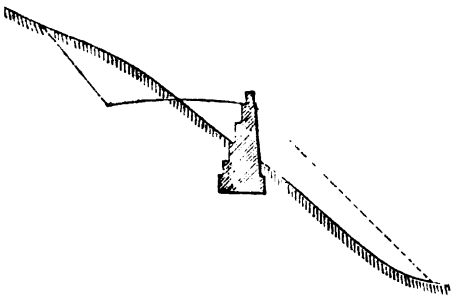
précédée d'un piquetage destiné à marquer sur le terrain les points principaux du relief projeté ; de même, on fait un nouveau nivellement apres que les terrassements sont réglés et tassés, pour s'assurer si leur hauteur est bien, en chaque point, conforme aux prescriptions du projet ; cette hauteur est d'ailleurs le plus souvent celle du bord extérieur des deux accotements ; elle est calculée de telle sorte que, en creusant sur l'axe d'une profondeur convenable pour y établir la chaussée, on trouve des terres en quantité sensiblement égale à celle qui doit être rapportée sur les accotements pour leur procurer la pente transversale voulue. Cette profondeur est nécessairement variable avec la largeur et l'épaisseur que l'on veut donner à la chaussée, avec la largeur et la pente que doivent avoir les accotements, et ces éléments dépendent principalement eux-mêmes de la nature et de l'importance de la voie de communication qu'il s'agit de créer.

Fig. 67.



128. Il a été précédemment parlé des fossés et des talus des routes, ainsi que des inclinaisons qui leur conviennent ; nous avons exposé que, dans les pays de montagnes, où l'économie commande d'établir autant que possible les routes à mi-côte, c'est-à-dire de façon que, l'axe étant situé à fleur de sol, le remblai soit à peu près partout exactement fait avec le déblai correspondant, il arriverait souvent que le talus de remblai s'étendrait jusqu'au fond de la vallée ; on remplace alors, chaque fois que cette circonstance se présente, le talus par un mur qui soutient les terres et dont l'épaisseur doit être suffisante pour résister à la poussée.

Fig. 68.



La détermination de l'épaisseur à donner aux murs de soutènement est assez importante pour que nous nous y arrêtions un instant. L'usage, basé sur une longue expérience, a fait à peu près passer en règle de donner aux murs de soutènement une épaisseur sensiblement égale au tiers de la hauteur des terres qu'ils auront à supporter. Pour donner une idée suffisamment claire des principaux éléments de cette question, nous citerons la formule établie par le savant Ingénieur Navier, pour le cas où le mur

Digitized by Google

doit s'élever jusqu'au niveau des terres à soutenir, et où ses parements extérieur et intérieur doivent monter verticalement.

Soient, à cet effet :

e l'épaisseur cherchée du mur,
h sa hauteur à partir de la base,
P_m le poids du mètre cube de maçonnerie,
P_t le poids du mètre cube des terres à soutenir,
et θ l'angle que forme avec la verticale le talus affecté naturellement par ces terres, quand elles sont abandonnées à elles-mêmes.

La formule que Navier a déduite de l'analyse est celle-ci :

$$e = \frac{3}{\sqrt{12 + 8\sqrt{3}}} h \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{P_t}{P_m}} = 0{,}59\, h \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{P_t}{P_m}}.$$

129. Pour faciliter l'application de cette formule, nous présentons ci-après les valeurs moyennes des quantités P_t, P_m et θ pour les matériaux qui se rencontrent le plus fréquemment dans la pratique :

Terre végétale.....	1400^k	Maçonnerie de moellons ordinaires, de.....	1700^k à 2300^k
— argileuse.....	1600	— de pierres de taille.	2700
— glaise.....	1900	— de briques.....	1800
— grasse mêlée de cailloux.....	2290		
Marne.....	1600		
Vase.....	1650		
Sable fin et sec.....	1400		
— fin et humide.....	1900		
— argileux.....	1750		
— de rivière humide.	1800		

Quant au talus naturel des terres employées en remblai, il forme avec la verticale des angles qui varient de 35 à 60 degrés; le premier convient à une terre compacte, le second au sable fin et sec; si l'on s'adresse à des vases liquides et à des glaises délayées par les eaux, l'angle θ diffère peu de 90 degrés, et la valeur de $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$ ne s'écarte alors pas sensiblement de l'unité.

Appliquée, pour exemples, aux systèmes de valeurs

$P_t = 1600^k$, $P_t = 1400^k$,
$P_m = 2000^k$, $P_m = 2000^k$,
$\theta = 35°$, $\theta = 60°$,

qui correspondent respectivement à de la maçonnerie ordinaire soutenant de l'argile compacte et du sable fin et sec, la relation citée donne les

Digitized by Google

épaisseurs

$$e = 0{,}264\,h, \qquad e = 0{,}285\,h.$$

Ces deux expressions diffèrent sans doute assez notablement de 0,33 h. que nous avons dit être généralement adopté. Il faut toutefois considérer que si, d'une part, la formule de Navier ne tient compte ni de la cohésion des terres ni de celle des maçonneries, d'autre part elle n'a été établie que d'après les conditions du strict équilibre des matériaux et n'a égard à aucune des éventualités contraires, telles que l'affaissement du sol qui porte les fondations, le tassement inopiné des terres par suite de pluies, de surcharges accidentelles ou de toutes autres causes. Il est donc nécessaire de se tenir en garde, dans chaque cas particulier, contre la plus ou moins grande possibilité d'accidents pareils, et c'est en vue d'une garantie moyennement suffisante que l'usage a consacré l'adoption du tiers de la charge.

Comme surcroît de précaution et pour augmenter encore les chances de stabilité, on ajoute ordinairement à l'épaisseur moyenne adoptée un fruit extérieur de $\frac{1}{10}$ environ, et l'on dispose le parement intérieur par gradins successifs dont la saillie dépend de l'épaisseur que l'on veut conserver au sommet. Dans certains cas, on ajoute même des contre-forts, soit extérieurs, soit intérieurs, qui permettent à la rigueur de réduire l'épaisseur normale du mur.

Quand on a quelque raison de craindre que les eaux viennent à pénétrer derriere le mur, on pratique de distance en distance des *barbacanes* disposées de manière à leur procurer une issue facile.

Si l'on prenait le parti de construire un mur de soutènement en pierres sèches, il serait prudent de porter le fruit extérieur à $\frac{1}{5}$ et de donner à l'épaisseur moyenne $\frac{1}{4}$ en sus de celle qui conviendrait, dans les mêmes circonstances, à un mur en maçonnerie.

Enfin, si le mur de soutènement ne devait pas s'élever jusqu'au niveau des terrassements qu'il a à soutenir, ce serait la hauteur réelle de ceux-ci, à partir de la base du mur jusqu'au niveau supérieur des terres, qu'il faudrait introduire à la place de h dans la formule ci-dessus rapportée.

130. Les chaussées des routes de France sont construites en empierrement, c'est-à-dire avec des pierres que l'on réduit, s'il est nécessaire, à la grosseur maximum de 6 centimètres en tous sens; ce n'est guère que dans les traverses des villes que l'on fait encore des chaussées pavées, sur la construction desquelles nous n'insisterons pas, par la raison qu'il en sera suffisamment question (142 et suivants) dans les développements relatifs à l'entretien.

La *largeur* des chaussées dépend en général de celle de la route; elle ne doit cependant pas descendre au-dessous de 5 mètres, cette dimension étant nécessaire pour que deux voitures puissent facilement s'y croiser

Digitized by Google

sans mettre une roue sur l'accotement. Le *bombement* est nécessaire à l'écoulement transversal des eaux ; mais il ne doit jamais être assez considérable pour que les voitures ne puissent facilement marcher que sur le milieu, circonstance qui, en rendant la circulation incommode et dangereuse pour le roulage, surtout dans les temps de verglas, provoquerait la création des ornières et nécessiterait un entretien beaucoup plus difficile et plus dispendieux.

La pente des accotements est en général réglée à $0^m,04$ par mètre ; quant à la chaussée, on la profile suivant un arc de cercle auquel on donne ordinairement une flèche égale au cinquantième de sa corde. C'est aussi suivant la même figure que l'on règle le fond de l'encaissement pour faciliter l'écoulement des eaux qui s'infiltrent à travers la chaussée ; beaucoup d'Ingénieurs trouvent toutefois cette précaution inutile et, dans un but d'économie, adoptent un fond plat qui réduit le cube des matériaux sur les bords où la fatigue de la route est en effet moins forte qu'aux environs de l'axe.

La couche de menues pierres qui compose les chaussées a le plus souvent de $0^m,20$ à $0^m,30$ d'épaisseur sur l'axe ; cette dimension, quand la voie est arrivée à l'état de prise normale et qu'elle est soumise à un régime d'entretien en rapport avec ses besoins, est suffisante pour les routes même les plus fréquentées. L'empierrement s'établit directement sur les terrassements, quand ceux-ci sont suffisamment tassés et de nature à ne pas se délayer par les eaux ; dans les cas exceptionnels seulement, ou l'on assainit le sous-sol par une couche de sable, ou bien on l'affermit par un lit de pierrailles un peu plus grosses ; quelquefois même on a recours à des fascines sur lesquelles on jette l'empierrement et qui empêchent les matériaux de s'enfouir avant d'avoir fait corps entre eux, en même temps qu'elles procurent un écoulement plus facile aux eaux d'infiltration. Il est aisé d'ailleurs de comprendre que, lorsqu'une chaussée a nécessité ces soins préliminaires pour sa construction, l'entretien doit aussi se diriger avec plus d'attention et de sollicitude.

131. Quand on livre au roulage une chaussée nouvellement construite, la mobilité des matériaux est un grand obstacle à la circulation, et l'on s'est fortement préoccupé, depuis quelques années, des moyens d'arriver à un état d'agrégation qui permît immédiatement aux voitures pesamment chargées de rouler sans difficulté. La compression au moyen de pilons suffisamment pesants a d'abord paru le seul moyen propre à atteindre aussi vite que possible le résultat cherché ; on a hâté la prise par l'adjonction de matières terreuses convenablement choisies par rapport à la nature des matériaux de la chaussée ; ensuite, on a eu recours à d'énormes machines, composées suivant divers modèles, traînées par dix, douze et quatorze chevaux, et dont l'élément essentiel était toujours un rouleau plus ou

Digitized by Google

moins pesant. Il résulte de la simple réflexion comme de l'expérience, que ces systèmes, dont le poids allait jusqu'à dépasser 10 ou 12,000 kilogrammes, ne pouvaient se manier que dans des conditions locales toutes particulières; aussi l'emploi du *rouleau compresseur* était-il uniquement praticable dans les parties à peu près de niveau, sur un fond et avec des matériaux suffisamment résistants. Dans la plupart des cas, le passage de cette masse si pesante affaissait le sol et entraînait devant elle les pierres en un bourrelet qui entravait bientôt la marche; de plus, les pieds des chevaux s'enfonçaient profondément et avec effort dans la chaussée encore mobile et détruisaient le bon effet qui avait pu être produit par le passage antérieur; enfin, cette main-d'œuvre, essentiellement restreinte aux pentes nulles ou faibles, était toujours très-dangereuse pour les hommes et pour les chevaux, et d'un prix de revient considérable. On a senti bientôt la nécessité de diminuer beaucoup les dimensions et le poids du rouleau compresseur; celui qui est maintenant le plus répandu sort des ateliers de M. Houyau, mécanicien à Angers, et ce nouveau modèle est beaucoup moins lourd que les anciens; il pèse vide 3,000 kilogrammes, et son poids peut être porté à 6 ou 7,000 kilogrammes par le chargement des caisses. C'est encore là, selon nous, une machine gigantesque; tout en reconnaissant l'immense avantage de comprimer les chaussées neuves avant de les livrer au roulage, nous pensons que des rouleaux dont le poids à pleine charge ne dépasserait pas 2,800 ou 3,000 kilogrammes au plus produiraient un plus salutaire effet. Il est évident en effet que, dans de telles conditions, la machine serait infiniment plus maniable, qu'elle circulerait facilement et sans danger sur toutes les déclivités ascendantes ou descendantes; il nous semble même que la prise des matériaux d'empierrement serait tout aussi bien et plus promptement assurée par des passages réitérés de cette machine beaucoup moins coûteuse d'achat et d'emploi, que par la manœuvre laborieuse de l'ancien rouleau, même de celui de M. Houyau.

Quoi qu'il en soit d'ailleurs de l'adoption de tel ou tel rouleau, la mise en œuvre de cet instrument consistera toujours à le faire circuler sur toutes les parties de la chaussée nouvelle, d'abord à vide, puis avec des charges progressivement plus fortes jusqu'au maximum; il faut du reste, surtout lorsqu'il s'agit de chaussées composées de matériaux siliceux dont la liaison serait difficile, faire précéder le passage du rouleau compresseur d'un arrosage suffisant si l'on opère par un temps de sécheresse, et du répandage d'une certaine quantité de matières liantes convenablement choisies.

L'époque de l'année où il est le plus avantageux de faire cette opération est, sans contredit, la belle saison par un temps humide; la forme de l'encaissement est alors sèche et résistante, tandis que l'humidité momentanée de l'atmosphère facilite la prise de l'empierrement.

Digitized by Google

TRAVAUX D'ENTRETIEN DES ROUTES.

132. Les parties constitutives d'une route sont : 1° la *chaussée* qui en occupe le milieu et est destinée à la circulation ordinaire des voitures ; 2° les deux *accotements* qui sont réservés pour les piétons et servent aussi pour le passage accidentel des véhicules, chevaux, bestiaux, etc. ; 3° enfin, dans les portions en déblai, les *fossés* dans lesquels sont reçues les eaux pluviales amenées par la pente transversale de la chaussée et de l'accotement correspondant, ou par l'inclinaison naturelle des terrains environnants.

La nature des matériaux qui entrent dans la composition de la chaussée influe considérablement sur le mode d'entretien applicable à chaque route ; c'est sous ce point de vue que nous avons à introduire ici la distinction capitale des *routes à chaussée d'empierrement* et des *routes à chaussée pavée*, que nous allons successivement examiner. Nous dirons toutefois et auparavant quelques mots tant sur l'organisation du personnel de l'entretien des routes en général, et de la surveillance continuelle qui doit être exercée sur cette importante partie du service des Ponts et Chaussées, que sur les détails de l'approvisionnement et de la conservation des fournitures nécessaires aux réparations, en prévenant que nous aurons principalement en vue, dans cet exposé, ce qui concerne les routes empierrées qui composent aujourd'hui la presque totalité des routes de notre pays.

ORGANISATION DU SERVICE. — CANTONNIERS.

133. Il est maintenant hors de doute et de toute contestation que c'est par des soins continus et de tous les instants que l'on donne aux routes empierrées une viabilité constante, et qu'on satisfait aux exigences persévérantes de la circulation. Pour obtenir ce résultat d'une manière certaine, on établit sur les routes des ouvriers qui travaillent isolément sur une portion déterminée du parcours ; ces portions assignées une fois pour toutes à chaque ouvrier s'appellent *stations* ou *cantons*, et l'ouvrier lui-même prend le nom de *cantonnier*.

Ordinairement, la longueur de route confiée à un cantonnier varie entre 1,000 et 3,000 mètres, suivant le chiffre des allocations de crédits, l'importance de la fréquentation, la plus ou moins bonne qualité des matériaux et les autres circonstances particulières qui peuvent rendre l'entretien plus difficile.

Les cantonniers reçoivent un salaire mensuel fixe dont le taux varie en raison de l'élévation du prix de la main-d'œuvre dans la localité, et en raison de la capacité et du zèle de chaque individu ; pour les stimuler, on leur assure la récompense de leurs efforts soutenus et de leurs succès, en

Digitized by Google

les divisant en plusieurs classes progressivement plus rétribuées; enfin, des gratifications ou des retenues sagement proportionnées viennent rémunérer ou punir les efforts momentanés ou les fautes passagères.

Pour que les cantonniers ne soient à aucun moment sans surveillance et sans direction, on les groupe par brigades de cinq ou six hommes, en donnant au plus actif, au plus intelligent, au plus consciencieux d'entre eux la direction et la surveillance du travail des autres; celui-ci, qui prend le titre de *chef-cantonnier,* et qui porte pour insigne spécial, outre la *plaque* commune au chapeau, un *brassard* indiquant son grade, a naturellement un canton beaucoup plus court que ceux des simples cantonniers, afin qu'il puisse l'entretenir exemplairement, tout en faisant de fréquentes tournées sur les stations de ses subordonnés.

Ces tournées, qui ont pour objet principal de vérifier l'exactitude et l'assiduité de chacun à son travail, doivent se faire à des heures et à des intervalles irréguliers et imprévus; le chef-cantonnier porte ses investigations sur tous les détails de l'entretien pratique; c'est lui qui prescrit au cantonnier telle et telle nature d'ouvrage à exécuter sur tel ou tel point, et c'est de la ponctualité dans l'obéissance continuelle à ces ordres que résulte en première ligne pour celui-ci l'appréciation de ses titres à une récompense, de même que l'inobservation des prescriptions de son chef l'expose à une punition certaine, quelquefois même au renvoi définitif, selon la gravité ou la fréquence des fautes commises. Au reste, pour mettre à couvert la responsabilité de chacun, tout cantonnier est porteur d'un *livret,* en tête duquel est imprimé en caractères très-lisibles le règlement qui fixe ses obligations, et sur lequel le chef-cantonnier inscrit succinctement, à chacun de ses passages, la date et l'heure de sa visite, le résultat de son examen sur la tenue et le travail du cantonnier, la vérification et la mesure de l'ouvrage exécuté depuis la dernière tournée, enfin les ordres clairs et précis qu'il donne, eu égard à l'état de la route et à celui de l'atmosphère, pour les jours suivants.

De même qu'il est à désirer que chaque cantonnier ait sa demeure à peu près au milieu de la longueur de sa station et non loin de la route, de même le chef-cantonnier doit résider autant que possible au milieu de la section dont la surveillance lui est confiée ; la longueur de cette section varie d'ordinaire entre 12 et 20 kilomètres, selon que le nombre des cantonniers est plus ou moins grand, ou, ce qui revient au même, selon que l'entretien de la route est plus ou moins difficile. Suivant l'ancienneté et la bonté de leurs services, et aussi suivant le prix de la main-d'œuvre dans la localité, les chefs-cantonniers reçoivent un salaire qui varie de 45 à 60 francs par mois.

D'après cet exposé, il est facile de comprendre que l'influence des chefs-cantonniers sur l'état des routes est immense, et qu'on ne saurait apporter trop de soin dans le choix des hommes auxquels sont confiées ces hum-

Digitized by Google

bles, mais importantes fonctions. Il est inutile de dire que ces ouvriers sont naturellement choisis parmi ceux des cantonniers les plus méritants qui savent lire, écrire et compter; de là la convenance de n'admettre, autant que possible, parmi ceux-ci que des candidats suffisamment lettrés pour pouvoir prétendre à un avancement que le zèle et la bonne conduite seuls ne sauraient leur faire obtenir.

Immédiatement au-dessus des chefs-cantonniers se trouvent hiérarchiquement placés les *Piqueurs*, qui sont à proprement parler les aides, les adjoints des *Conducteurs*, et qui partagent avec eux et sous leurs ordres la surveillance et la direction de l'ensemble du service d'entretien d'une ou plusieurs routes ou parties de routes; tous sont enfin contrôlés par les tournées des Ingénieurs, lesquels, au moyen de l'inspection des livrets et des inscriptions qu'y ont faites à chacun de leurs passages tous les agents inférieurs, se font facilement une idée claire de l'état de la route aux diverses époques, et de la régularité avec laquelle chacun, à tous les degrés, a rempli la tâche qui lui incombait.

Tel est en peu de mots le mécanisme complet de l'entretien des routes empierrées, en ce qui concerne le personnel des ouvriers et des agents chargés de les diriger. Rien n'est à changer à ce que nous avons dit, quand il s'agit de routes pavées; seulement, le système d'entretien continu étant spécial aux chaussées en empierrement, les cantonniers stationnaires n'ont à s'occuper, sur les voies à chaussée pavée, que des soins à apporter aux accotements, aux fossés, aux talus et autres dépendances de la route; on conçoit que, dans ce cas, les cantons ont nécessairement des longueurs beaucoup plus considérables que précédemment. Nous verrons plus tard suivant quel mode s'exécutent les réparations temporaires et périodiques qui constituent l'entretien des chaussées pavées.

APPROVISIONNEMENT ET CONSERVATION DES FOURNITURES.

134. La fourniture des matériaux nécessaires à l'entretien des routes se fait par des entrepreneurs devenus concessionnaires de ce travail pour un bail de plusieurs années, à la suite d'une adjudication publique.

Dès le commencement de chaque année et sans attendre la notification officielle des crédits affectés à l'entretien de telle et telle partie de route, l'Ingénieur ordinaire délivre à l'entrepreneur de chaque lot un *état d'indication provisoire* de la quantité approximative et de la distribution des matériaux à fournir dans l'étendue de ce lot. Cet état provisoire, dressé par l'Ingénieur ordinaire et visé par l'Ingénieur en chef, est un peu plus tard remplacé par un *état d'indication définitif* dressé par l'Ingénieur ordinaire d'après le chiffre du crédit, visé par l'Ingénieur en chef et approuvé par le Préfet; ce second état arrête définitivement, comme l'indique son nom, les obligations de l'entrepreneur pour l'exercice courant.

Digitized by Google

135. D'après les prescriptions des devis d'entretien, il est ordinairement enjoint aux entrepreneurs d'avoir approvisionné les trois quarts des matériaux demandés par l'état d'indication au 1er août, et la totalité au 1er octobre de chaque année. On ne peut se dissimuler que l'accomplissement de cette clause présente souvent de grandes difficultés, à cause de la coïncidence de ces échéances avec celles des travaux de la campagne qui occupent le plus grand nombre des bras. Ce n'est, en général, qu'après la moisson que les entrepreneurs s'occupent avec quelque vigueur de l'approvisionnement des routes, et il est alors presque toujours trop tard pour qu'ils puissent satisfaire aux obligations qui leur sont imposées. Cependant, tant que les devis porteront ces clauses de rigueur que les entrepreneurs adjudicataires ont librement acceptées, ceux-ci n'auront pas à se plaindre des mesures prises pour en obtenir le strict accomplissement, ou du moins pour assurer l'application des sanctions pénales stipulées par les conditions de leur marché. Voici la série de ces mesures que tout Conducteur, s'il veut mettre à couvert sa propre responsabilité, ne doit pas hésiter à provoquer contre les retardataires, en tenant scrupuleusement ses chefs au courant de l'avancement graduel et de l'état des fournitures:

Lorsque, après la première des deux époques fixées et rappelées ci-dessus, la quotité prescrite de l'approvisionnement n'a pas été fournie, et que l'on prévoit d'ailleurs, d'après les ressources dont dispose l'entrepreneur ou d'après sa manière de faire habituelle, qu'il lui sera impossible de terminer ses fournitures pour l'époque finale qui lui a été assignée, on le fait *mettre en demeure*, par arrêté du Préfet, de fournir une quantité convenablement déterminée de matériaux par semaine, ou d'employer à ses travaux tant de voitures et d'ouvriers par jour, sous peine de voir ces nouvelles prescriptions exécutées à ses frais et à la diligence de l'Administration des Ponts et Chaussées. Si cette menace ne produit pas son effet dans le délai fixé par l'arrêté lui-même, l'Ingénieur dresse un procès-verbal constatant l'inexécution des conditions imposées par la mise en demeure, et un second arrêté préfectoral déclare que l'entreprise est *mise en régie* à partir de la notification qui en est faite à l'entrepreneur; ce qui veut dire que l'État opère par ses propres agents, aux lieu et place, mais aux frais et au compte dudit entrepreneur, jusqu'à l'entier achèvement des fournitures demandées par l'état d'indication.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les détails de l'exécution des travaux en régie au compte de l'entrepreneur; nous nous contenterons de dire que l'application de cette peine est presque toujours et presque nécessairement onéreuse pour ses intérêts, à raison des circonstances mêmes dans lesquelles elle a été prononcée [illegible] la rapidité exceptionnelle qu'elle oblige à donner aux travaux, les excédants de prix et de dépenses étant prélevés sur les sommes qui peuvent être dues à l'entrepreneur, sans préjudice des droits à exercer contre lui et sa caution en cas

Digitized by Google

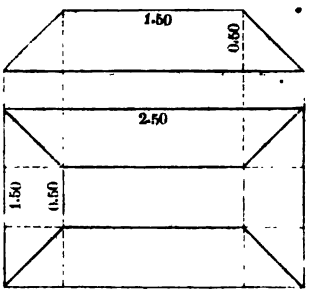
d'insuffisance ; il est du reste entendu que, si la régie ou l'adjudication sur folle-enchère qui peut en être la conséquence amenait au contraire une diminution dans les prix et les frais des ouvrages, l'entrepreneur ou sa caution ne pourraient réclamer aucune part de ce bénéfice qui resterait acquis à l'Administration.

136. Les matériaux fournis par les entrepreneurs sont ramassés dans les champs ou extraits de carrières sous des grosseurs très-variables ; l'état d'indication désigne ceux qui doivent être livrés bruts, pour être cassés par les cantonniers de la route dans les moments où l'état de l'atmosphère ne leur permet pas de trouver un emploi plus utile de leur temps ; les autres sont cassés par les entrepreneurs et ramenés à des dimensions telles que chaque pierre puisse passer dans tous les sens à travers un anneau de $0^{m},06$ de diamètre. Ces pierres, soigneusement purgées de terre, d'argile, de toutes autres matières étrangères et des détritus qui n'auraient pas la grosseur minimum fixée par le devis, sont déposées, par tas de 1 mètre et en des points désignés par les agents de l'Administration, sur les accotements de la route, dont l'un est affecté à la fourniture de l'année courante, et dont l'autre, généralement encore garni des restes des approvisionnements antérieurs, recevra la fourniture de l'année suivante.

137. Pour éviter l'encombrement et le désordre sur la route, pour apporter un obstacle à toute fraude et pour rendre le contrôle et les vérifications plus faciles, les tas sont *emmétrés* le long du bord de l'accotement, parallèlement à cette ligne, et sous la forme d'un prisme quadrangulaire dont les extrémités sont coupées suivant des inclinaisons convergentes, pareilles à celles des deux faces latérales ; les dimensions de ces tas, dont chacun est compté pour 1 mètre cube, ressortent d'ailleurs de la figure ci-dessous.

Il est extrêmement facile de voir que ce solide ne diffère d'un mètre cube que d'une quantité insignifiante ; il suffit pour cela d'imaginer quatre plans verticaux passant par les quatre arêtes de la base supérieure ; on décompose ainsi le tas en 1° quatre pyramides quadrangulaires égales, aux angles ; 2° quatre prismes triangulaires respectivement placés au milieu de chaque côté ; 3° un parallélépipède rectangle, au centre.

Fig. 69.



Or, les quatre petites pyramides ont chacune pour base un carré de

Digitized by Google

$0^m,50$ de côté; ces quatre solides partiels, réunis ensemble suivant leur arête verticale, forment une autre pyramide quadrangulaire dont la base est encore un carré de 1 mètre de côté; la hauteur étant $0^m,50$, le cube est $1 \times \frac{0,50}{3}$ ou..... 0,167

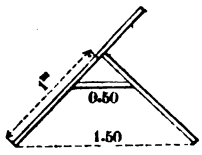
Les prismes ont pour section verticale commune un triangle de $0^m,50$ de base et $0^m,50$ de hauteur; leur longueur ensemble est de 4 mètres et leur cube total est $0^m,50 \times \frac{0,50}{2} \times 4$ ou..... 0,50

Enfin, le parallélépipède central a pour dimensions $0^m,50$, $0^m,50$ et $1^m,50$; il a donc pour expression de son volume le produit de ces trois quantités, ou..... 0,375

CUBE TOTAL du tas emmétré..... 1,042

138. Nous insistons à dessein sur les détails de l'emmétrage des matériaux d'entretien des routes, parce que cette main-d'œuvre a une importance spéciale dont on ne saurait trop se pénétrer; c'est elle qui permet à l'Ingénieur, personnellement chargé de faire la réception des fournitures, de mesurer rapidement un grand nombre de tas sans traîner après lui une boîte métrique, au moyen d'un instrument fort simple, vulgairement appelé *sauterelle*, et qui est construit suivant la disposition ci-contre, en bois léger et autant que possible inflexible. En plaçant la sauterelle en travers d'un tas régulièrement emmétré, elle en embrasse exactement la surface; la distance des deux pointes donne la longueur de la base supérieure; quant à celle de la base inférieure, il faut appliquer d'abord la précédente, puis renverser l'instrument autour de la pointe de la longue branche sur laquelle est ostensiblement marquée une longueur de 1 mètre.

Fig. 70.



Avec un peu d'habitude, on se sert de la sauterelle avec une grande rapidité, et elle est d'un usage très-fréquent dans les mains du Conducteur chargé, sous sa responsabilité, de contrôler la fourniture à toutes les époques de l'approvisionnement, et de faciliter la tâche de l'Ingénieur, en lui exposant avant la réception sa propre impression sur les qualités ou les défauts des matériaux. Celui-ci, muni de ces renseignements, arrive alors et fait immédiatement remanier sous ses yeux, par les soins de l'entrepreneur toujours présent ou du moins toujours convoqué, les tas que la vérification à la sauterelle lui a montrés trop faibles, en prescrivant de régulariser la section transversale et l'inclinaison des deux pans extrêmes; la longueur est alors la seule dimension défectueuse, et le tas soumis à l'examen ne diffère plus du tas normal que par un prisme intermédiaire

Digitized by Google

droit, ayant pour base la section transversale normale, et pour hauteur la différence entre la longueur prescrite et celle qui résulte de la nouvelle main-d'œuvre. Or, la section transversale a pour mesure

$$0{,}50 \times \frac{1{,}50 + 0{,}50}{2}, \quad \text{ou } 0{,}50 \times \frac{2}{2}, \quad \text{ou } 0{,}50,$$

et le volume du prisme, qui a pour expression le produit de sa base par sa hauteur, n'est alors numériquement autre chose que la moitié de la longueur manquant au tas remanié; si, par exemple, un tas soumis à l'épreuve expéditive de la sauterelle et soupçonné d'avoir un cube insuffisant n'avait, après le réemmétrage indiqué ci-dessus, que 2,40 de longueur au lieu de 2,50, le déficit réel du cube serait égal à $\frac{0{,}10}{2}$ ou à 0,05 de mètre.

Cette facile appréciation une fois faite sur les tas qui lui paraissent le plus défectueux sous le rapport de la quantité des matériaux, l'Ingénieur peut appliquer, aux termes du devis, le déficit le plus considérable à tous les tas présentés à sa réception. C'est à sa conscience à décider si l'entrepreneur a, par sa mauvaise foi ou par sa négligence, mérité cette mesure sévère, et si l'état général de la fourniture justifie son application; dans ce cas, et quelque rigoureuse que cette peine puisse paraître, il n'est pas moins nécessaire de la prononcer sans hésitation, d'une part pour obliger les entrepreneurs à donner à tous les tas un cube uniforme, d'autre part pour que ce cube ne soit jamais au-dessous de celui qu'ils doivent fournir.

Quant aux prix de mains-d'œuvre qui, à la suite d'un examen attentif, auraient été reconnues mal faites, telles que cassage, nettoyage ou emmétrage, on les retranche de la valeur de la pierre, en se conformant aux indications données par le sous-détail des prix.

139. Une autre considération de la plus grande gravité vient encore se joindre aux précédentes pour rendre indispensable l'emmétrage soigné de tous les tas de matériaux d'entretien. Le devis a bien laissé à la charge de l'entrepreneur le soin de veiller sur les fournitures qu'il a faites, et l'a rendu responsable de leur conservation *jusqu'après leur emploi*; mais, outre que cette clause est d'une application assez difficile, on ne saurait nier que l'équité, autant que l'intérêt de l'Administration, oblige les agents de tous les degrés à exercer sur les approvisionnements, surtout après que leur réception a été faite, une surveillance active. Or, ce contrôle serait à peu près impossible et illusoire, si les matériaux n'étaient disposés sous une forme unique, bien caractérisée, qui rendît le détournement de tout ou partie d'un tas difficile à dissimuler.

En un mot, l'emmétrage est une mesure d'ordre et de conservation, et ce serait une fort mauvaise économie que de chercher à diminuer le prix

Digitized by Google

de revient des fournitures en supprimant cette formalité, que l'Administration supérieure a d'ailleurs prescrite formellement dans les modèles de ses devis.

ENTRETIEN DES CHAUSSÉES D'EMPIERREMENT.

140. Nous ne saurions mieux faire, pour exposer les principes de cette matière si importante, que de reproduire à peu près dans son entier la circulaire adressée, le 25 avril 1839, aux Préfets et aux Ingénieurs, par feu M. Legrand, alors Directeur général des Ponts et Chaussées et des Mines. Sans doute il est, dans les procédés de l'entretien des routes empierrées, des différences qu'il faut admettre et qui tiennent à la nature du climat, à l'espèce des matériaux et à la nature du sol; mais cependant il est constant qu'il y a aussi quelques règles générales, et ces principes ne sauraient être établis plus clairement et avec plus d'autorité qu'ils ne le sont dans la circulaire précitée, d'où les pages qui suivent sont textuellement tirées :

« Je supposerai d'abord les routes arrivées à l'état normal d'entretien; » je les considérerai ensuite dans l'état de dégradation où elles se trou- » vent encore malheureusement sur une assez grande partie de leur lon- » gueur, et j'indiquerai, pour chacun de ces deux cas, les procédés gé- » néraux qu'il me paraît utile d'employer, et qui n'excluent d'ailleurs ni » les procédés particuliers, ni cette foule de soins et de précautions de » tout genre que MM. les Ingénieurs doivent mettre partout en usage pour » assurer la viabilité des communications confiées à leur surveillance.

1°. ENTRETIEN DES ROUTES.

» Lorsqu'une route est en bon état, que la chaussée est saine et unie, » par conséquent sans ornières, sans flaches, sans boue et sans poussière, » que les accotements et les fossés ont le profil convenable, on peut tou- » jours maintenir cet état de choses pendant toutes les saisons, quelle » que soit la fréquentation, par de bonnes méthodes d'entretien.

» Dans une bonne méthode d'entretien, il n'y a jamais que deux opé- » rations à faire :

» 1°. L'enlèvement continu de l'usure journalière de la route, soit en » boue, soit en poussière;

» 2°. L'emploi des matériaux qui doivent remplacer cette usure.

» Ces deux opérations bien faites, et faites à propos, préviennent les » dégradations; la route frayée dans tous les sens ne fait plus que s'user » parallèlement à sa surface.

» *Enlèvement de l'usure.* — 1°. *Poussière.* — Lorsque les voitures ont » circulé pendant plusieurs jours sur une route telle que nous venons de » la définir, si le temps est sec, la route se couvre bientôt d'une petite » couche de poussière. Cette poussière gêne les voyageurs et les chevaux.

Digitized by Google

» nuit aux propriétés riveraines, rend la route plus tirante, et si une » pluie continue survient, elle se change en boue, et la boue amène des » ornières et des dégradations de toute espèce. Dans l'intérêt de la via- » bilité comme dans celui de l'entretien de la chaussée, il faut donc en- » lever la poussière. Cet enlèvement peut se faire comme celui de la » boue, au racloir; mais, à cause des petites inégalités du sol, cet outil » ne peut être utilement employé que lorsque la poussière a une certaine » épaisseur, c'est-à-dire lorsque depuis longtemps elle est déjà nuisible; » enfin il en laisse une quantité encore sensible. Le balai de bouleau » convient beaucoup mieux pour cette opération; pénétrant dans toutes » les inégalités et concavités de la surface, il en enlève tout ce qui est » mobile, et par conséquent inutile et nuisible. L'opération du balayage » est trop simple pour avoir besoin d'être expliquée. Cependant il ne sera » peut-être pas inutile de dire que, par un temps très-sec et sur les » chaussées en gravier, on ne doit pas balayer aussi serré que sur des » chaussées en calcaire : on désagrégerait ainsi beaucoup de petits maté- » riaux de la surface. Sur ces chaussées, c'est après une petite pluie que » le balayage fait le meilleur effet.

» Une route bien balayée, si la pluie survient, ne présente pendant » plusieurs jours aucune trace de boue. La surface de la chaussée est » parfaitement unie et comme glacée; quelques heures de temps sec suf- » fisent pour la sécher complétement. La poussière, en effet, absorbe et » retient l'humidité; en parcourant une route dans cette circonstance, » on peut, par le degré de siccité des diverses parties, retrouver l'ordre » dans lequel elles avaient été balayées avant la pluie.

» 2°. *Boue.* — Mais, si l'humidité continue, la chaussée devient d'abord » grasse, puis se recouvre de boue dont la couche va s'épaississant; il » faut alors l'enlever promptement, parce que la boue rend le frayé des » voitures très-apparent, et comme ce frayé est plus roulant que le reste » de la chaussée, les voitures cherchent et parviennent à le suivre, main- » tenues qu'elles sont par les deux bourrelets latéraux; on aurait donc » bientôt des ornières. Mais si l'on a le soin d'enlever la boue au racloir » au fur et à mesure qu'elle se forme, les voitures continuent à marcher » dans tous les sens. La chaussée, quoique plus tendre, quoique plus » facile à entamer, reste cependant unie. Chaque voiture laisse bien une » impression visible, mais il serait impossible à la voiture suivante de » s'y placer exactement; ainsi le milieu de la bande va passer là où était » tout à l'heure le bord de la précédente, et remettre à leur place les » molécules qui tendaient à se soulever. Il n'y a point de dégradation ou » de déformation par la pluie comme par la sécheresse; il n'y a que » de l'usure.

» Je viens de dire que la boue devait être enlevée au racloir; c'est » l'outil le plus avantageux lorsqu'elle est grasse; mais, lorsqu'elle est

Digitized by Google

» liquide, le balai réussit parfaitement. Quoi qu'il en soit, jamais la » boue ne peut s'enlever aussi exactement que la poussière. Ainsi, lors- » que le temps sec succède à la pluie, on a quelquefois un peu de pous- » sière là où on n'avait pas de boue, tandis qu'on n'a jamais de boue là » où on n'avait pas de poussière.

» Avec l'enlèvement continuel de la poussière et de la boue, la chaus- » sée peut être maintenue toujours unie, toujours roulante; mais elle » s'aplatit, se creuse, et on atteindrait le fond de l'encaissement, si l'on » ne remplaçait pas le détritus enlevé; c'est le but de la seconde opéra- » tion de l'entretien, l'emploi des matériaux.

» *Emploi des matériaux.* — L'emploi des matériaux est une opération » nécessaire, essentielle même; mais elle n'a pas le même caractère » d'urgence que l'opération du balayage; la chaussée s'use en effet fort » lentement et il est indifférent que, si 25 centimètres sont son épaisseur » normale, elle n'ait, à un moment donné, que 24, 23, 22 centimètres; » c'est un inconvénient dont le public ne s'aperçoit pas. On peut donc » choisir, pour l'emploi des matériaux, le moment le plus convenable. » Sous ce rapport, les temps pluvieux ont sur les temps secs un avan- » tage immense. Des matériaux placés dans un moment où la chaussée » est dure et où le temps est sec ne se lient point et s'écrasent sans pé- » nétrer dans la masse de l'empierrement; employés, au contraire, par » les temps humides, avec le soin convenable, ils pénètrent dans la » chaussée sans s'écraser, et ne gênent que peu le roulage.

» Lors donc que les circonstances atmosphériques sont convenables, » que des pluies fréquentes ont amolli la surface, et qu'on ne craint pas » de gelée, on doit commencer l'emploi des matériaux. Le principe qui » doit guider le cantonnier dans cette opération qui rend le tirage un » peu plus pénible sur certains points, c'est de ne pas créer de motif déter- » minant pour les voitures de suivre une direction plutôt qu'une autre; » et cela est facile là où le curage et le balayage ont été faits avec soin. » On ne voit point alors de ces longues dépressions, soit au milieu, soit » sur les côtés de la chaussée, qui semblent demander un emploi étendu » des matériaux. Une chaussée qui a subi l'enlèvement continu des dé- » tritus ne présente sur sa surface que de légères flaches (*) que la pluie » rend apparentes. Ces flaches sont réparties d'une manière irrégulière à » droite, à gauche et au milieu; elles indiquent l'emplacement des maté-

(*) « Lorsque je dis que dans une bonne méthode d'entretien on n'a ni boue, » ni poussière, ni ornière, ni frayé, ni *flache*, il ne faut pas attribuer à ces mots, » excepté aux ornières et frayés, un sens rigoureux et absolu. Il y a évidemment » un peu de poussière et de boue là où on les enlève; mais il n'y en a que » quelques millimètres; il y a aussi des flaches, mais les plus profondes ne doi- » vent pas avoir plus de 3 centimètres. »

Digitized by Google

» riaux à employer. Ces flaches, d'une profondeur de 2 à 3 centimètres » environ au milieu et qui se réduit à rien sur les bords, doivent être » piquées dans leur contour de manière à donner un point d'arrêt; on » y place ensuite les matériaux en les arrangeant avec soin, les plus » gros au milieu, les plus fins sur les bords. Cet emploi ne doit avoir » que 2 ou 3 mètres de longueur, 1 à 2 mètres de largeur au plus. La » même opération se répète sur toutes les parties déprimées. Cepen- » dant, si elles étaient en grand nombre, il ne faudrait pas les recharger » toutes ainsi; il faudrait choisir les flaches les plus profondes, et atten- » dre la prise de celles-ci pour remplir les suivantes; sans cela, la gêne » imposée au roulage sur cette partie de la route serait trop considéra- » ble; il vaut beaucoup mieux, dans son intérêt, la répartir sur un temps » plus long. Il ne faut pas non plus l'accumuler sur un même point. Ainsi » le cantonnier ne doit pas commencer l'emploi par le commencement de » son canton, pour le finir à l'extrémité; il doit le commencer là où les » flaches lui paraissent le plus profondes et le plus nombreuses, toujours » ainsi pour terminer par les parties les moins usées.

» Lorsque, sur une longueur de 40 ou 50 mètres, on a ainsi rempli » les flaches avec les soins qui viennent d'être prescrits, ce serait une » erreur de croire que cette partie de route est restaurée, et qu'on peut » passer à une autre en l'abandonnant quelque temps. C'est la faute la » plus grave, et malheureusement la plus fréquente, que commettent les » cantonniers. En effet, quoique les flaches soient remplies, les matériaux » y sont mobiles; ils sont aussi dérangés par les roues, par les pieds des » chevaux; il faut, avec le râteau, les ramener à leur place pour qu'ils ne » soient pas rencontrés isolément par les roues et écrasés inutilement. » Malgré le soin mis dans la répartition des emplois pour dérouter les » voitures, elles finissent quelquefois par préférer une direction dans » laquelle le frayé se prononce; il faut promptement l'effacer, faire quel- » quefois de nouveaux emplois, enlever ou diminuer ceux qu'on recon- » naîtrait mal placés, sauf à y revenir plus tard; il faut curer la boue que » les matériaux font sortir de la chaussée en y pénétrant; en un mot, il » faut que le cantonnier soit bien convaincu qu'il n'y a pas de partie de » route qui réclame plus de soin, de vigilance et d'attention que celle où » il a fait récemment un emploi de matériaux. Il doit donc y revenir sans » cesse, jusqu'à ce que la prise soit faite; ce n'est qu'alors que son opéra- » tion est terminée. On est d'ailleurs largement indemnisé de tous ces » soins par l'économie des matériaux qui s'incorporent dans la chaussée » presque sans perte, et par les dégradations qu'on évite, dégradations » dont la réparation serait bien autrement dispendieuse.

» *De la quantité des matériaux à employer.* — On pourrait objecter à » la méthode d'emploi qu'on vient d'exposer d'être insuffisante, en ce » que le remplissage exact des flaches ne sera pas l'équivalent du détritus

Digitized by Google

» enlevé, et que, par conséquent, l'épaisseur de la chaussée ira toujours » en diminuant. Il pourra en être ainsi, en effet, lorsque le profil demandera à être baissé; on pourra même diriger le curage de manière que » les flaches s'effacent sans emploi de matériaux; mais, lorsqu'on voudra » relever le niveau de la route sur certains points, rien ne sera si facile. » L'expérience, en effet, apprend que, quelque temps après qu'on a fait » un premier emploi de matériaux, il se représente de nouvelles flaches » qui disparaissent peu à peu par l'effet du passage des voitures et du » curage, mais dont on peut profiter pour augmenter l'épaisseur de la » chaussée en y faisant de nouveaux emplois qu'on peut renouveler ainsi » cinq ou six fois dans un hiver. On est donc libre de mettre sur une » partie de chaussée à peu près ce qu'on veut de matériaux. Or, lorsque » l'entretien est dans son état normal, il faut qu'il y ait une compensation exacte entre le poids de ce qu'on fait entrer dans la chaussée et » le poids qu'on en retire ; mais il n'est pas nécessaire que ce poids soit » tout entier en matériaux; car une chaussée, même parfaite, contient » encore beaucoup de détritus qui sont essentiels pour en remplir tous » les vides. Si pendant l'année on a ôté 100 mètres de détritus, soit en » boue, soit en poussière, la chaussée n'a peut-être perdu que 60 mètres » en matériaux. On peut donc ajouter aux matériaux qu'on emploie une » certaine quantité de détritus qui, mélangée avec eux ou les recouvrant, » en facilitera la prise, évitera des cahots aux voitures et des chocs aux » matériaux. L'emploi judicieux du détritus peut donc apporter une assez » grande économie dans la dépense des matériaux.

» D'après les détails que nous venons de donner sur les deux opérations de l'entretien, on voit que le curage n'exige que de l'assiduité et » du travail, mais que l'emploi des matériaux demande de l'intelligence » et de l'expérience. Les fautes y ont toujours des conséquences graves et » pour l'état de la route et pour la dépense.

» *La méthode demande et facilite l'emploi de beaucoup de main-d'œuvre.* — Une des conditions essentielles du succès de la méthode, » c'est d'avoir toujours sur la route une grande quantité de main-d'œuvre » à sa disposition. Une des difficultés qui s'opposaient à ce qu'il en fût » toujours ainsi, c'est qu'on pensait qu'il y avait une différence très-grande » entre l'hiver et l'été pour l'usure des routes. C'est une erreur que démontre l'enlèvement continu du détritus. Le poids qui s'enlève en poussière n'est pas moindre que celui qui s'enlève en boue. On attribuait à » l'hiver toute la boue qu'on voyait sur la route, et ce n'était souvent » que la poussière qu'on avait négligé d'enlever pendant l'été. Le balayage » fait donc disparaître une des graves objections qu'on faisait à l'emploi » permanent d'un grand nombre de cantonniers; car non-seulement il » fournit un travail pour l'été, mais il diminue celui d'hiver. Il ne faut » pas cependant proscrire l'emploi des aides; car, en admettant (et cela

Digitized by Google

» n'est pas) que l'hiver n'exige pas plus de travail que l'été, il faut encore » compenser la brièveté des jours par un plus grand nombre d'ouvriers. » Il y a d'ailleurs des circonstances extraordinaires où la route a besoin » de plus de main-d'œuvre; de longues pluies qui ont retardé le travail, » des gelées et des dégels consécutifs mettent en retard l'opération du » curage; il ne faut pas hésiter à fournir au cantonnier les moyens de se » mettre au courant; tout retard, loin d'être une économie, serait une » dépense.

» Telles sont les prescriptions générales à l'aide desquelles les routes » peuvent être toujours maintenues en bon état, sans boue, sans pous- » sière, sans ornières ni frayés. Il ne faudrait pas en conclure cependant » que l'Ingénieur qui s'applique à les suivre n'aura jamais de dégrada- » tions à réparer. Quelque active que soit la surveillance du personnel » chargé de la main-d'œuvre, comme il est fort nombreux, sujet à des » mutations fréquentes, il est impossible qu'il ne se commette pas de » fautes provenant soit de négligence, soit d'inexpérience. Ces fautes » amènent alors des dégradations. Quelque rares qu'elles soient, encore » faut-il savoir les réparer.

» *Réparations des dégradations accidentelles.* — Les routes ne se dé- » gradent que parce qu'on ne cure pas assez la boue, qu'on emploie mal » les matériaux, ou qu'on néglige ceux qui sont mal employés. Le défaut » de curage amène des ornières, comme nous l'avons expliqué plus haut. » Pour les faire disparaître, le premier soin à prendre, c'est de curer la » route à vif. Dans une chaussée boueuse, l'ornière n'est souvent qu'appa- » rente, les bourrelets latéraux qui la dessinent ne sont que la boue chassée » par les roues. Cette boue enlevée, on ne trouve souvent qu'un frayé in- » signifiant que les voitures effacent d'elles-mêmes. Un emploi de matériaux » fait entre ces deux bourrelets, comme seraient disposés à le faire des » cantonniers sans expérience, serait une main-d'œuvre inutile, et qui » même aggraverait le mal. Il n'y aurait d'autre moyen de réparation, si » elle avait été entreprise, que d'ordonner l'enlèvement des matériaux » avec la boue, sauf à les séparer plus tard, si cette opération présentait » quelque avantage.

» Si, après le curage de la boue, il reste encore une ornière assez creuse » pour que les voitures n'en sortent pas facilement, il faut y mettre des » matériaux, mais seulement à fleur de la route, plutôt plus bas que plus » haut, pour que rien ne guide les voitures et que les roues qui voudraient » la suivre parallèlement y retombent de temps en temps. Il faut faire » aussi des emplois sur les flaches de la chaussée, d'après la direction que » cherchent à prendre les voitures, et au bout de quelque temps la route » sera frayée en tous les sens; mais, il ne faut pas se le dissimuler, cette » opération demande quelque intelligence et quelque habitude. Le chef- » cantonnier, le piqueur et souvent le conducteur doivent la diriger;

Digitized by Google

» car, si la faute a été commise par inexpérience, celui qui l'a faite ne » saura pas la réparer.

» La cause la plus fréquente des dégradations est le mauvais emploi des » matériaux ; je viens d'en citer un exemple ; mais un cantonnier inexpé- » rimenté en fait beaucoup d'autres. Ainsi, un côté de la route lui paraît » plus déprimé sur 50 ou 60 mètres de longueur ; il s'empresse de le » recouvrir d'une couche de matériaux ; toutes les voitures viennent alors » passer sur l'autre côté sans changer de frayé ; de là des ornières, non- » seulement vis-à-vis l'emploi, mais avant et après, dans la même direc- » tion. Il n'y a pas d'autre moyen de réparation que de relever la pierre » mal employée, de combler les ornières comme il vient d'être dit ; quant » au côté plus bas, c'est par le remplissage successif des flaches, en com- » mençant par les plus profondes, qu'il doit être relevé. Le rechargement » général sur toute la largeur de la chaussée a le même inconvénient ; car, » s'il n'existe pas d'abord de motif de préférence pour la direction des » premières voitures, elles en créent bientôt un très-déterminant, en » ouvrant une ornière moins tirante dans laquelle toutes les voitures » cherchent à se placer.

» Ce n'est pas éviter cet inconvénient que de diviser le rechargement » général en bandes de 7 à 8 mètres, interrompues par des parties non » rechargées. L'ornière des parties rechargées se prolonge bien vite sur » celles qui ne le sont pas ; les voitures, dirigées par l'ornière dont elles » sortent et par celle dans laquelle elles vont entrer, se maintiennent dans » le même frayé. Pour faire disparaître le mal, il n'y a pas d'autre » moyen que d'en faire disparaître la cause ; il faut donc enlever au » racloir tous ces rechargements, au moins tout ce qui serait encore mo- » bile.

» Des emplois bien faits donnent souvent lieu à des ornières, s'ils sont » abandonnés, parce que quelques-uns d'entre eux, se liant plus facile- » ment, disparaissent complétement, et ceux qui restent encore apparents » indiquent aux voitures une voie préférable. Réparer l'ornière comme » nous l'avons dit, retrancher ou diminuer quelques emplois, rétablir » l'uniformité de tirage dans toute la largeur de la chaussée, c'est le seul » moyen de ramener la route à son état normal.

2°. RÉPARATION DES ROUTES.

» Dans tout ce qui vient d'être dit, on a supposé la route bonne ; mais » malheureusement il en existe beaucoup de mauvaises, et les Ingénieurs » ont souvent plus à réparer qu'à entretenir. Le mal est quelquefois si » grave, qu'on prend souvent le parti de refaire à neuf. C'est toujours une » opération très-gênante pour le public et très-dispendieuse pour le Tré- » sor. Voici en effet comment on procède ordinairement :

» *Inconvénients du remontage des chaussées.* — On démonte l'ancienne

Digitized by Google

» chaussée, on la passe à la claie, si elle se compose de quelques maté-
» riaux mélangés avec beaucoup de terre; on la casse, si elle ne se com-
» pose plus que des grosses pierres du fond de l'encaissement; on ajoute à
» ces anciens matériaux une certaine quantité de neufs pour compléter
» l'épaisseur qu'on veut donner à la chaussée, et on replace ensuite le
» tout sur une forme bien dressée. Le moindre inconvénient de ce travail
» est d'être fort dispendieux; il ne coûte jamais moins de 3 ou 4 francs
» par mètre courant; mais le plus grave, c'est d'entraver la circulation
» d'une manière très-gênante pour le public. On est obligé, en effet, de
» s'emparer d'abord de la chaussée pour la démonter et y faire une forme
» régulière, puis d'un accotement pour passer à la claie ou casser les an-
» ciens matériaux et recevoir les nouveaux; quelquefois même ces travaux
» empiètent sur le second accotement, et on ne laisse aux voitures que le
» passage d'une voie; ce passage y amène à la moindre pluie de profondes
» ornières dans lesquelles on engloutit en vain beaucoup de pierres; les
» voitures ne vont plus qu'au pas; elles sont obligées de s'attendre pour
» se croiser, et quelquefois des accidents graves arrivent. Enfin, si l'on
» est surpris par la mauvaise saison avant d'avoir achevé, la circulation
» est complétement interrompue pendant plusieurs mois. Et cela se passe
» ordinairement sur d'anciennes routes où il existe depuis longtemps des
» relations nombreuses et régulières. Que de dommages pour le public,
» qui regrette avec raison sa mauvaise chaussée, et qui la regrette encore
» lorsqu'on lui livre ce massif de $0^m,25$ à $0^m,30$ de pierres cassées que le
» roulage doit écraser et broyer longtemps encore avant d'avoir une sur-
» face aussi roulante que celle qui existait! Si la route qu'on veut réparer
» par cette méthode est un peu longue, et que les allocations annuelles
» ne permettent d'achever le travail que dans quatre ou cinq ans, il en
» résulte que, pendant cet espace de temps, la circulation, pénible sur les
» parties récemment faites, difficile et quelquefois dangereuse sur celles
» en construction, est soumise d'ailleurs à des interruptions continuelles.
» Il n'y a de viables que les parties auxquelles on n'a pas touché. Ainsi,
» dans ce système, l'amélioration ne commence réellement que lorsque le
» travail est complétement terminé. Ce sont ces inconvénients qui ont
» déterminé à employer d'autres méthodes dont le succès est aujourd'hui
» sanctionné par l'expérience.

» *Réparation des chaussées en mauvais état.* — Lorsqu'on veut res-
» taurer une chaussée, il faut d'abord y faire quelques coupures qui ap-
» prennent de quelles couches elle se compose; il n'est pas rare en effet
» de trouver des épaisseurs considérables là où on ne les soupçonnait pas.
» Cela arrive ordinairement dans les parties de niveau, dans les bas-fonds;
» la chaussée s'y est successivement épaissie sous l'influence d'un système
» d'entretien dans lequel l'emploi des matériaux était considéré plutôt
» comme une réparation que comme une restitution d'épaisseur. Plus la

Digitized by Google

» chaussée était mauvaise, plus on y mettait de matériaux. Il en est ré-
» sulté des épaisseurs considérables de pierres et de terre qui se laissent
» facilement couper à la moindre pluie.

» Dans ce cas, il faut multiplier immédiatement la main-d'œuvre, faire
» enlever tout ce qui est mobile sur la chaussée, y eût-il même beaucoup
» de pierres mêlées à ce détritus. On arrive ainsi à une couche un peu
» plus fixe ; la pression des voitures en fait continuellement sortir soit de
» la poussière, soit de la boue en grande quantité ; on les enlève au fur
» et à mesure qu'elles paraissent, on pique les parties saillantes, et la
» chaussée descend ainsi parallèlement à elle-même en s'assainissant. Mais
» si le profil est trop plat, s'il n'a même que le bombement convenable,
» on remplit avec des matériaux les flaches nombreuses qui se forment ;
» ces emplois contribuent puissamment à l'amélioration de la surface ; ils
» sont même plus faciles et gênent moins le roulage que sur une bonne
» chaussée, parce qu'ils y pénètrent plus facilement. Au bout de quelque
» temps de ces soins continus, la surface de la chaussée devient dure,
» unie et roulante. Si l'on veut se rendre compte alors de ce qui s'est
» passé, qu'on fasse de nouvelles coupures, et l'on reconnaîtra qu'on a
» obtenu seulement une couche de 5 à 6 centimètres parfaitement saine,
» reposant sur l'ancien massif de chaussée. Or, cette couche peut suffire,
» car c'est d'elle seule que les voitures se servent ; avec un bon système
» d'entretien, les dégradations ne descendent jamais plus bas. On est libre
» d'ailleurs d'augmenter peu à peu cette épaisseur par les emplois de l'hiver.

» La même méthode de réparation convient également aux chaussées
» usées. Par le remplissage des trous et des flaches, on arrive bien vite
» à leur donner l'épaisseur suffisante ; on y arriverait sur le terrain na-
» turel, à plus forte raison sur une chaussée. Cette méthode a l'avantage de
» proportionner l'épaisseur à la qualité du terrain : ainsi là où les trous
» sont plus fréquents, où la chaussée s'enfonce, il se fait naturellement
» un plus grand emploi de matériaux et la chaussée prend plus d'épaisseur.

» C'est lorsqu'il ne reste plus des anciennes chaussées que la fondation
» de grosses pierres, qu'on est le plus disposé à proposer une reconstruc-
» tion. On est convaincu que tout emploi de petits matériaux est complé-
» tement inutile ; on croit que la pierre va se trouver entre l'enclume et
» le marteau ; cela est vrai pour une pierre isolée, mais cela cesse de
» l'être pour un grand nombre encastré dans les irrégularités de la chaus-
» sée. Il n'y a rien, en effet, de si inégal, de si raboteux que ces chaus-
» sées, lorsqu'elles ont servi quelque temps à la circulation ; or, ces iné-
» galités sont très-favorables à la liaison des menus matériaux. Au lieu
» donc d'arracher l'ancienne chaussée, il faut se borner à casser sur place
» les pierres les plus saillantes qui dépasseraient l'épaisseur de la couche
» qu'on veut obtenir ; on fait ensuite par un temps humide des emplois
» de matériaux dans les flaches nombreuses de la chaussée, avec les soins

Digitized by Google

» prescrits plus haut; ces matériaux se lient parfaitement, et la chaussée » s'unit graduellement sans causer la moindre gêne au roulage.

» L'avantage de ces méthodes, c'est que l'amélioration est générale, » immédiate et progressive; c'est-à-dire que, dès que le travail est commencé, la chaussée va en s'améliorant dans toute sa longueur, sans jamais passer à un état pire pour devenir meilleure; c'est que la réparation n'impose aucune gêne au public; c'est que le travail se fait de la manière la plus économique, puisque non-seulement on n'a pas à détruire ce qui est fait, mais qu'on en profite. Il ne faut donc avoir recours à la reconstruction des chaussées que dans le cas où l'on veut modifier le profil en long par des déblais et des remblais.

» *Du bombement et de la largeur des chaussées.* — Je n'entrerai pas ici dans les détails de la construction des chaussées; cependant je dirai un mot des conditions qui sont les plus favorables à l'entretien. Puisque avec des soins continus on est maître d'empêcher que les dégradations ne descendent jamais au delà de quelques centimètres, il s'ensuit que ces grandes épaisseurs de chaussée que l'on construisait autrefois sont complétement inutiles; il est bien préférable de mettre la même quantité de pierres en largeur qu'en épaisseur. On donne une voie plus large à la circulation; on favorise le changement de frayé, et on diminue ces accotements boueux dont l'entretien est presque impossible. Il faut renoncer aussi à ces bombements exagérés destinés à faire écouler les eaux; elles ne restent jamais sur une surface unie. Moins la chaussée est bombée, plus les voitures la parcourent dans tous les sens, et plus on évite ainsi la formation des ornières.

» *Résumé.* — La méthode d'entretien et de réparation des chaussées d'empierrement que je viens d'exposer peut se résumer par les prescriptions suivantes :

» Pour n'avoir point de boue, pour n'avoir point de poussière sur les routes, il faut enlever la boue ou la poussière à mesure qu'elle se forme.

» Pour n'avoir point d'ornière, c'est-à-dire pour que les voitures ne passent pas toujours dans la même direction, il faut qu'elles puissent passer sur toutes les parties de la chaussée.

» Pour que les chaussées ne s'abaissent ni ne s'élèvent, il faut leur rendre, par les emplois de matériaux, l'équivalent, ni plus ni moins, de ce qu'on leur a enlevé par le curage.

» Ces principes sont si simples, si évidents par eux-mêmes, que dans toute autre question il suffirait de les énoncer. Les explications que j'ai données, les détails minutieux dans lesquels je suis entré, ne se justifient que par l'importance de la question de l'amélioration des routes, et des résultats que cette amélioration doit procurer au public. »

141. Il est certainement impossible de préciser plus nettement l'en-

Digitized by Google

semble des principes qui doivent guider tous les agents chargés de l'entretien des routes en empierrement et de la direction d'un personnel de cantonniers; nous n'y ajouterons que quelques mots relatifs à la nature des outils spécialement à l'usage de ces ouvriers.

Aux termes du règlement auquel ils sont soumis, les cantonniers doivent se pourvoir à leurs frais :

1°. D'une brouette;
2°. D'une pelle en fer;
3°. D'une pelle en bois;
4°. D'un outil dit *tournée*, formant pioche d'un côté et pic de l'autre;
5°. D'un rabot de fer;
6°. D'un rabot de bois;
7°. D'un râteau de fer;
8°. D'une pince en fer;
9°. D'une masse en fer pour le cassage des matériaux;
10°. Enfin, d'un cordeau de 20 mètres.

Les chefs-cantonniers doivent être munis, en outre, de trois nivelettes ou voyants, d'un niveau à perpendicule gradué, pour indiquer les pentes, et d'un double mètre.

L'Administration fournit elle-même les balais nécessaires à l'enlèvement des détritus; elle confie de plus à chacun :

Un anneau en fer de 6 centimètres de diamètre, pour faire et vérifier le cassage des matériaux d'entretien;

La plaque de cuivre portant en découpure le mot *cantonnier;*

Le brassard que les chefs-cantonniers portent au bras gauche;

Le livret enfermé dans un étui en fer-blanc;

Enfin, un jalon de 2 mètres de longueur, divisé en décimètres, ferré par le bas, et garni par le haut d'une plaque en forte tôle, sur chacune des faces de laquelle est indiqué en chiffres très-apparents le numéro du canton. Ce jalon doit toujours être planté sur la route, à moins de 100 mètres de distance de l'endroit où travaille le cantonnier.

ENTRETIEN DES CHAUSSÉES PAVÉES.

142. L'entretien des chaussées pavées diffère essentiellement de celui des chaussées empierrées, en ce que les premières ne sont pas, comme les autres, l'objet de réparations journalières, continues, faites par les cantonniers; leur restauration est confiée aux entrepreneurs qui l'exécutent avec des ouvriers spéciaux, sous la surveillance des agents de l'Administration.

Les travaux de réparation des chaussées pavées sont de deux sortes : les *relevés à bout* et les *repiquages*.

On entend par relevé à bout la démolition complète d'une chaussée ou

Digitized by Google

partie de chaussée dégradée, et sa reconstruction avec fourniture d'une quantité indiquée, tant de pavés neufs pour remplacer le déchet du vieux pavé, que de sable pour rendre à la forme son épaisseur primitive. Les repiquages sont des relèvements partiels, de peu d'étendue, des remplacements de quelques pavés enfoncés; ils ont pour objet d'effacer les trous, rouages ou flaches qui viennent à se former sur les chaussées. Les règles qui suivent pour l'exécution de ces deux natures d'ouvrage sont celles qui résultent du devis d'entretien arrêté par l'Administration.

143. *Relevés à bout.* — Pour l'exécution des relevés à bout, l'entrepreneur commence par faire nettoyer et débarrasser la chaussée de toutes les terres, boues et immondices qu'il fait transporter aux lieux qui lui sont indiqués. Il fait ensuite arracher les pavés et bordures, et piocher la forme à vif fond, afin de la purger de toutes terres, pierrailles et mauvais sable qui empêcheraient de donner une assiette solide au pavé. La forme est ensuite rafraîchie en sable neuf dont la quantité est fixée par l'état d'indication. On la pilonne fortement pour éviter tout tassement ultérieur et toute déformation de la surface par l'enfoncement d'un ou plusieurs pavés; enfin, on jette sur la forme ainsi pilonnée une nouvelle quantité de sable destinée à former la gangue qui doit envelopper les pavés sur leurs faces, de manière à unir intimement toutes les parties de la chaussée, et à répartir uniformément sur une plus ou moins grande étendue de la surface les pressions directes qu'elle reçoit en quelques-uns de ses points.

Les choses étant ainsi préparées, les pavés jugés susceptibles de réemploi ayant été retaillés avec soin, et les pavés neufs ayant subi préalablement la réception minutieuse de l'Ingénieur avec les mêmes formalités que lorsqu'il s'agit de matériaux d'empierrement, le pavage proprement dit est établi suivant les méthodes passées en règle pour les pavages neufs et que nous allons succinctement exposer.

144. Les pavages effectués en pavés d'échantillon, les seuls dont il puisse être question en ce moment, étant toujours composés de blocs dont les dimensions, sur deux sens au moins, sont à très-peu près uniformes, on conçoit que les pavés doivent être rangés en lignes continues, exactement comprises entre des plans parallèles; ces lignes continues de pavés, formant une zone de largeur régulière, portent le nom de *ranges*.

En général, un bon pavage doit satisfaire aux conditions suivantes; il faut :

1°. *Que les chevaux, en exerçant un effort de tirage plus ou moins considérable, y puissent facilement tenir pied.* Pour obtenir ce résultat, on dispose habituellement le pavage par ranges perpendiculaires au sens du mouvement; de sorte que, si le pied du cheval vient à glisser sur un

Digitized by Google

pavé, il rencontre presque immédiatement le joint de la range suivante et y trouve un point d'arrêt.

2°. *Que les roues ne puissent jamais trouver une suite de joints continus en ligne droite.* Il suffit, pour cela, de faire croiser les joints des lignes successives de range, de manière que le milieu d'un pavé corresponde à peu de chose près à un joint des ranges précédente et suivante; l'accomplissement de cette condition ne présente aucune difficulté dans les parties courantes du pavage, et ne nécessite quelque soin que sur la lisière des chaussées ou sur le fil des ruisseaux.

3°. *Qu'il n'existe point, dans un même pavage, de parties plus résistantes les unes que les autres.* On doit apporter, pour cela, le plus grand soin à n'employer ensemble que des matériaux satisfaisant aux mêmes conditions de résistance par leur dimension et leur dureté; en conséquence, dans les travaux de réparation, il ne faut jamais employer ensemble des pavés neufs et des pavés en partie usés, quoique jugés susceptibles de réemploi.

145. Il est aisé de remarquer que, pour obéir à la seconde des trois conditions qui précèdent, il faut absolument avoir soin que la lisière des chaussées soit bordée, de deux en deux ranges, par des pavés ayant environ une fois et demie la longueur normale; de cette façon, en effet, la chaussée pourra se terminer par une ligne droite parallèle à l'axe de la route; sans quoi, les roues rencontrant successivement les amorces des pavés, disloqueraient bientôt le pavage et y causeraient des dégradations de tous les instants. Ces pavés plus longs que les autres, et qui sont destinés à être employés sur le bord des chaussées, se désignent sous le nom de *bordures*, et quand, par usure ou par accident, ces blocs cessent de pouvoir être utilement employés comme bordures, rien n'est plus facile que de les recouper de manière à en tirer parti comme simples pavés.

146. Une fois mis en place, et fortement assujettis l'un contre l'autre, dans une gangue de sable qui en garnit régulièrement tous les joints, sur une épaisseur moyenne de 6 à 7 millimètres, et suivant un bombement généralement réglé au cinquantième de la largeur de la chaussée, les pavés sont fortement battus au moyen d'une *hie* ou *demoiselle*, du poids de 25 à 30 kilogrammes; cette opération a pour double objet la consolidation du pavage et le dressement de la surface.

Quand le battage est terminé, vérifié par l'Ingénieur, et provisoirement reconnu bien exécuté, quand l'entrepreneur a opéré le remplacement de ceux des pavés qui se sont brisés sous les chocs de la hie, ce dernier répand sur la chaussée nouvelle une couche de sable de $0^m,03$ d'épaisseur, destinée principalement à remplir les vides qui pourraient encore exister entre les pavés.

Digitized by Google

147. *Repiquages.* — Les repiquages sont opérés par des ateliers ambulants, travaillant à la journée au compte de l'entrepreneur, et généralement dirigés par un piqueur des Ponts et Chaussées ; on conçoit dès lors qu'il est bon de former des ateliers un peu forts, quand l'importance des réparations à faire le comporte, pour ne pas trop élever les frais de surveillance relativement aux dépenses du travail effectif.

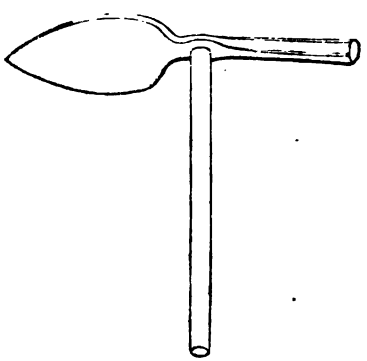
La main-d'œuvre des repiquages et relevés de flaches des chaussées pavées en pavé d'échantillon s'exécute avec les mêmes précautions et suivant les mêmes principes que celle des relevés à bout ; elle est toujours payée à l'entrepreneur au mètre superficiel des surfaces relevées. Mais, attendu l'irrégularité de ces surfaces, dont le métrage exact présenterait des difficultés, il est suppléé à ce métrage en partant de cette base qu'un certain nombre de pavés arrachés, nombre que détermine le devis dans chaque cas particulier, correspond à un mètre carré de surface relevée. En conséquence, le compte de ces pavés est fait contradictoirement avec l'entrepreneur, et la superficie du pavage relevé se déduit de ce compte, pour la main-d'œuvre en être payée à raison de la grandeur des flaches et aux prix fixés par la série de l'entreprise.

Enfin, quand l'étendue superficielle d'une flache est supérieure à deux mètres, sa réparation est regardée et payée comme un relevé à bout ; cette étendue ne devant, dans aucun cas, s'estimer que sur les pavés réellement *arrachés*, attendu que le prix fixé pour les repiquages comprend toutes les mains-d'œuvre qui sont à faire pour soutenir et regarnir de sable en dessous les pavés contournant la baie, de manière que ces pavés se raccordent bien exactement avec la surface relevée.

148. Un atelier de paveurs, employé à l'établissement d'un pavage neuf, se compose de *poseurs*, de *servants* et de *dresseurs*. Quand il s'agit de réparations, il faut y ajouter des *arracheurs*.

Les poseurs mettent en place les matériaux qui leur sont apportés par les servants ; ils emploient pour cela un lourd marteau, de forme particulière, dont un des bouts, évasé en spatule, sert à fouiller le sable, et l'autre à enfoncer les pavés et à les serrer les uns contre les autres. Ces ouvriers sont en outre munis d'un marteau à deux tranchants, qui leur est indispensable pour corriger les petits défauts que présentent parfois les faces des pavés, ou pour les couper de manière à les adapter à un emplacement déterminé.

Fig. 71.



Digitized by Google

pavé, il rencontre presque immédiatement le joint de la range suivante et y trouve un point d'arrêt.

2°. *Que les roues ne puissent jamais trouver une suite de joints continus en ligne droite.* Il suffit, pour cela, de faire croiser les joints des lignes successives de range, de manière que le milieu d'un pavé corresponde à peu de chose près à un joint des ranges précédente et suivante; l'accomplissement de cette condition ne présente aucune difficulté dans les parties courantes du pavage, et ne nécessite quelque soin que sur la lisière des chaussées ou sur le fil des ruisseaux.

3°. *Qu'il n'existe point, dans un même pavage, de parties plus résistantes les unes que les autres.* On doit apporter, pour cela, le plus grand soin à n'employer ensemble que des matériaux satisfaisant aux mêmes conditions de résistance par leur dimension et leur dureté; en conséquence, dans les travaux de réparation, il ne faut jamais employer ensemble des pavés neufs et des pavés en partie usés, quoique jugés susceptibles de réemploi.

145. Il est aisé de remarquer que, pour obéir à la seconde des trois conditions qui précèdent, il faut absolument avoir soin que la lisière des chaussées soit bordée, de deux en deux ranges, par des pavés ayant environ une fois et demie la longueur normale; de cette façon, en effet, la chaussée pourra se terminer par une ligne droite parallèle à l'axe de la route; sans quoi, les roues rencontrant successivement les amorces des pavés, disloqueraient bientôt le pavage et y causeraient des dégradations de tous les instants. Ces pavés plus longs que les autres, et qui sont destinés à être employés sur le bord des chaussées, se désignent sous le nom de *bordures*, et quand, par usure ou par accident, ces blocs cessent de pouvoir être utilement employés comme bordures, rien n'est plus facile que de les recouper de manière à en tirer parti comme simples pavés.

146. Une fois mis en place, et fortement assujettis l'un contre l'autre, dans une gangue de sable qui en garnit régulièrement tous les joints, sur une épaisseur moyenne de 6 à 7 millimètres, [illegible] un bombement généralement réglé au cinquantième de la larg[illegible]haussée, les pavés sont fortement battus au moyen d'une *hie* [illegible]*le*, du poid[illegible]jet la [illegible] à 30 kilogrammes; cette opération a po[illegible] du pavage et le dressement de la surfa[illegible]

Quand le battage est terminé, vérifi[illegible] reconnu bien exécuté [illegible]and l'entr[illegible] ceux des pavés qu[illegible] brisés [illegible] pand sur la ch[illegible]elle un[illegible] destinée pri[illegible]à remp[illegible] entre les [illegible]

Digitized by Google

147. *Repiquages.* — Les repiquages sont opérés par des ateliers ambulants, travaillant à la journée au compte de l'entrepreneur, et généralement dirigés par un piqueur des Ponts et Chaussées ; on conçoit dès lors qu'il est bon de former des ateliers un peu forts, quand l'importance des réparations à faire le comporte, pour ne pas trop élever les frais de surveillance relativement aux dépenses du travail effectif.

La main-d'œuvre des repiquages et relevés de flaches des chaussées pavées en pavé d'échantillon s'exécute avec les mêmes précautions et suivant les mêmes principes que celle des relevés à bout ; elle est toujours payée à l'entrepreneur au mètre superficiel des surfaces relevées. Mais attendu l'irrégularité de ces surfaces, dont le métrage exact présenterait des difficultés, il est suppléé à ce métrage en partant de cette base qu'un certain nombre de pavés arrachés, nombre que détermine le devis dans chaque cas particulier, correspond à un mètre carré de surface relevée. En conséquence, le compte de ces pavés est fait contradictoirement avec l'entrepreneur, et la superficie du pavage relevé se déduit de ce compte pour la main-d'œuvre en être payée à raison de la grandeur des flaches et [illegible] par la série de l'entreprise.

Enfin, quand l'étendue superficielle d'une flache est supérieure à [illegible] mètres, sa réparation est regardée et payée comme un relevé à bout, cette étendue ne devant, dans aucun cas, s'estimer que sur le pied des pavés *arrachés*, attendu que le prix fixé pour les repiquages [illegible] mains-d'œuvre qui sont à faire pour soutenir et [illegible] les pavés contournant la baie, de manière qu[illegible] exactement avec la surface relevée.

148. Un atelier de paveurs, employé à l[illegible] se compose de *poseurs*, de *servants* et de *dr[illegible]* [illegible] rations, il faut y ajouter des *arracheurs*.

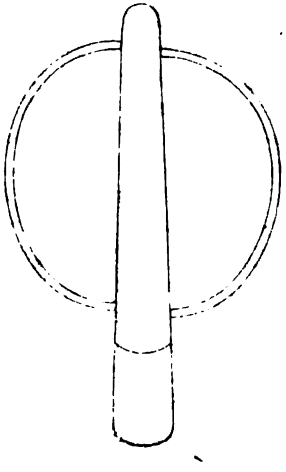
Les poseurs mettent en place les maté[illegible]

Fig. 71.

[illegible] toutes [illegible] il leur est [illegible] arrachés de [illegible] monde, et

Digitized by Google

Fig. 72.



Les dresseurs emploient, comme nous l'avons dit plus haut, une hie ou demoiselle; c'est un pieu garni d'un lourd sabot à sa partie inférieure et dont le haut est armé de deux bras au moyen desquels l'ouvrier soulève et laisse retomber l'instrument sur la tête de chaque pavé, jusqu'à ce qu'il l'ait enfoncé au point réclamé par la courbure générale de la surface du pavage.

Enfin, l'arracheur de pavés agit au moyen d'une pince en fer de $0^{m},04$ environ de diamètre, dont l'une des extrémités est aciérée et terminée en pointe ou en forme de coin.

ENTRETIEN DES PARTIES ACCESSOIRES DES ROUTES.

149. La chaussée, quelle que soit la nature des matériaux employés à sa construction, étant considérée comme la partie principale, fondamentale d'une route, nous comprenons dans la dénomination de parties accessoires, au moins en ce qui concerne l'entretien, les *accotements*, les *fossés*, les *talus*, les *ouvrages d'art* et les *plantations*.

150. *Accotements.* — L'entretien des accotements des routes consiste simplement à leur conserver le profil transversal incliné qu'ils ont reçu lors de leur construction, de manière que les eaux pluviales que le bombement de la chaussée leur apporte soient immédiatement rejetées dans les fossés; tout se borne donc, dans les circonstances ordinaires, à effacer les ornières longitudinales créées par le passage des voitures, et à enlever soigneusement toutes les aspérités que pourraient occasionner le dépôt des détritus tirés des chaussées, le cassage sur place des matériaux d'entretien et le développement de la végétation.

Dans les parties de route dont la pente longitudinale est très-prononcée, on a souvent à craindre que, eu égard à la consistance du sol et à la tendance qu'ont invinciblement les lourdes voitures à suivre l'accotement à la descente, les eaux pluviales ne ravinent profondément la route et y causent des dégradations contre lesquelles la chaussée elle-même, malgré sa résistance, ne serait pas toujours efficacement protégée. Pour prévenir ces effets désastreux, on s'oppose à l'accélération progressive des eaux et à leur réunion en trop grandes masses, en construisant de distance

Digitized by Google

en distance des ruisseaux inclinés transversalement à la route, et dont le bord inférieur forme bourrelet; on empêche ainsi les eaux de suivre trop longtemps les lignes frayées par les ornières, et on les oblige à se rendre de suite dans les fossés.

Ces ruisseaux, ou *écharpes*, ont été souvent et avec raison placés suivant la ligne de plus grande pente du plan de l'accotement (*Nivellement*, 47); mais, quand l'inclinaison longitudinale de la route est très-forte, l'écharpe serait très-allongée et ne remplirait qu'incomplétement son objet, en même temps que son développement augmenterait les frais exceptionnels d'entretien que nécessite cette nature d'ouvrage. On adopte donc alors une direction intermédiaire entre la ligne de plus grande pente et la perpendiculaire à l'axe.

Le plus ordinairement, les écharpes ne traversent pas la route entière d'un fossé à l'autre, suivant la même ligne droite. Cette disposition ne serait motivée que là où la route elle-même serait exceptionnellement établie de telle sorte que les eaux dussent s'écouler en entier sur un même côté; mais la forme le plus fréquemment usitée est celle d'un chevron brisé dont le sommet est sur l'axe de la chaussée.

Quoi qu'il en soit, les écharpes sont quelquefois pavées, le plus souvent empierrées. On comprend aisément que leur entretien doit demander un soin de tous les jours, tant à cause de l'usure qu'ont à subir les matériaux dont elles se composent, qu'en considération des dangers que leur détérioration ferait courir à l'existence de la route. Par ces motifs, on n'a recours à ce mode de conservation que dans le cas d'absolue nécessité, et notamment sur les routes ouvertes en pays de montagnes, où l'on rencontre souvent de très-fortes déclivités.

151. *Fossés.* — Les fossés, dont les dimensions varient en raison de la quantité d'eau qu'ils doivent recevoir et à laquelle ils doivent procurer un rapide écoulement, ont leurs faces latérales généralement inclinées à 45 degrés, et leur fond dressé suivant la pente longitudinale de l'axe de la route; leur entretien se borne, comme pour les accotements, à la conservation du profil et à l'enlèvement de tous les obstacles qui pourraient y gêner le libre cours des eaux. C'est là un travail important et qui, sur les routes pavées où par compensation les stations de cantonniers sont naturellement beaucoup plus longues que sur les routes en empierrement, forme l'occupation fondamentale de ces ouvriers. Le séjour des eaux sur les routes est, en effet, une cause incessante de gêne pour le public et de destruction pour la voie; le dressement des accotements et le curage des fossés ne sauraient donc être exécutés avec trop de sollicitude.

Avant la loi du 12 mai 1825, les propriétaires riverains des routes avaient la double obligation de curer les fossés et de recevoir sur leur sol le produit de ce curage. La loi qui vient d'être citée les a débarrassés de la première de ces deux obligations, mais elle se tait sur la seconde; et,

Digitized by Google

comme une servitude légalement établie ne peut être abrogée que par un texte précis de la loi, il est évident que la disposition des anciens arrêts, relative au dépôt des terres provenant du curage des fossés, subsiste encore aujourd'hui; les cantonniers ne sauraient donc jamais rencontrer d'opposition sérieuse à l'accomplissement de cette partie de leur tâche.

Dans les portions de route fortement inclinées, il est souvent à craindre que les eaux ne ravinent les fossés et attaquent la route elle-même; pour les empêcher de prendre une vitesse capable de devenir nuisible, on règle le fond des fossés suivant une série de plans échelonnés en gradins, inclinés de 1 à 2 centimètres par mètre, et défendus à leurs extrémités, aux points où les eaux doivent former chute, par de petits murs formant déversoirs avec enrochement inférieur. Quoique la construction de ces menus ouvrages puisse paraître étrangère à l'entretien proprement dit, nous croyons cependant utile d'en dire ici quelques mots, parce que c'est presque toujours longtemps après la construction de la route, et lorsque l'expérience vient en faire voir la nécessité, que l'on songe à les faire exécuter par les cantonniers.

152. *Talus.* — Toutes les fois que le terrain naturel est sensiblement au-dessus ou au-dessous du bord de l'accotement, c'est-à-dire quand la route est en déblai ou en remblai, elle se raccorde avec les terres riveraines au moyen de talus plus ou moins escarpés; il est bon de rappeler que, à moins de titres contraires, les talus des routes sont partout et toujours considérés comme une dépendance du domaine public, et, comme tels, doivent être l'objet des mêmes soins, du même entretien, que les accotements et les fossés eux-mêmes.

Nous avons indiqué (*Nivellement*, 48) quelles sont les inclinaisons normales des talus des routes dans les cas de déblai et de remblai; lorsqu'un talus a été d'une manière quelconque attaqué par les eaux ou par le vent, on recouvre la partie dégradée d'un *perré*, revêtement en pierres sèches posées les unes sur les autres de telle façon que leur queue ou plus grande longueur soit placée perpendiculairement à la face du talus, et de manière à conserver à ce dernier son profil normal. La première précaution à prendre, en pareille circonstance, consiste à s'assurer que le terrain sur lequel doit s'asseoir le perré présente assez de résistance pour l'empêcher de s'affaisser sous son propre poids.

Ce n'est pas ici le lieu d'exposer les détails de la construction des perrés neufs; nous dirons cependant que le genre de dégradation dont un perré est principalement susceptible consiste en ce que l'eau peut s'insinuer entre les moellons, entraîner la terre et produire des cavités dans lesquelles les pierres s'enfoncent. Pour empêcher cet effet, il faut, derrière les pierres les plus fortes placées en parement, en mettre d'autres qui soient de plus en plus petites, à mesure que l'on s'approche du talus en terre, et même répandre sur celui-ci, quand on le peut, une couche de sable.

Digitized by Google

Cette disposition a, entre autres avantages, celui de diviser les eaux à leur entrée comme à leur sortie, et de prévenir les érosions; elle donne d'ailleurs une assiette plus solide au perré. Il est bon aussi, quand il y a lieu, de garnir le pied du revêtement d'un enrochement en blocs suffisamment gros pour qu'aucun d'eux ne puisse être mis en mouvement ou emporté par la violence des eaux.

153. *Ouvrages d'art.* — Les ouvrages d'art que l'on rencontre le plus ordinairement sur les routes sont les *aqueducs, ponceaux, ponts en pierre, en bois* ou *en métal*, et *murs de soutènement* des terres.

Ces derniers sont surtout fréquemment employés dans les pays montagneux, à flanc de coteau, là où le talus s'étendrait à une distance considérable du côté de la vallée, si l'on voulait donner aux terres l'inclinaison naturellement convenable au remblai. Nous avons donné (128 et 129) quelques principes au moyen desquels on détermine, dans chaque cas, l'épaisseur qu'il convient d'assigner aux murs de soutènement pour qu'ils remplissent leur objet.

L'entretien des aqueducs, ponceaux, ponts et parties de ponts, et généralement de tous les ouvrages en maçonnerie, n'a pour objet que de remplacer les pierres qu'un accident, la gelée ou toute autre cause auraient détériorées; de refaire le rejointoiement partout où le besoin s'en manifeste; de visiter et renforcer les parties cachées sous l'eau et les enrochements, pour prévenir les affouillements. Quant aux portions qui sont construites en bois ou métal, outre le remplacement des éléments mis hors de service, l'entretien général consiste dans l'application d'une ou de plusieurs couches de peinture ou de goudron, pour empêcher les effets destructeurs de la pourriture et de l'oxydation.

154. *Plantations.* — L'entretien des plantations des routes a deux objets distincts : les *soins à donner aux arbres*, et le *remplacement de ceux qui viennent à mourir.*

Les principaux *soins à donner aux arbres* sont : 1° les *binages* ou labours annuels qui se font, pendant les premiers temps de la plantation, deux fois par an, en mars et novembre; ces binages n'ont plus lieu qu'une seule fois, en mars, à partir de la troisième ou quatrième année, et ils se prolongent plus ou moins longtemps, selon que le terrain est plus ou moins humide et les arbres mieux venants; 2° les *arrosages* qui seraient fort dispendieux sur une grande étendue de routes, mais auxquels on supplée utilement par de petites rigoles aboutissant au pied de l'arbre et dirigées de manière à y conduire les eaux pluviales; 3° l'*échenillage*, qui est prescrit par la loi dans l'intérêt général, et dont l'Administration doit donner l'exemple; 4° l'*ébourgeonnement* et la *taille;* la taille, dans les premières années, a une très-grande importance pour éviter les doubles cimes, retrancher les gourmands, enlever les branches qui prennent une

Digitized by Google

mauvaise direction et celles qui, par leur force, tendent à empêcher la branche maîtresse de s'élever verticalement; cette opération doit avoir lieu tous les ans, pendant les dix premières années; plus tard, elle peut se réduire à la surveillance de la cime qu'il importe d'empêcher de se bifurquer : l'ébourgeonnement complète les effets de la taille en supprimant, au moment où elles se forment, les pousses qui naissent sur le tronc et à ses dépens; 5° l'*élagage* ou enlèvement triennal des couronnes inférieures des arbres qui ont environ dix ans de plantation, enlèvement dirigé de manière que la partie garnie de branches soit toujours du tiers à la moitié de la hauteur totale de l'arbre; il faut d'ailleurs aussi retrancher des branches dans les couronnes supérieures, lorsque ces branches sont trop serrées, trop nombreuses, ce que l'on reconnaît quand le tronc est beaucoup plus gros au-dessous qu'au-dessus d'une couronne : comme pour la taille, il ne faut pas, en élaguant, couper les branches trop près du corps de l'arbre; il résulte souvent de l'inobservation de cette prescription, des pourritures qui, recouvertes par l'écorce, forment par la suite dans le bois des nœuds vicieux; 6° le *pansement des écorchures*. L'écorce, lorsqu'elle a été meurtrie et qu'elle n'adhère plus au corps de l'arbre, doit être enlevée, avec la précaution d'aviver le rebord de la plaie, pour faciliter la formation des bourrelets qui doivent la fermer et venir se rattacher sur le bois sans recouvrir des parcelles pourries de la première écorce. Il faut aussi avoir le soin de protéger le bois mis à l'air contre la sécheresse, et on peut le faire utilement en recouvrant la partie écorchée de terre glaise, mêlée de bouse de vache ou de toute autre matière analogue que l'on maintient, au besoin, au moyen d'un morceau de toile grossière.

Quant au *remplacement* des arbres qui viennent à mourir ou à être brisés, il doit se faire sans retard, autant du moins que le permet l'époque de l'année à laquelle la perte est constatée; on laisse ainsi le moins de différence d'âge possible entre les arbres, et l'on obtient, par suite, plus de régularité dans les plantations. D'un autre côté, les jeunes sujets, plantés au milieu d'arbres âgés, sont souvent gênés par les branches de ces derniers, qui ne laissent arriver ni l'air ni le soleil, et, sous ce rapport encore, il importe de ne laisser grossir que le moins possible les arbres entre lesquels on a à intercaler de nouveaux plants.

Toutes les prescriptions qui précèdent sont empruntées presque textuellement à la plus récente Instruction administrative sur l'entretien des plantations; elles résument parfaitement l'ensemble des soins attentifs que réclame cette partie importante du service.

Digitized by Google

LÉGENDES EXPLICATIVES DES PLANCHES.

PLANCHE I.

CHAINE D'ARPENTEUR (*Voir* page 15, n° **2**).

Figures 1, 2 et 3.

A, poignée de la chaîne.

B, premier chaînon, complétant avec la poignée la longueur de $0^m,20$.

C, chaînon courant, portant $0^m,20$ d'axe en axe des anneaux D.

D, anneau en cuivre, placé de mètre en mètre.

E, appendice marquant le milieu de la chaîne.

F, fiche en fer, de $0^m,30$ à $0^m,40$ de longueur.

STADIA (*Voir* page 17, n° **6**).

Figures 4, 5, 6, 7 et 8.

A, lunette de la stadia; elle peut prendre toutes les inclinaisons dans un plan perpendiculaire à l'axe *a*, et se placer dans toutes les directions en tournant autour d'un goujon engagé dans la douille *b* qui la supporte; cette douille s'assujettit sur un pied ordinaire d'instrument (*fig.* 9).

cccc, boîte prismatique renfermant le micromètre.

dd, châssis mobile dans la boîte *cc*, à l'aide de la vis *f* et de l'écrou *g*. Cet écrou porte un indicateur *i* qui marque sur le cadran *hh* la fraction du pas de la vis dont le châssis s'est élevé ou abaissé.

ll, ressort à boudin enveloppant la vis *f*; il tend à repousser le châssis et maintient ainsi l'écrou *g* constamment appuyé sur son siége.

oo, diaphragme fixe contre lequel glisse le châssis *d*, et qui porte un fil horizontal *m* et un fil vertical *n*.

p, fil horizontal du châssis mobile. L'écartement des deux fils horizontaux *m* et *p* se mesure au moyen de divisions égales au pas de la vis et tracées sur le côté du diaphragme; les fractions du pas de la vis se déter-

Digitized by Google

minent, comme on l'a vu plus haut, à l'aide du cadran gradué et de l'indicateur *i*.

PIED ORDINAIRE D'INSTRUMENT.

Figures 9 et 10.

A A, pièce de bois légèrement conique à la partie supérieure et prismatique par le bas; la partie conique reçoit la douille des instruments.

B B B, pieds en bois terminés par une virole et une pointe de fer.

C C C, boulon à trois branches serrant les pieds contre le prisme A au moyen des écrous à oreilles *d*.

ÉQUERRE D'ARPENTEUR (*Voir* page 23, n° 15).

Figures 11, 12 et 13.

A A, tambour octogonal et quelquefois circulaire, percé de fentes très-déliées suivant quatre plans diamétraux faisant entre eux des angles de 45 degrés.

o o, ouvertures qui servent à chercher l'objet vers lequel on veut diriger la fente opposée.

f f, fenêtres divisées par un fil ou par un cheveu en deux parties égales, et qui se tournent vers l'objet dans les visées. Ces fenêtres occupent la moitié de la hauteur de chaque fente, et sont plus commodes que ces dernières pour préciser la direction de l'objet vu par la fente située près de l'œil.

D, douille qui se visse à la partie inférieure du tambour, et s'engage sur le bâton ferré B qui sert de pied à l'instrument.

PLANCHETTE (*Voir* page 29, n° 22).

Figure 14.

A, planchette en bois qui reçoit la feuille de papier sur laquelle on veut dessiner le plan à lever.

B, rouleaux destinés à retenir le papier quand il est trop long pour être collé ou fixé directement sur la planchette.

C, table sur laquelle est fixée la planchette.

D, tablette circulaire sur laquelle se meuvent la planchette A et sa table C.

e, vis de pression qui permet de rendre solidaires les deux tablettes C et D, quand la planchette a été orientée.

Digitized by Google

E, noix du genou à la Cugnot. Cette noix se compose de deux cylindres dont les axes sont disposés perpendiculairement l'un à l'autre.

f, *f'*, boulons repectivement placés dans l'axe des deux cylindres, et autour desquels la planchette peut tourner.

g, *g'*, écrous distinés à arrêter ces mouvements.

H, H', collets qui réunissent la planchette et son pied à leurs boulons respectifs.

G, branches du pied serrées par des écrous *o* contre les tenons *h'* qui terminent inférieurement les collets H'.

DÉCLINATOIRE (*Voir* page 42, n° **40**).

Figures 15 et 16.

A A, boîte du déclinatoire fermée par un verre qui en laisse voir l'intérieur. Un couvercle à coulisse en bois protége le verre dans les transports.

a a, aiguille aimantée reposant par une chape en agate *b* sur le pivot planté dans le fond de la boîte.

e e, limbe gradué en cuivre argenté; sa ligne de foi *o o* est parallèle aux bords de la boîte.

n, bouton sur lequel presse le couvercle et qui, par l'intermédiaire d'un levier, soulève l'aiguille contre le verre pour l'empêcher de se déplacer dans les mouvements de l'instrument.

PANTOMÈTRE (*Voir* page 35, n° **30**).

Figures 17 et 18.

A, tambour fixe. Il est percé, dans deux plans diamétraux perpendiculaires entre eux, d'un côté par une fente très-déliée, de l'autre par une fenêtre qu'un cheveu divise en deux parties égales.

B, tambour mobile percé de la même manière que le premier. L'un de ces tambours porte une graduation en degrés dont le zéro se trouve dans le prolongement de la fente *f*; l'autre est muni d'un vernier qui a également son zéro dans la direction de la fente *m*.

s, *s*, ouvertures servant à chercher l'objet que l'on veut viser.

β, bouton au moyen duquel on fait mouvoir l'engrenage intérieur pour diriger le tambour mobile.

C, douille qui s'engage sur un bâton d'équerre pour l'emploi de l'instrument.

D, boîte de boussole assujettie sur la partie supérieure du tambour mobile. Cette boussole n'existe pas dans tous les pantomètres.

Digitized by Google

PLANCHE II.

ALIDADES (*Voir* page 30, n° **23**).

Figures 1, 2, 3, 4 et 5.

AA, règle en cuivre ou en bois qui s'applique sur la planchette et dont l'un des côtés sert à tracer les lignes droites relevées sur le terrain.

a, *a'*, pinnules mobiles à charnières, vues de profil et de face.

m, *m*, fenêtres garnies d'un fil contre lesquelles on applique l'œil pour viser.

n, *n*, fenêtres plus larges, aussi munies d'un fil qui doit se projeter sur l'objet visé.

BB, lunette qui remplace les pinnules de l'alidade ci-dessus décrite, et qui s'adapte au support C, de telle sorte que son axe optique puisse plonger et se mouvoir dans le plan vertical passant par le bord de la règle.

GRAPHOMÈTRE (*Voir* page 32, n° **26**).

Figures 6 et 7.

AA, limbe demi-circulaire divisé en 180 degrés.

BB, alidade à pinnules *b*, *b*; mobile autour du centre *o* et munie à chacune de ses extrémités d'un vernier qui donne l'angle à moins de deux minutes près.

b, *b*, *c*, *c*, pinnules fixées aux extrémités de l'alidade et du diamètre du limbe. Les plans de visée des deux systèmes de pinnules se croisent exactement au centre *o*.

G, genou à coquille qui supporte le limbe et permet de l'incliner dans le plan de l'angle à mesurer. Ce genou une fois serré, le limbe et l'alidade peuvent tourner autour du pivot commun; seulement, le mouvement de l'alidade doit être plus facile que celui du limbe, pour que la première de ces deux pièces puisse être dirigée vers un objet sans entraîner le limbe dont les pinnules ont été préalablement dirigées sur un autre objet.

BOUSSOLE (*Voir* page 35, n° **31**).

Figures 8 et 9.

AA, boîte carrée contenant l'aiguille aimantée et fermée par un verre.

BB, niveau à bulle d'air.

CC, règle creuse formant alidade à pinnules.

Digitized by Google

DD, lunette dont l'axe optique est à la fois parallèle à la face supérieure de la règle, et compris dans le plan de visée des pinnules.

gg, aiguille aimantée mobile sur un chapeau en cuivre ou en pierre dure, et roulant sur une pointe en acier.

p, papillon servant à soulever l'aiguille et à la fixer contre le verre de la boîte, pour éviter son dérangement dans les transports de l'instrument.

RAPPORTEUR (*Voir* page 45, n° **46**).

Figure 10.

ÉCHELLE DE $0^m,0001$ POUR 1 MÈTRE (*Voir* page 47, n° **50**).

Figure 11.

COMPAS DE RÉDUCTION (*Voir* page 51, n° **55**).

Figure 12.

PANTOGRAPHE (*Voir* page 51, n° **57**).

Figure 13.

A, calquoir qui parcourt les lignes du dessin à réduire.

B, crayon qui trace le dessin réduit.

M, masse de plomb qui fixe la position du centre de mouvement.

ff, fil que le dessinateur tient à la main pour soulever le crayon quand il veut interrompre son trait ou porter le calquoir sur un autre point de l'original.

c, cuvette qui reçoit, si besoin est, un poids additionnel, en raison de la dureté du crayon et de l'intensité du trait que l'on veut obtenir.

PLANCHE III.

NIVEAU D'EAU (*Voir* page 77, n° **8**).

Figures 1 et 2.

AAA, tube en laiton dont les extrémités sont recourbées à angle droit et portent un pas de vis.

BBB, fioles composées d'une monture en laiton *b* dans laquelle sont fixés, avec du mastic de fontainier, les tubes de verre *a*.

ff, rondelles en cuir gras destinées à rendre parfaitement étanche l'ajustement des fioles et du tube principal A.

Digitized by Google

ggg, étui en laiton ou en fer-blanc, noirci intérieurement et enveloppant en partie les fioles, pour donner à l'eau un reflet foncé qui rend les onglets plus apparents.

K, noix sphérique terminant le goujon autour duquel le niveau peut tourner, et engagée entre les coquilles *nq*, *np* du genou. Ces coquilles sont serrées par le boulon à vis *ooo*, et tout le système se place sur un pied ordinaire à trois branches.

NIVEAU DE MAÇON (*Voir* page 76, n° 8).

Figure 3.

ADGG', triangle isocèle en bois contre la hauteur duquel bat le fil à plomb AG'.

BC, règle bien dressée, fixée sur un genou à coquille, et sur laquelle s'applique la base du triangle.

NIVEAU D'ÉGAULT (*Voir* page 81, n° 16).

Figures 4, 5, 6 et 7.

A, lunette placée dans des collets *a*, *a*, et maintenue par les fermoirs *i*, *i*.

BB, règle du niveau à bulle d'air C.

E, plateau mobile avec le système supérieur auquel il est fixé solidairement par la pince *o* et la vis *v*.

ff, vis contre lesquels vient buter la lunette dans ses mouvements autour de son axe de figure.

F, plateau fixé sur la douille G, portant les deux ressorts *m* et les vis à caler *n*. C'est par le moyen de ces ressorts et de ces vis que l'on place le plateau mobile E dans un plan horizontal, d'après les indications du niveau à bulle d'air C.

T, tablette portant le goujon qui s'engage dans la douille G, et supportée par les pieds K de l'instrument.

NIVEAU-CERCLE DE LENOIR (*Voir* page 86, n° 19).

Figures 8 et 9.

AA, lunette placée sur le plateau circulaire BB et s'appuyant sur lui par les deux corps carrés *c*, *c*.

CC, niveau à bulle d'air s'appliquant sur les corps carrés *c*, *c*, et pivotant avec la lunette autour d'un goujon *n* qui, placé dans l'axe du plateau, fait corps avec l'embrasse de cette dernière.

Digitized by Google

E, colonne fixée au centre du trépied *pp*, fixé lui-même à la tablette T par la vis inférieure V et par les trois vis calantes *f*, *f*, *f*.

K, K, K, pieds jumeaux de l'instrument, réunis autour de la tablette T.

NIVEAU DE PENTE DE CHÉZY (*Voir* page 117, n° 52).

Figures 10, 11 et 12.

AA, règle en cuivre supportée par un système de deux plateaux semblables à celui du niveau d'Égault (*fig.* 4, 5 et 7).

BB, seconde règle portant le niveau à bulle d'air C, ainsi que les pinnules α et β.

K, charnière qui permet de modifier l'angle compris entre les deux règles.

np, tige fixée à la règle B et traversant la règle A. L'écartement de ces deux règles est déterminé par un ressort à boudin entourant la tige et par un écrou inférieur *c*.

ff, cadre renfermant la pinnule fixe α. Le ressort *q* tend à la soulever, et la vis *z* permet de l'enfoncer pour régler l'instrument.

m, *m*, cadre renfermant la pinnule mobile β qui peut être fixée au tube *t* par la vis *y* et se mouvoir avec ce tube par le moyen du bouton à écrou E.

b, bouton qui sert à imprimer à la pinnule β un mouvement vertical le long du tube *t*, quand la vis *y* est desserrée.

o, *r*, trous coniques dans les deux plaques des pinnules, respectivement placés sur les prolongements des fils horizontaux des fenêtres *i*, *l*. Ces trous servent à appliquer l'œil dans les visées, et correspondent respectivement aux fils verticaux de la pinnule opposée.

NIVEAU DE PENTE DE LEFRANC (*Voir* page 120, n° 56).

Figures 13, 14 et 15.

AA, règle en bois dur, de $0^m,50$ de longueur.

B, genou à coquille au moyen duquel la règle se place dans une position à peu près horizontale.

aa, niveau à bulle d'air, encastré dans la règle AA, et que protége, dans les transports, un couvercle retenu par le petit crochet visible au milieu de ladite règle.

c, vis à caler qui sert, d'après les indications de la bulle d'air, à rendre la règle complétement horizontale.

C, pinnule fixe que règle la vis *e*.

DD, pinnule mobile glissant à frottement dans l'embrasse en cuivre

Digitized by Google

qui termine la règle; la tige de cette pinnule porte l'échelle des pentes, et le bord de l'embrasse est muni d'un vernier.

d, vis de pression qui sert à fixer la pinnule mobile.

PLANCHE IV.

MIRE A COULISSE (*Voir* page 88, n° **22**).

Figures 1, 2, 3 et 4.

AA, BB, règles en bois s'emboîtant à frottement dans toute leur longueur par une languette et une coulisse.

aa, *bb*, embrasses en cuivre, l'une mobile le long de la double règle et portant le voyant C, l'autre fixée à la règle A et glissant avec elle le long de la règle B.

v, *v*, verniers gravés sur les embrasses et servant à la lecture des millimètres.

G, G, vis de pression pour arrêter le mouvement vertical des embrasses.

g, semelle en fer servant à faciliter l'application du pied de la mire sur les points à niveler.

MIRE PARLANTE (*Voir* page 90, n° **24**).

Figure 5.

PROFIL EN LONG ET PROFILS EN TRAVERS.

(*Voir* page 99, n° **32**).

Figures 6 et 7.

FIN DU SECOND ET DERNIER VOLUME.

Digitized by Google

NS.

Digitized by Google

Digitized by Google

Alidades. Echelle de 0,25.

Alidade à pinnules.

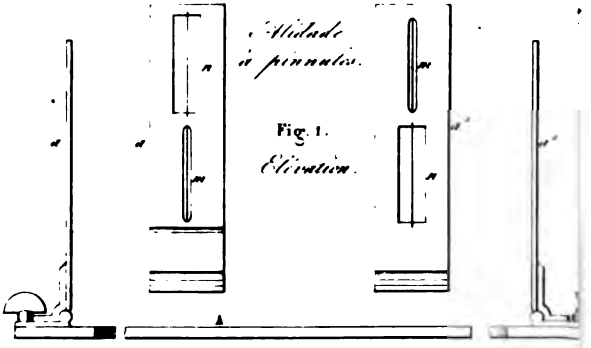
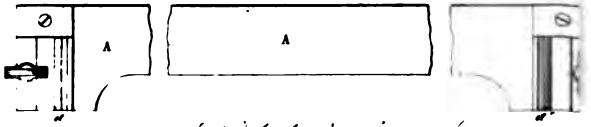


Fig. 1. Elévation.

Fig. 2. Plan.



Alidade à lunette.

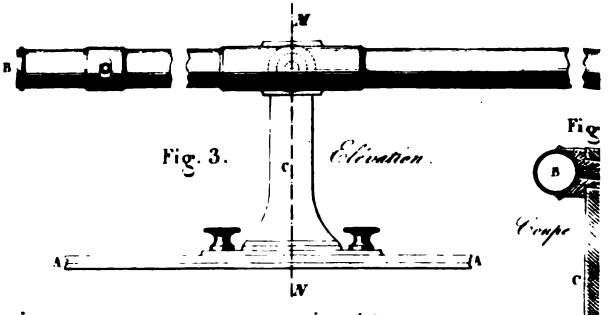
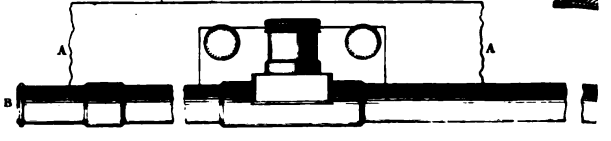


Fig. 3. Elévation.

Fig

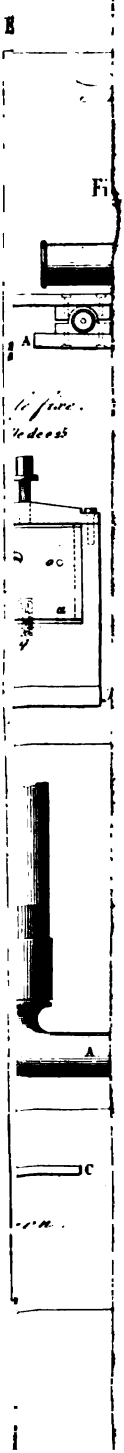
Coupe

Fig. 4. Plan.



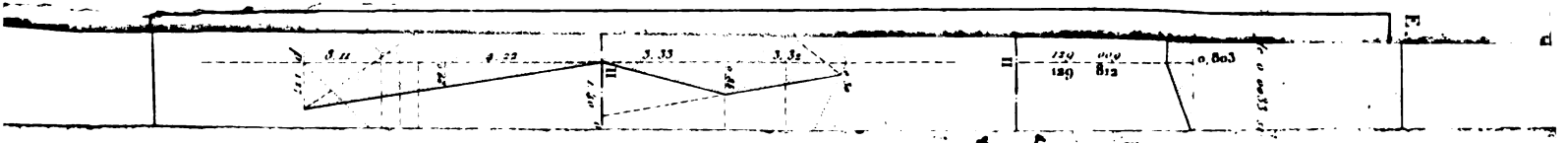
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



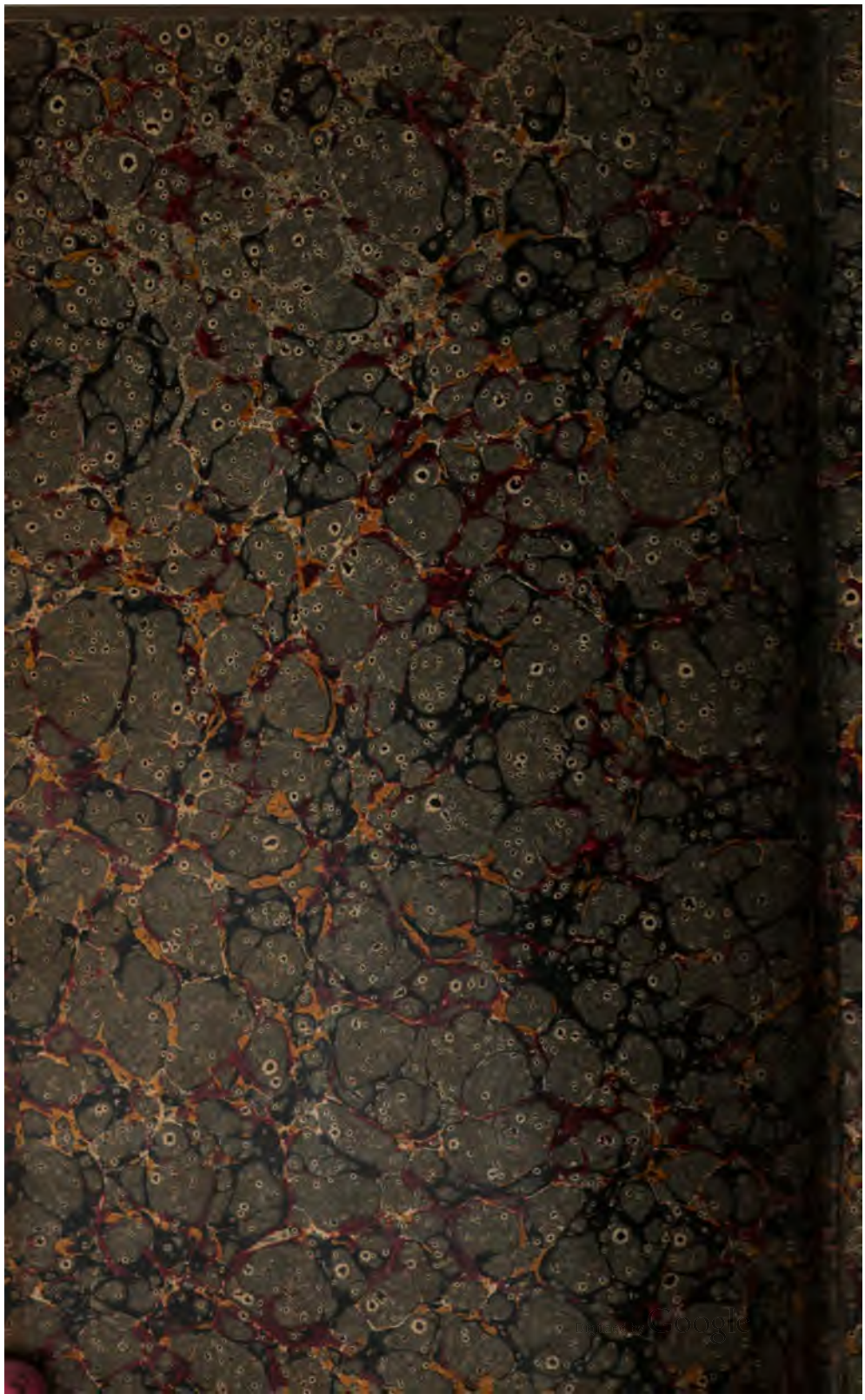
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

3 2044

Digitized by Google